

高一必修(第二册)答案页第3期

数学
人教A

第9期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:由两条直线 a 与 b 有公共点,可得 a 与 b 相交或重合.根据推论2,可得 a 与 b 共面.故选C.

2.D

提示:由基本事实3可知,这两个平面有无数个公共点.故选D.

3.B

提示:由等角定理知,这两个三角形的三个角分别对应相等,所以这两个三角形相似.故选B.

4.D

提示:由题图可知, $m\subset\alpha$, $A\in\alpha$, $n\cap\alpha=A$, m,n 异面.故选D.

5.C

提示:直线 AA_1 , AC , A_1B_1 均与 BC_1 异面,共3条.故选C.

6.C

提示:由空间图形 A,B,C_1-ABC 是三棱台,可知平面 $ABC\parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$.当平面 ABC_1 为平面 α ,平面 $\alpha\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=m$ 时,又平面 $\alpha\cap$ 平面 $ABC=AB$,由面面平行的性质定理可知 $m\parallel AB$.故选C.

7.B

提示:若 m,n,l 在同一平面内,则 m,n,l 可能平行,也可能相交,即充分性不成立.

若 m,n,l 两两相交,且不过同一点,设 $m\cap n=A$, $m\cap l=B$, $n\cap l=C$,由推论2可知, m,n 确定一个平面 α ,又 $B\in m\subset\alpha$, $C\in n\subset\alpha$,且 $B\in l$, $C\in l$,所以 $l\subset\alpha$,所以 m,n,l 在同一平面内,即必要性成立.故选B.

8.A

提示:若三个平面重合,可将空间分成2个部分;若三个平面互相平行,如图1,可将空间分成4个部分;若三个平面中有两个平面平行,第三个平面与这两个平面相交,如图2,可将空间分成6个部分;若三个平面交于一条直线,如图3,则可将空间分成6个部分;若三个平面两两相交且三条交线平行,如图4,则可将空间分成7部分;若三个平面两两相交且三条交线交于一点,如图5,则可将空间分成8部分.

综上, n 不可能是5.故选A.

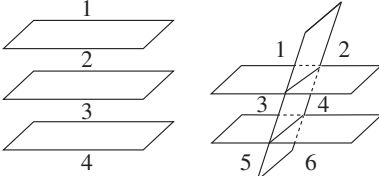


图1

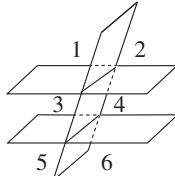


图2

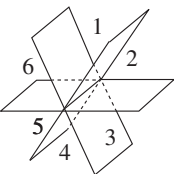


图3

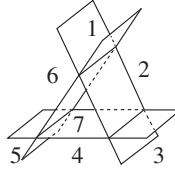


图4

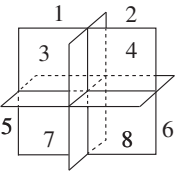


图5

(第8题图)

二、多项选择题

9.ABD

提示:因为 $m\parallel\alpha$,所以 m 与 α 没有交点.又 $n\subset\alpha$,则 m 与 n 没有公共点.所以 m,n 可能平行,也可能异面,异面时可能垂直.故选ABD.

10.ABD

提示:对于A,连接 B_1D_1 ,易证四边形 BB_1D_1D 是平行四边形,则 $B_1D_1\parallel BD$.又 EF 为 $\triangle C,D,B$ 的中位线,则 $EF\parallel B_1D_1$,所以 $BD\parallel EF$,所以四点 B,D,E,F 在同一平面内,故A正确;

对于B,由 $EF=\frac{1}{2}B_1D_1=\frac{1}{2}BD$,知四边形 $BDEF$ 为梯形,所以延长 BF,DE ,则 BF,DE 必相交,设交点为 P ,则 $P\in$

(4)每次随机地从中抽取1个号签,然后将盒子中余

下的号签搅拌均匀,再进行下一次抽取.如此下去,直到抽取8个号签.

(5)找出8个号签上的号码对应的志愿者组成志愿

服务小组.

17.解:(1)由某地区有高中生7 200人,初中生

11 800人,小学生12 000人,得共7 200+11 800+12 000=

31 000人.

因为总样本量为310,所以从高中生中抽取 $\frac{7\,200}{31\,000}\times$

310=72(人),从初中生中抽取 $\frac{11\,800}{31\,000}\times 310=118$ (人),从小学生中抽取 $\frac{12\,000}{31\,000}\times 310=120$ (人).

又样本中高中生、初中生、小学生的近视率分别为

80%,70%和36%,所以样本的近视率为

$$\frac{72\times 80\%+118\times 70\%+120\times 36\%}{310}\approx 59\%.$$

由此估计,该地区全体中小学生的近视率约为59%.

(2)如果从高中生、初中生、小学生中抽取的样本量

分别为60,100和150,

那么抽取的样本的近视率为

$$\frac{60\times 80\%+100\times 70\%+150\times 36\%}{310}\approx 55\%.$$

该地区全体中小学生的近视率为

$$\frac{7\,200\times 80\%+11\,800\times 70\%+12\,000\times 36\%}{31\,000}\approx 59\%.$$

18.解:(1)各年龄段的身体状况差异比较明显,所以

要抽取40人调查身体状况,应按年龄进行分层随机抽

样,从老年人中抽取 $200\times\frac{40}{2\,000}=4$ 人,从中年人中抽取

$600\times\frac{40}{2\,000}=12$ 人,从青年人中抽取 $1\,200\times\frac{40}{2\,000}=24$ 人.

