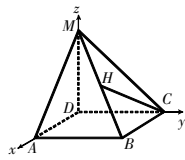


则 $C(0,1,0)$ ， $H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，所以 $\vec{CH} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。取平面 MCD 的一个法向量 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ ，

设 CH 与平面 MCD 所成角为 θ ，则 $\sin\theta = |\cos\langle \vec{CH}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\vec{CH} \cdot \mathbf{n}|}{|\vec{CH}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以 CH 与平面 MCD 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。



(第 16 题图 2)

17.解：(1)由 $a_5+a_6=10$ ，得 $a_5=5$ 。设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则 $a_5-a_4=4=4d$ ，所以 $d=1$ ，故 $a_n=n$ 。

(2)由(1)得 $c_n = \frac{1}{n(n+1)} + 2^n$ ，所以 $T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} = 2^{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} = 2^{n+1} - \frac{n+2}{n+1}$ 。

18.解：(1)圆 $E: x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$ ，令 $y=0$ ，解得 $x = \pm\sqrt{2}$ ，所以椭圆 C 的半焦距 $c = \sqrt{2}$ ， $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ ， $F_2(\sqrt{2}, 0)$ ，因为圆 E 的圆心 $E(0, \frac{1}{2})$ ，所以 $OE \parallel PF_2$ ， $|OE| = \frac{1}{2}|PF_2|$ ，

因为 $2a = |PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4$ ，所以 $a=2$ ，

因为 $a^2=b^2+c^2$ ，所以 $b = \sqrt{2}$ ，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

(2)设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，当 AB 斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y = kx + m$ ，

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 整理得 $(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 4 = 0$ ，

则 $x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1+2k^2}$ ， $x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 4}{1+2k^2}$ ，因为以线段 AB 为直径的圆经过坐标原点 O ，所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ ，即 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0$ ，整理得 $(1+k^2)x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0$ ，即 $(1+k^2) \cdot \frac{2m^2 - 4}{1+2k^2} + km \cdot \frac{-4km}{1+2k^2} + m^2 = 0$ ，化简得 $3m^2 = 4(1+k^2)$ ，

此时原点 O 到 AB 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{2}{3}$ ；

当 AB 斜率不存在时，易知 $|x_1| = |y_1|$ ， $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1$ ，解得 $|x_1| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，此时原点 O 到 AB 的距离 $d = |x_1| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 。

综上所述，存在以点 O 为圆心的定圆与直线 AB 相切，定圆的方程为 $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$ 。

19.解：(1)前4局A都不下场说明前4局A都获胜，故前4局A都不下场的概率为 $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ 。

(2) X 的所有可能取值为0, 1, 2, 3, 4，其中， $X=0$ 表示第1局B负，第4局是B上场，且B负，

则 $P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ； $X=1$ 表示第1局B负，第4局是B上场，且B胜；或第1局B

胜，且第2局B负，则 $P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ； $X=2$ 表示第1局B胜，且第2局B胜，第3局B负，则 $P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ；

$X=3$ 表示第1局B胜，且第2局B胜，第3局B胜，第4局B负，则 $P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ ；

$X=4$ 表示第1局B胜，且第2局B胜，第3局B胜，第4局B胜，则 $P(X=4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ 。

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

故 X 的数学期望为 $EX = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{19}{16}$ 。

高二选择性必修(第二册)答案页第 4 期

数学 北师大

第 13 期

第 2-3 版综合测试(五)参考答案

一、单项选择题

1.B 提示：向量 $a=(1,3,0)$ ， $b=(2,1,1)$ ，则 $a \cdot b=2+3+0=5$ ， $|b|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$ ，

故向量 a 在向量 b 上的投影向量 $c = \frac{a \cdot b}{|b|} \times \frac{b}{|b|} = \frac{5}{6}b = (\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$ ，故选 B。

2.C 提示：因为两直线 l_1 与 l_2 平行，所以 $\frac{1}{1} = \frac{n}{-2}$ ，解得 $n=-2$ ，又 $d = \frac{|m+3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ ，而 $m>0$ ，所以 $m=2$ ，所以 $m+n=0$ ，故选C。

3.B 提示：每名同学都有3种选法，故6名同学共有 3^6 种选法，故选B。

4.A 提示： $(x+y)^n(x-y)^n = (x-y)(x^2-y^2)^n$ ， $(x^2-y^2)^n$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = (-1)^r C_n^r x^{n-2r} y^{2r}$ ($r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)。