(2)要开一个讨论单位发展与薪金调整方面的座谈

会,应按部门进行分层随机抽样,从管理部门抽取 $160\times$

$\frac{25}{2\,000}=2$ 人,从技术开发部门抽取 $320\times\frac{25}{2\,000}=4$ 人,从营

销部门抽取 $480\times\frac{25}{2\,000}=6$ 人,从生产部门抽取 $1\,040\times$

$\frac{25}{2\,000}=13$ 人.

(3)要调查对巴黎奥运会中国代表团获奖情况的了

解,应按年龄进行分层随机抽样,从老年人中抽取 $200\times$

$\frac{20}{2\,000}=2$ 人,从中年人中抽取 $600\times\frac{20}{2\,000}=6$ 人,从青年人

中抽取 $1\,200\times\frac{20}{2\,000}=12$ 人.

19.解:(1)由题中第2个表格知,第5题的实测难度

为 $\frac{8}{20}=0.4$.

由此估计,这240名学生中第5题的实测答对人数为

240×0.4=96.

(2)根据已知数据,得

$$P_1'=P_2'=\frac{16}{20}=0.8,P_3'=P_4'=\frac{14}{20}=0.7,P_5'=\frac{8}{20}=0.4.$$

所以 $S=\frac{1}{5}\times[(0.8-0.9)^2+(0.8-0.8)^2+(0.7-0.7)^2+(0.7-$

0.6) $^2+(0.4-0.4)^2]=0.004<0.05$.

所以本次测试的难度预估合理.

故选AC.

10.ACD

提示:由已知,得 $\bar{z}=\frac{m}{m+n}\bar{x}+\frac{n}{m+n}\bar{y}$.

当 $m=n$ 时, $\bar{z}=\frac{m}{2m}\bar{x}+\frac{m}{2m}\bar{y}=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$,故A正确;

当 $\bar{z}=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ 时,取 $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$, $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$,则 m

与 n 不一定相等,故B错误;

当 $\bar{x}=\bar{y}$ 时, $\bar{z}=\frac{m}{m+n}\bar{x}+\frac{n}{m+n}\bar{x}=\bar{x}=\frac{2\bar{x}}{2}=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$,故C正确;

当 $\bar{z}>\bar{x}$ 时, $\frac{m}{m+n}\bar{x}+\frac{n}{m+n}\bar{y}>\bar{x}$,化简得 $\frac{n}{m+n}(\bar{y}-\bar{x})>0$,

又 $m>0,n>0$,所以 $\bar{y}-\bar{x}>0$,即 $\bar{y}>\bar{x}$,故D正确.

故选ACD.

11.ABC

提示:从120名同学中随机抽取30名,故样本容量为

30,故A正确;120名社团成员中男生人数为 $120\times\frac{18}{30}=72$,

故B正确;高一年级的社团成员人数为 $120\times\frac{10}{30}=40$,故D

错误;高二与高三年级的社团成员人数为 $120-40=80$,故

C正确.

故选ABC.

三、填空题

12.不合理

提示:由于很多视力残疾的人不具有上网的条件,因

此所获取的数据不具有代表性.故他的方案不合理.

13.乙;120.1

提示:因为乙班的同学抽取的样本量是甲班的同学

抽取样本量的2倍,所以乙班的同学调查结果能够更好地

反映总体.对于乙班的数据,剔除掉差别较大的数据

121.0,计算得乙班的同学抽取的样本的该项指标的平均

数为120.1,由此得这两个班的同学调查的该项指标约为

120.1.

14.700

提示:根据题表,得样本容量为 $3\,000\times\frac{150}{1\,500}=300$.

所以样本中A产品与C产品共有 $300-150=150$ (件).

设样本中C产品的数量为 x 件,则 $x+x+10=150$,

解得 $x=70$.

所以C产品的数量是 $70\times\frac{3\,000}{300}=700$ (件).

四、解答题

15.解:小强的结论更可靠.因为小王观测的是一个

月的气温情况,选取的样本容量不够大,没有代表性;小

英观察了三个月的气温情况,但调查结果局限于春季,不

能推广到全年,结论也不可靠;小强虽然也只观察了四个

月的气温情况,但他所选择的月份分别代表了春、夏、

秋、冬的气温,所以小强观察到的结论更可靠.

16.解:(1)将50名志愿者编号,号码分别是1,2,⋯,

50.

(2)将号码分别写在形状、大小相同的小纸片上作为

号签.

(3)将小纸片放入一个不透明的盒子里,充分搅拌

均匀.

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:因为要研究的是某城市家庭的收入情况,所以

通过调查获取数据.

故选A.

2.D

提示:A,B中要调查的总体容量都较大,适合采用抽

样调查;C的检测具有破坏性,适合采用抽样调查;D中要

调查的总体容量较小,适合采用全面调查.

故选D.

3.D

提示:在这个问题中,28种雪糕的质量是总体,每一

种雪糕的质量是个体,18种雪糕的质量是样本,18是样

本量.

故选D.

4.C

提示:由简单随机抽样方法的定义可知,在抽样过程

中,每个个体被抽取的可能性相等,即概率相等.

故选C.

5.C

提示:由于高中三个年级的课业情况差异比较明显,

故最合理的抽样方法是分层随机抽样.

故选C.

6.C

提示:根据题意,得初中生应抽取的人数是 $50\times$

$$\frac{4}{5+4+1}=20.$$

故选C.