当 $r=3$ 时， $T_r = -10x^3 y^6$ ，所以 $x^3 y^6$ 的系数为 $-1 \times (-10) = 10$ ，故选A。

5.A 提示：冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气日影长构成等差数列 $\{a_n\}$ ，设其公差为 d ，则 $\begin{cases} a_1+a_9=28.5, \\ a_{10}+a_1+a_{12}=1.5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=10.5, \\ d=-1, \end{cases}$ 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=11.5-n$ ，所以 $a_7=11.5-7=4.5$ ，即所求的日影长为4.5尺，故选A。

6.B 提示：因为 OP 是 $\triangle PF_1 F_2$ 边 $F_1 F_2$ 的中线，所以 $\vec{PF}_1 + \vec{PF}_2 = 2\vec{PO}$ ，则 $2|\vec{PF}_1 + \vec{PF}_2| = 4|\vec{PO}|$ ，因为 $2|\vec{PF}_1 + \vec{PF}_2| \leq |\vec{F}_1 \vec{F}_2|$ ，所以 $4|\vec{PO}| \leq 2c$ 。又 $|\vec{PO}| \geq a$ ，所以 $4a \leq 2c$ ，所以 $\frac{c}{a} \geq 2$ ，即此双曲线的离心率 e 的取值范围是 $[2, +\infty)$ ，故选B。

7.B 提示：以 A 为原点，直线 AB, AD, AA_1 为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，不妨设正方体 $ABCD-A_1 B_1 C_1 D_1$ 的棱长为1，则 $A(0,0,1), B(1,0,0), D(0,1,0), E(\frac{1}{2}, 0, 1)$ ，所以 $\vec{AB} = (1, 0, -1), \vec{DE} = (\frac{1}{2}, -1, 1)$ 。设 A, B 与 DE 所成

的角为 θ ，则 $\cos\theta = |\cos\langle \vec{AB}, \vec{DE} \rangle| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{DE}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{DE}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ ，故 A, B 与 DE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ，故选B。

8.D 提示：函数 $f(x) = xe^x - mx + \frac{m}{2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点，等价于 $h(x) = xe^x$ 与 $g(x) = m(x - \frac{1}{2})$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点， $g(x)$ 恒过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，设 $g(x)$ 与 $h(x)$ 相切时切点为 (a, ae^a) ，因为 $h'(x) = e^x(x+1)$ ，所以切线斜率为 $e^a(a+1)$ ，则切线方程为 $y - ae^a = (a+1)e^a(x-a)$ ，当切线经过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 时，解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$ (舍去)，此时切线斜率为2e，由函数

图象特征可知，函数 $f(x) = xe^x - mx + \frac{m}{2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点，则实数 m 的取值范围是 $(2e, +\infty)$ ，故选D。

二、多项选择题

9.ABC 提示：化圆的方程为标准方程，得 $(x-2)^2 + y^2 = 5$ ，所以圆心为 $(2, 0)$ ，半径为 $\sqrt{5}$ 。对于A，圆是关于圆心对称的中心对称图形，而点 $(2, 0)$ 是圆心，故A正确；对于B，圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形，直线 $y=0$ 过圆心，故B正确；对于C，圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形，直线 $x+3y-2=0$ 过圆心，故C正确；对于D，圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形，而直线 $x-y+2=0$ 不过圆心，故D错误。故选ABC。

10.BCD 提示：对于A，A发生时B发生的概率是 $\frac{7}{11}$ ，A_1不发生时B发生的概率是 $\frac{6}{11}$ ，由事件的独立性概念知，事件

A_1与事件B不相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

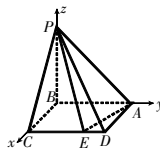
由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B相互独立，故A错误；对于B， $P(B|A_1) = \frac{P(A_1 B)}{P(A_1)}$ ，

$[0, 2]$ ，所以 $0 \leq r^2 \leq 1$ ，所以在所给的数据中， r 可以取①②③。

(2)由(1)知 $l = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，此时， $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{3}{2}$ ，即满足条件的点 E 有两个。

根据题意得，其坐标为 $E_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 和 $E_2(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ 。