7.C

提示:设该年级的男生人数估计为 x ,则女生人数估

计为 $600-x$.

由已知,得 $\frac{x}{600}\times 170.0+\frac{600-x}{600}\times 160.4=165.6$,

解得 $x=325$.

故选C.

8.A

提示:由题意可知,在1 200名学生中,估计摸到红球

的学生有600人,摸到绿球的学生有600人.

因为50个红球中序号为奇数的有25个,所以摸到红

球的600人中,有 $\frac{25}{50}\times 600=300$ 人回答“是”.

所以摸到绿球的600人中,有 $390-300=90$ 人回答

“是”,即有90人曾在考试中作弊.

据此估计该校学生的作弊率为 $\frac{90}{600}=0.15=15\%$.

故选A.

二、多项选择题

9.AC

提示:A,C所需数据都没有现存数据可供查询,需要

通过试验的方法来获取样本观测数据,B项数据宜通过

调查获取,D项数据宜通过观察或者查询获取.

$BF\subset$ 平面 BCC_1B_1 ,且 $P\in DE\subset$ 平面 DD_1C_1C ,即 $P\in$ 平面

$BCC_1B_1\cap$ 平面 DD_1C_1C ,又平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $DD_1C_1C=CC_1$,

所以 $P\in CC_1$,即三条直线 BF,DE,CC_1 有公共点,故B正确;

对于C,连接 AC,A_1C_1 ,因为 $A_1C_1\subset$ 平面 ACC_1A_1 , $OF\cap$ 平面 $ACC_1A_1=O$, $O\notin A_1C$,所以直线 A_1C 与直线 OF 是异面直

线,故C错误;

对于D,因为 A_1,O,C,C_1 均在平面 AA_1C_1C 内,连接

OM ,则 OM 与 A_1C 相交,所以直线 A_1C 上存在点 N 使 M,N ,

O 三点共线,故D正确.故选ABD.

11.ABD

提示:因为平面 $AMN\parallel$ 平面 $EFDB$,平面 $A_1B_1C_1D_1\cap$ 平面

$AMN=MN$,平面 $A_1B_1C_1D_1\cap$ 平面 $EFDB=EF$,

所以 $MN\parallel EF$,故A正确;

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,平面 $A_1B_1C_1D_1\parallel$ 平面

$ABCD$,又平面 $EFDB\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1=EF$,平面 $EFDB\cap$ 平面

$ABCD=BD$,

所以 $EF\parallel BD$,故B正确;

连接 MF ,则 $MF\parallel A_1D_1\parallel AD$,且 $MF=A_1D_1=AD$,所以四

边形 $DAMF$ 是平行四边形,所以 $DF\parallel AM$,因为 $AM\cap AN=$

A ,所以 AN 与 DF 不平行,故C错误;

因为平面 $AMN\parallel$ 平面 $EFDB$, $BE\subset$ 平面 $EFDB$,所以

$BE\parallel$ 平面 AMN ,故D正确.故选ABD.

三、填空题

12.70°或110°

提示:若 $\angle A$ 的两边和 $\angle B$ 的两边分别平行,且方向相

同,则 $\angle B=\angle A=70^\circ$;

若 $\angle A$ 的两边和 $\angle B$ 的两边分别平行,且一边方向相

同另一边方向相反,则 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互补,

此时 $\angle B=180^\circ-\angle A=110^\circ$.

综上, $\angle B=70^\circ$ 或 110° .

13.④

提示:对于①,当经过 b 的平面也经过 a 时,命题不成

立,故①为假命题;

对于②, a 与 α 内的直线平行或异面,故②为假命题;

对于③, a 与 b 可能平行,可能相交,也可能异面,故

③为假命题;

对于④,若 $a\parallel b$, $a\parallel\alpha$,则 $b\subset\alpha$ 或 $b\parallel\alpha$,又 $b\not\subset\alpha$,所以

$b\parallel\alpha$,故④为真命题.

14. $\frac{1}{3}$

提示:连接 BD ,交 AC 于点 O ,则 O 为 BD 的中点.连接 OE .

在线段 PE 取点 G ,使得 $GE=ED$,由 $PE=\frac{3}{5}PD$,得 $\frac{PG}{PE}=\frac{1}{3}$.

连接 BG,FG ,则 $BG\parallel OE$.因为 $OE\subset$ 平面 ACE , $BG\not\subset$ 平

面 ACE ,所以 $BG\parallel$ 平面 ACE .

又 $BF\parallel$ 平面 ACE , $BG\cap BF=B$, $BG,BF\subset$ 平面 BGF ,所

以平面 $BGF\parallel$ 平面 ACE .

又平面 $PCD\cap$ 平面 $ACE=EC$,平面 $PCD\cap$ 平面 $BGF=$

GF ,所以 $GF\parallel EC$.所以 $\lambda=\frac{PF}{PC}=\frac{PG}{PE}=\frac{1}{3}$.

四、解答题

15.(1)解:由已知可得, EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

所以 $EF\parallel AC$ 且 $EF=\frac{1}{2}AC$.

一、单项选择题

1.B

提示:若 l 垂直于 α 内的两条非相交直线,则 $l\perp\alpha$ 不一定成立;若充分性不成立;若 $l\perp\alpha$,则 l 垂直于 α 内的任意直线,即必要性成立. 故选B.

2.D

提示:由两条直线所成的角的范围是 $[0^\circ, 90^\circ]$,可知两射线所在直线所成的角的最大值为 90° . 故选D.

3.D

提示:取 BC 的中点 E ,连接 EF, AE ,则 $\angle AFE$ 或其补角为异面直线 MB 与 AF 所成的角.

因为 $MA\perp$ 平面 ABC ,所以 $MA\perp AB, MA\perp AC$. 所以 $MB=MC=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$. 所以 $AF=\frac{1}{2}MC=2, FE=\frac{1}{2}MB=2$.

由 $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形,得 $AE=\sqrt{3}$.

在 $\triangle AFE$ 中,由余弦定理的推论,得

$$\cos\angle AFE=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2\times 2\times 2}=\frac{5}{8}.$$

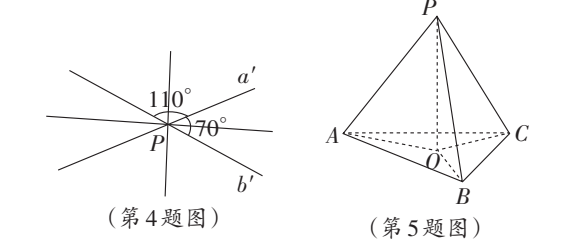
故选D.

4.A

提示:如图所示,过点 P 分别作直线 a, b 的平行线 a', b' ,则 a' 与 b' 的夹角为 70° . 所以与 a', b' 的夹角相等的直线的射影落在 70° 或 110° 的角平分线上.

70° 的角平分线与 a', b' 的夹角均为 35° ,其他射影落在角平分线的直线与 a', b' 的夹角均大于 35° ;
 110° 的角平分线与 a', b' 的夹角均为 55° ,其他射影落在角平分线的直线与 a', b' 的夹角均大于 55° .

所以只有1条直线与 a', b' 所成的角均为 35° ,也即只有1条直线 l 与 a, b 所成的角均为 35° . 故选A.



(第4题图)

5.D

提示:如图所示,由点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内的射影是点 O ,得 $PO\perp$ 平面 ABC ,所以 $PO\perp BC$.又 $PA\perp BC, PA\cap PO=P$,所以 $BC\perp$ 平面 POA ,得 $BC\perp OA$. 同理,得 $OB\perp AC$. 所以 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 故选D.

6.A

提示:对于①,若 $n\subset\alpha$ 且 $n\not\subset\beta$,因为 $m\parallel n, m\subset\beta$,所以 $n\parallel\beta$. 若 $n\subset\beta$ 且 $n\subset\alpha$,因为 $m\parallel n, m\subset\alpha$,所以 $n\parallel\alpha$.

若 n 不在 α 也不在 β 内,因为 $m\parallel n, m\subset\alpha, m\subset\beta$,所以 $n\parallel\alpha$ 且 $n\parallel\beta$,故①是真命题;

对于②, n 与 α, β 不一定垂直,故②是假命题;

对于③,过直线 n 分别作平面,与 α, β 分别相交于直线 a, b ,因为 $n\parallel\alpha$,过直线 n 的平面与平面 α 的交线为直线 a ,所以 $n\parallel a$,同理可得 $n\parallel b$,所以 $a\parallel b$,因为 $a\subset\beta, b\subset\beta$,所以 $a\parallel\beta$. 又 $a\subset\alpha, a\cap\beta=m$,所以 $a\parallel m$,又 $n\parallel a$,所以 $m\parallel n$,故③是真命题;

对于④,若 $n\parallel\alpha, n\parallel\beta$,则 $m\parallel n$,故④是假命题.

7.B

提示:设棱台的高为 h . 由已知,得 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$, $S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$,

所以 $V=\frac{1}{3}h\times(9\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\sqrt{3})=\frac{52}{3}$,

解得 $h=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

设该正三棱台的三条侧棱延长后交于一点 O , $\triangle A, B, C_1$ 的中心为 O_1 ,则 $AB=3A_1B_1$,得 O 到上底面 $A_1B_1C_1$ 的距离为 $OO_1=\frac{1}{2}h=\frac{2}{\sqrt{3}}$. A_1A 与平面 ABC 所成角即为 OA_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成角 $\angle OA_1O_1$.

又 $OA_1=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{2}{\sqrt{3}}$,所以 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 $\frac{OO_1}{OA_1}=1$. 故选B.

8.B

提示:由平面 $PAC\perp$ 平面 ABC ,平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC, \angle PCA=90^\circ$,即 $PC\perp AC, PCC$ 平面 PAC ,得 $PC\perp$ 平面 ABC ,所以 $PC\perp CM$. 所以 $PM=\sqrt{PC^2+CM^2}=\sqrt{16+CM^2}$. 求 PM 的最小值,即求 CM 的最小值.

当 $CM\perp AB$ 时, CM 最小,即 PM 最小,此时 $CM=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}, PM=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$. 故选B.

二、多项选择题

9.BD

提示:对于 A, α, β 可能相交,也可能平行,故A不符合题意;

对于B,由 $\alpha\cap\gamma, \beta\perp\gamma$,得 $\alpha\perp\beta$,故B符合题意;

对于C,由 $\alpha\cap\beta=b, a\perp b, a\subset\alpha$,知 $a\perp\beta$ 不一定成立,故 $\alpha\perp\beta$ 不一定成立. 故C不符合题意;

对于D,由 $a\parallel b, b\perp\beta$,得 $a\perp\beta$. 又 $a\subset\alpha$,所以 $\alpha\perp\beta$,故D符合题意. 故选BD.

10.BD

提示:因为 PA 垂直于以 AB 为直径的圆所在的平面,所以 $PA\perp BC, PA\perp AC$.