因为 $PB \perp$ 底面 $ABCD$ ，所以 $PB \perp BE_1, PB \perp BE_2$ ，所以 $\angle E_1 B E_2$ 是二面角 $E_1 - PB - E_2$ 的平面角，由 $\cos\langle \vec{BE}_1, \vec{BE}_2 \rangle = \frac{\vec{BE}_1 \cdot \vec{BE}_2}{|\vec{BE}_1| |\vec{BE}_2|} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{1 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，由题意得，二面角 $E_1 - PB - E_2$ 为锐角，所以二面角 $E_1 - PB - E_2$ 的大小为 30° 。



(第 17 题图)

18.(1)解：由题意可得 $\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \\ 2a = 6, \end{cases}$ 解得 $a=3, b=2$ ，所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2)证明：由(1)可得 $A(0, 2), B(0, -2), C(3, 0)$ ，易知直线 AP 斜率存在，设直线 AP 的方程为 $y = kx + 2$ ，

由 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ 4x^2 + 9y^2 = 36, \end{cases}$ 整理可得 $(4+9k^2)x^2 + 36kx + 12 = 0$ ，可得 $x_1 = \frac{-36k}{4+9k^2}, y_1 = \frac{-36k^2 + 2}{4+9k^2} = \frac{8-18k^2}{4+9k^2}$ ，即 $P(\frac{-36k}{4+9k^2}, \frac{8-18k^2}{4+9k^2})$ ，

则 $Q(\frac{-36k}{4+9k^2}, \frac{18k^2-8}{4+9k^2})$ 。

直线 BC 的方程为 $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ，即 $y = \frac{2}{3}x - 2$ ，由 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ y = \frac{2}{3}x - 2, \end{cases}$ 得 $x_M = \frac{-4}{k - \frac{2}{3}}, y_M = \frac{-2k - \frac{4}{3}}{k - \frac{2}{3}}$ ，所以 $M(\frac{-4}{k - \frac{2}{3}}, \frac{-2k - \frac{4}{3}}{k - \frac{2}{3}})$ 。直线 AQ 的方程为 $y = \frac{4}{9k}x + 2$ ，由 $\begin{cases} y = \frac{4}{9k}x + 2, \\ y = \frac{2}{3}x - 2, \end{cases}$ 得 $x_N = \frac{-4}{\frac{4}{9k} - \frac{2}{3}}, y_N = \frac{-2k - \frac{4}{3}}{\frac{4}{9k} - \frac{2}{3}}$ ，所以 $N(\frac{-4}{\frac{4}{9k} - \frac{2}{3}}, \frac{-2k - \frac{4}{3}}{\frac{4}{9k} - \frac{2}{3}})$ ，即 $N(\frac{6k}{k - \frac{2}{3}}, \frac{2k + \frac{4}{3}}{k - \frac{2}{3}})$ ，

此时 $y_M + y_N = 0, x_M + x_N = 6$ ，所以 MN 的中点为 $(3, 0)$ ，又 AT 的中点 $(\frac{6}{2}, \frac{-2+2}{2})$ ，即 $(3, 0)$ ，所以 AT, MN 互相平分，则四边形 $ANTM$ 为平行四边形，所以 $|AM| = |TN|$ 。

19.解：(1) $f(x) = \frac{1}{x} - x + 3\ln x$ ($x>0$)，所以 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{3}{x} = \frac{-x^2 - 3x + 1}{x^2}$ ，

令 $f'(x) > 0$ ，得 $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ，令 $f'(x) < 0$ ，得 $0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ ，单调递减区间为 $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ ， $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ 。

(2)结论： $f(x_1) + f(x_2) \geq -\frac{1}{2}(a-2)^2$ 。证明如下：由 $f(x_1) + f(x_2) = (\frac{1}{x_1} - x_1 + a\ln x_1) + (\frac{1}{x_2} - x_2 + a\ln x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - (x_1 + x_2) + a\ln(x_1 x_2) = \frac{2}{x_1 x_2} - 2 + a\ln(x_1 x_2)$ 。

设 $t = x_1 x_2$ ，由 x_1, x_2 均为正数，得 $x_1 x_2 \leq (\frac{x_1 + x_2}{2})^2 = 1$ ，即 $0 < t \leq 1$ ，设 $g(t) = \frac{2}{t} - 2 + a\ln t$ ($0 < t \leq 1$)，则 $g'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{a}{t} = \frac{at-2}{t^2}$ 。