又点 C 是圆周上异于 A, B 的任一点,所以 $AC\perp BC$. 又 $PA\cap AC=A$,所以 $BC\perp$ 平面 PAC .

又 PCC 平面 PAC ,则 $PC\perp BC$; 又 BCC 平面 PBC ,则平面 $PAC\perp$ 平面 PBC . 故B, D正确.

对于A, C, 若 $PB\perp AC$, 又 $AC\perp BC$, 则 $AC\perp$ 平面 PBC , 所以 $AC\perp PC$, 与 $PA\perp AC$ 矛盾, 故A, C错误.

故选BD.

11.ACD

提示:在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,可得 $BC_1\parallel AD_1$, 所以 $BC_1\parallel$ 平面 AD_1C .

当点 P 在直线 BC_1 上运动时,点 P 到平面 AD_1C 的距离不变,设为 h .

又 $\triangle AD_1C$ 的面积为定值, $V_{A-D_1PC}=V_{P-AD_1C}=\frac{1}{3}S_{\triangle AD_1C}\cdot h$, 所以三棱锥 $A-D_1PC$ 的体积不变,故A正确.

设直线 AP 与平面 AD_1C 所成的角为 θ , 则 $\sin\theta=\frac{h}{AP}$, 因为 h 为定值, AP 在变化, 所以 $\sin\theta$ 在变化, 即角 θ 在变化, 所以直线 AP 与平面 AD_1C 所成的角在变化, 故B错误.

因为 $APC\subset$ 平面 ABC, D_1 , 所以二面角 $P-AD_1-C$ 的大小等于平面 ABC, D_1 与平面 AD_1C 的夹角大小, 所以二面角 $P-AD_1-C$ 的大小不变, 故C正确.

对于D, 因为 M 是平面 A, B, C_1, D_1 上到点 D 和点 C_1 的距离相等的点, 所以点 M 的集合是平面 A, B, C, D_1 与 DC_1 的垂直平分线所在平面的交线, 即平面 A, B, C, D_1 与平面 A, D, C 的交线 A, D_1 , 所以点 M 的集合是过点 D_1 的直线, 故D正确.

故选ACD.

三、填空题

12.②③;①

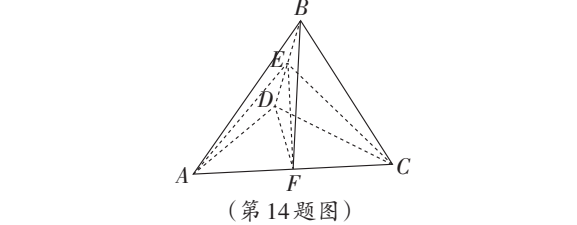
提示:由 $n\parallel\beta$, 可得 β 内存在一条直线 m , 使得 $m\parallel n$. 又 $n\perp\alpha$, 所以 $m\perp\alpha$. 根据面面垂直的判定定理, 可得 $\alpha\perp\beta$.

13.6

提示:由正方体的性质知 $A_1D\perp AD_1, AB\perp$ 平面 ADD_1A_1 , 因为 $A_1D\subset$ 平面 ADD_1A_1 , 所以 $A_1D\perp AB$. 又 $AB\cap AD_1=A$, 所以 $A_1D\perp$ 平面 ABC, D_1 . 又 $AC_1\subset$ 平面 ABC, D_1 , 所以 $A_1D\perp AC_1$, 同理可知正方体各面均有1条对角线与体对角线 AC_1 垂直. 所以与 AC_1 垂直的面对角线共有6条.

14. $\frac{1}{2}$

提示:如图所示,取 AC 的中点 F , 连接 DF, EF, BF . 因为 $DA=DC$, 所以 $DF\perp AC$.



(第14题图)

因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, 所以 $BF\perp AC$. 又 $DF\cap BF=F$, 所以 $AC\perp$ 平面 BDF , 得 $EF\perp AC$. 所以二面角 $D-AC-E$ 的平面角为 $\angle DFE$.

由四面体 $A-CDE$ 与四面体 $A-BCD$ 的体积之比为1:2, 得 $\triangle CDE$ 与 $\triangle BCD$ 的面积之比为1:2. 所以 E 为 BD 的中点.

设正 $\triangle ABC$ 的边长为2, 则 $BF=\sqrt{3}, DF=1$. 因为平面 $ACD\perp$ 平面 ABC , 平面 $ACD\cap$ 平面 $ABC=AC, BF\perp AC$, 所以 $BF\perp$ 平面 ACD . 所以 $BF\perp DF$.

所以 $BD=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, 则 $DE=1, EF=1$. 所以 $DE=EF=DF$. 所以 $\angle DFE=60^\circ$. 所以二面角 $D-AC-E$ 的余弦值为 $\cos\angle DFE=\frac{1}{2}$.

四、解答题

15. 证明: (1) 连接 AC . 因为底面 $ABCD$ 是平行四边形, 且 F 是 BD 的中点, 所以 F 是 AC 的中点. 又 E 为 PC 的中点, 所以 $EF\parallel PA$. 又 PAC 平面 PAD, EFC 平面 PAD , 所以 $EF\parallel$ 平面 PAD .

(2) 因为 $AB\perp$ 平面 PAD, PAC 平面 PAD , 所以 $AB\perp PA$. 又 $PA\perp AD, AB\cap AD=A$, 所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$. 由(1)知 $EF\parallel PA$, 所以 $EF\perp$ 平面 $ABCD$.

16. (1) 证明: 连接 ND . 因为 $AB=AC, BD=CD, N$ 为 BC 的中点, 所以 $AN\perp BC, DN\perp BC$. 又 $DN\cap AN=N$, 所以 $BC\perp$ 平面 AND .

因为 ADC 平面 AND , 所以 $BC\perp AD$.

(2) 解: 根据题意可知, M 是 AD 上靠近点 D 的三等分点, 取 ND 上靠近点 D 的三等分点 E , 连接 ME, CE , 则 $ME\parallel AN$.

所以 $\angle CME$ 或其补角为异面直线 AN, CM 所成的角. 因为 $AC=CD=AD$, 所以 $\angle CAD=60^\circ$. 又 $AC=3, AM=2$, 所以 $CM=\sqrt{3^2+2^2-2\times 3\times 2\times\cos 60^\circ}=\sqrt{7}$.

在 $Rt\triangle ENC$ 中, $NC=1, NE=\frac{2}{3}ND=\frac{2}{3}\times\sqrt{3^2-1^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 所以 $CE=\sqrt{1^2+(\frac{4\sqrt{2}}{3})^2}=\frac{\sqrt{41}}{3}$.

又 $ME=\frac{1}{3}AN=\frac{1}{3}\times\sqrt{3^2-1^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以在 $\triangle CME$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos\angle CME=\frac{7+\frac{8}{9}-\frac{41}{9}}{2\times\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{5\sqrt{14}}{28}.$$

故异面直线 AN, CM 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{14}}{28}$.

17. (1) 证明: 因为 $\triangle PBC$ 为等边三角形, O 为 BC 的中点, 所以 $PO\perp BC$.

又平面 $PBC\perp$ 平面 ABC , 平面 $PBC\cap$ 平面 $ABC=BC$, POC 平面 PBC , 所以 $PO\perp$ 平面 ABC .

又 ACC 平面 ABC , 所以 $PO\perp AC$.

因为 $AC\perp PB, PO\cap PB=P$, 所以 $AC\perp$ 平面 PBC .

(2) 解: 连接 OF . 由(1)知, $PO\perp BC$, 又 $EF\perp BC, PO\cap EF=E$, 所以 $BC\perp$ 平面 EOF . 因为 $OF\subset$ 平面 EOF , 所以 $OF\perp BC$. 由(1)知, $AC\perp$ 平面 PBC , 所以 $AC\perp BC$. 所以 $AC\parallel OF$.

因为 O 为 BC 的中点, 所以 F 为 AB 的中点.

又 $AF=\lambda AB$, 所以 $\lambda=\frac{1}{2}$.

18. (1) 证明: 因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, M 为 AB 的中点, 所以 $CM\perp AB$.

因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC, CMC 平面 ABC , 所以 $CM\perp A_1A$. 又 $A_1A\cap AB=A$, 所以 $CM\perp$ 平面 A_1ABB_1 .

因为 B_1BC 平面 A_1ABB_1 , 所以 $CM\perp B_1B$. 连接 AB_1 . 在直角梯形 A_1ABB_1 中, $AB=4, A_1A=B_1=2$, 易得 $AB_1=B_1B=2\sqrt{2}$, 所以 $AB^2=AB_1^2+B_1B^2$. 所以 $AB_1\perp B_1B$. 因为 MN 是 $\triangle ABB_1$ 的中位线, 所以 $MN\parallel AB_1$. 所以 $MN\perp B_1B$.

因为 $MN\cap CM=M$, 所以 $B_1B\perp$ 平面 MCN .

(2) 解: 由(1)知 $B_1B\perp$ 平面 MCN , 所以直线 C_1C 与平面 MCN 所成的角和直线 B_1B 与 C_1C 所成角互余. 延长三棱台的三条侧棱交于一点 O . 由 $AB=2A_1A=2A_1B_1=4$, 结合三棱台的性质, 可得 $OA_1=2$.

所以 $OB=OC_1=2\sqrt{2}$. 又 $B_1C_1=2$, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos\angle B_1OC_1=\frac{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2^2}{2\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}.$$

故直线 C_1C 与平面 MCN 所成的角的正弦值为 $\frac{3}{4}$.

19. (1) 证明: 连接 AC_1 . 因为四边形 ACC_1A_1 是菱形, 所以 $AC_1\perp A_1C$. 因为 $\angle ACB=90^\circ$, 所以 $BC\perp AC$. 又平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1 , 平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC, BCC$ 平面 ABC , 所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1 . 因为 A_1CC 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BC\perp A_1C$. 又 $BC\parallel B_1C_1$, 所以 $B_1C_1\perp A_1C$. 因为 $AC_1\cap B_1C_1=C$, 所以 $A_1C\perp$ 平面 AB_1C_1 . 又 $AB_1\subset$ 平面 AB_1C_1 , 所以 $A_1C\perp AB_1$.

(2) 解: 点 C_1 到平面 ABB_1A_1 的距离, 即三棱锥 $C_1-AA_1B_1$ 的底面 AA_1B_1 上的高.

因为三棱锥 $B_1-AA_1C_1$ 的底面 AA_1C_1 上的高为 B_1C_1 . 设点 C_1 到平面 ABB_1A_1 的距离为 d .

由 $V_{B_1-AA_1C_1}=V_{C_1-AA_1B_1}$, 得 $\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1C_1}\cdot B_1C_1=\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1B_1}\cdot d$. (*)

因为侧面 ACC_1A_1 是菱形, $\angle A_1AC=60^\circ, AC=2$, 所以 $S_{\triangle AA_1C_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 120^\circ=\sqrt{3}$, 且 $AC_1=2\sqrt{3}$.

又 $B_1C_1=2, B_1C_1\perp AC_1$, 所以 $AB_1=4$. 又 $AA_1=2, A_1A, B_1=2\sqrt{2}$. 由余弦定理的推论, 得

$$\cos\angle A_1AB_1=\frac{2^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times 2\times 4}=\frac{3}{4}.$$

所以 $\sin\angle A_1AB_1=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

所以 $S_{\triangle AA_1B_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}$.

将各数据代入(*)式, 得 $\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 2=\frac{1}{3}\times\sqrt{7}\times d$, 解得 $d=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 故点 C_1 到平面 ABB_1A_1 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

一、单项选择题

1.A

提示:五棱锥有10条棱,三棱台有9条棱,三棱柱有9条棱,四棱锥有8条棱,所以棱数最多的是五棱锥. 故选A.

2.D

提示:四棱柱的底面不一定是平行四边形,所以四棱柱不一定是平行六面体. 故选D.

3.B

提示:由展开图可知,该几何体有四个三角形面与一个四边形面,故该几何体为四棱锥. 故选B.

4.C

提示:由斜二测画法的规则可知,在 $\triangle ABC$ 中, $OA\perp BC, OA=2, OB=OC=1$, 所以 $AB=AC=\sqrt{5}$.

所以该三棱柱的表面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\times (2+2\sqrt{5})\times 1=6+2\sqrt{5}$. 故选C.

5.A

提示:将空间不共面的4个点看作四面体的顶点. 分两类

第一类,平行于底面,且过侧棱的中点,有4个平面符合要求,如图1所示.

第二类,过侧面的中位线与底面的中位线,有3个平面符合要求,如图2所示. 综上,共有7个平面符合要求. 故选A.

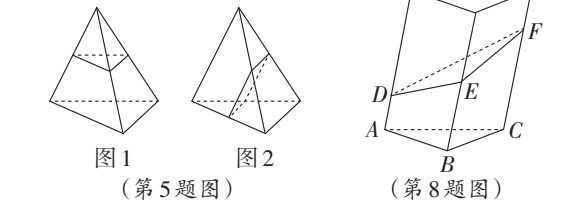


图1 (第5题图)

图2 (第8题图)

6.A

提示:对于A, 由 $\alpha\perp\beta, m\perp\alpha$, 得 $m\parallel\beta$ 或 $m\subset\beta$, 又 $n\perp\beta$, 所以 $m\perp n$. 故A正确;

对于B, 由 $\alpha\perp\beta, m\perp\alpha$, 得 $m\parallel\beta$ 或 $m\subset\beta$, 又 $m\perp n$, 则 n 与 β 相交, $n\subset\beta$. 平行均有可能, 故B错误;

对于C, 由 $\alpha\parallel\beta, m\parallel\alpha$, 得 $m\parallel\beta$ 或 $m\subset\beta$, 又 $n\parallel\beta$, 则 m 与 n 相交、平行、异面均有可能, 故C错误;

对于D, 由 $\alpha\parallel\beta, m\parallel\alpha$, 得 $m\parallel\beta$ 或 $m\subset\beta$, 又 $m\parallel n$, 则 $n\parallel\beta$ 或 $n\subset\beta$, 故D错误. 故选A.

7.D

提示:分别取 AB, CD 的中点 E, F , 连接 PE, EF, PF . 则 $EF\perp CD, PF\perp CD$. 又 $EF\cap PF=F$, 所以 $CD\perp$ 平面 PEF . 因为 CDC 平面 $ABCD$, 所以平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$. 过点 P 作 $PO\perp EF$ 于 O . 由平面 $PEF\cap$ 平面 $ABCD=EF, PO\subset$ 平面 PEF , 得 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. 即 PO 为该四棱锥的高.

由题意可得, $PE=2\sqrt{3}, PF=2, EF=4$, 则 $PE^2+PF^2=EF^2$, 所以 $PE\perp PF$.

所以 $\triangle PEF$ 的面积为 $\frac{1}{2}PE\cdot PF=\frac{1}{2}EF\cdot PO$,

得 $PO=\frac{PE\cdot PF}{EF}=\frac{2\sqrt{3}\times 2}{4}=\sqrt{3}$. 故选D.

8.C

提示:用一个完全相同的五面体与该五面体相嵌, 如图所示, 可知组合体是一个三棱柱.

该三棱柱的与侧棱垂直的截面是边长为1的等边三角形, 且侧棱长为 $1+3=2+2=3+1=4$, 所以该五面体的体积 $V=\frac{1}{2}V_{\text{三棱柱}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 60^\circ\times 4=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选C.

二、多项选择题

9.BD

提示:连接 AB, CD . 因为 $\alpha\parallel\beta$, 平面 $PCD\cap$ 平面 $\alpha=AB$, 平面 $PCD\cap$ 平面 $\beta=CD$, 所以 $AB\parallel CD$.

当 P 在 α 与 β 的同侧时, 如图1, 可得 $\frac{PA}{AC}=\frac{PB}{BD}$, 即 $\frac{6}{9}=\frac{8-BD}{BD}$, 解得 $BD=\frac{24}{5}$;

当 P 在 α 与 β 之间时, 如图2, 可得 $\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PD}$, 即 $\frac{6}{3}=\frac{BD-8}{8}$, 解得 $BD=24$. 故选BD.

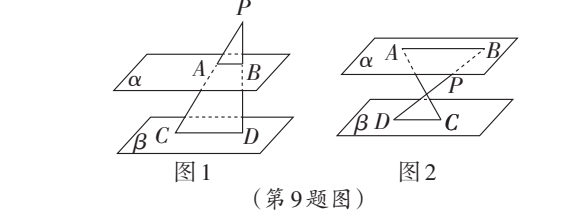


图1 (第9题图)

图2

10.ABC

提示:因为 $m\parallel\alpha, m\parallel\beta, \alpha\cap\beta=l$, 所以 $m\parallel l$, 又 $AB\parallel l$, 所以 $AB\parallel m$, 故A正确;

因为 $m\parallel l, AC\perp l$, 所以 $AC\perp m$, 故B正确;

因为 $A\in\alpha, AB\parallel l, l\subset\alpha$, 所以 $B\in\alpha, AB\not\subset\beta$. 又 $l\subset\beta$, 所以 $AB\parallel\beta$, 故C正确;

因为 $AC\perp l$, 当 $C\in\alpha$ 时, $AC\perp\beta$, 当 $C\notin\alpha$ 时, $AC\perp\beta$ 不成立, 故D错误. 故选ABC.

11.ACD

提示:由圆锥 SO 的侧面积为 3π , 得 $\pi rl=3\pi$, 即 $rl=3$. 对于A, 当 $r=1$ 时, $l=3, SC=1$, 圆锥的侧面展开图为图1所示的扇形,

在 $\triangle ASC$ 中, $SA=3, SC=1, \angle ASC=\frac{2\pi r}{l}=\frac{2\pi}{3}$, 则由余弦定理, 得 $AC=\sqrt{13}$, 故A正确;

对于B, 当 $r=\frac{3}{2}$ 时, $l=2$, 设轴截面等腰三角形的顶角为 θ , 由 $\cos\theta=\frac{2^2+2^2-3^2}{2\times 2\times 2}<0$, 得 θ 为钝角, 设 P, Q 是圆锥 SO 的底面圆周上任意的不同两点, 则 $0<\angle PSQ<\theta$,

则过顶点 S 和两母线的截面三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\angle PSQ<2$. 当且仅当 $\angle PSQ=90^\circ$ 时, 取等号, 故B错误;

对于C, 当 $l=3$ 时, $r=1$, 则 $SO=2\sqrt{2}$, 显然外接球球心 O_1 在直线 SO 上, 如图2,

设外接球半径为 R , 则 $(2\sqrt{2}-R)^2+1^2=R^2$, 解得 $R=\frac{9}{4\sqrt{2}}$, 所以外接球表面积为 $4\pi R^2=\frac{81\pi}{8}$, 故C正确;

对于D, 将棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的正四面体 $A_1-B_1C_1D_1$ 补形成正方体, 如图3,

则正方体的棱长为 $\frac{\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, 体对角线为 $\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$, 所以该正四面体的外接球半径 $R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

当 $l=3$ 时, $r=1$, 圆锥 SO 的内切球球心在线段 SO 上, 圆锥的轴截面内切圆所得大圆, 是圆锥轴截面等腰三角形内切圆, 设其半径为 r_1 , 轴截面等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times (3+3+2)\times r_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}$, 解得 $r_1=\frac{\sqrt{2}}{2}=R_1$, 所以棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的正四面体在圆锥 SO 内可以任意转动, 故D正确.

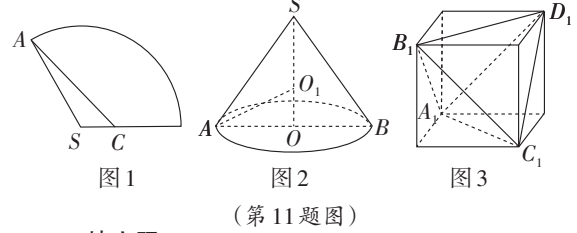


图1 (第11题图)

图2

图3

三、填空题

12. 两个平面 α, β 相交于过点 P 的一条直线

13. 30° 或 150°

提示:过点 A 作 $AC\perp l$ 于 $C, AD\perp\beta$ 于 D , 连接 CD , 可证得 $l\perp$ 平面 ACD . 则 $l\perp CD$. 所以 $\angle ACD$ 或其补角是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角. 在 $Rt\triangle ADC$ 中, $AD\perp CD, AC=4, AD=2$, 则 $\angle ACD=30^\circ$. 所以二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小是 30° 或 150° .

14. $3\sqrt{2}+2\sqrt{5};\sqrt{2}$

提示:取 CD 中点 G , 连接 BG, EG, CD_1 , 则 $GE\parallel CD_1, CD_1\parallel BA$, 所以 $GE\parallel BA$.

所以 G, E, A_1, B 四点共面, 即等腰梯形 A_1BGE 为截面四边形.

根据题意, 得 $A_1E=GB=\sqrt{5}, A_1B=2\sqrt{2}, EG=\sqrt{2}$, 所以截面梯形 A_1EGB 的周长为 $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

取 C, D_1 的中点 M, CC_1 的中点 N , 连接 B, M, B, N, MN, NE , 则 $NE\parallel A_1B_1, NE=A_1B_1$, 故四边形 A_1B_1NE 为平行四边形. 所以 $B_1N\parallel A_1E$. 又 $B_1N\subset$ 平面 $A_1BE, A_1E\subset$ 平面 A_1BE , 所以 $B_1N\parallel$ 平面 A_1BE .

因为<