①当 $a \leq 2$ 时，由 $0 < t \leq 1$ ，得 $at-2 \leq 0$ ，即 $g'(t) \leq 0$ ，所以 $g(t)$ 单调递减，

所以 $g(t) \geq g(1) = 0$ ，又因为 $-\frac{1}{2}(a-2)^2 \leq 0$ ，所以 $f(x_1) + f(x_2) \geq -\frac{1}{2}(a-2)^2$ ；

②当 $a > 2$ 时， $g(t)$ 在 $(0, \frac{2}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{2}{a}, 1)$ 上单调递增，所以 $g(t)$ 的最小值为 $g(\frac{2}{a}) = a - 2 + a\ln \frac{2}{a}$ ，此时只需证 $a - 2 + a\ln \frac{2}{a} \geq -\frac{1}{2}(a-2)^2$ ，化简后即证 $\ln \frac{2}{a} + \frac{1}{2}a - 1 \geq 0$ 。

设 $h(a) = \ln \frac{2}{a} + \frac{1}{2}a - 1$ ($a > 2$)， $h'(a) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} > 0$ ，所以 $h(a)$ 单调递增，所以 $h(a) > h(2) = 0$ ，即证得 $\ln \frac{2}{a} + \frac{1}{2}a - 1 \geq 0$ 。

综上所述，不等式得证。

为函数 $f(x)$ 的周期，故A错误；因为 $f(x + \frac{\pi}{2}) + f(-x) = e^{\sin(x + \frac{\pi}{2})} - e^{\cos(x + \frac{\pi}{2})} - e^{\cos(-x)} = e^{\cos x} - e^{-\sin x} + e^{-\sin x} - e^{\cos x} = 0$ ，所以 $f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 对称，故B正确；因为函数 $f(x) = e^{\sin x} - e^{\cos x}$ ，则 $f'(x) = e^{\sin x} \cos x + e^{\cos x} \sin x$ ，

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $f'(x) > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增，故C错误；令 $f(x) = e^{\sin x} - e^{\cos x} = 0$ ，即 $e^{\sin x} = e^{\cos x}$ ，即 $\sin x = \cos x$ ，因为 $x \in (0, \pi)$ ，所以 $\tan x = 1$ ，所以 $x = \frac{\pi}{4}$ ，故方程在 $(0, \pi)$ 上只有一个根，所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内有且只有一个零点，故D正确。故选BD。

11.ACD 提示：对于A，由题意知， $a+c=3, a-c=1$ ，得 $a=2, c=1$ ，所以椭圆 C 的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，故A正确；

对于B， $\triangle PF_1 F_2$ 的周长为 $2a+2c=6$ ，故B错误；对于C，若 $\angle F_2 P F_1 = 90^\circ$ ，则 $|F_2 F_1|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2|$ ，

即 $(2c)^2 = (2a)^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2|$ ，故 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 6$ ，故 $S_{\triangle PF_1 F_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = 3$ ，故C正确；

对于D，由余弦定理，可得 $|F_1 F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos \angle F_2 P F_1 = (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2|(1 + \cos \angle F_2 P F_1)$ ，即 $4 = 16 - 2 \times 4(1 + \cos \angle F_2 P F_1)$ ，

解得 $\cos \angle F_2 P F_1 = \frac{1}{2}$ ，故 $\angle F_2 P F_1 = 60^\circ$ ，故D正确。故选ACD。

三、填空题

12.8.6 提示：由题意知， $\bar{X} = \frac{2+4+5+6+8}{5} = 5$ ， $\bar{Y} = \frac{3+4.5+8.5+7.5+9}{5} = 6.5$ ，

因为 Y 关于 X 的线性回归方程为 $Y = 1.05X + a$ ，所以 $6.5 = 1.05 \times 5 + a$ ，解得 $a = 1.25$ ，

所以 Y 关于 X 的线性回归方程为 $Y = 1.05X + 1.25$ ，当 $X=7$ 时，维护费用约为 $Y = 1.05 \times 7 + 1.25 = 8.6$ (千元)。

13. $-\frac{1}{506}$ 提示：由等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5 a_4 + 2a_4 a_6 + a_5 a_{12} = 2024d$ ，可得 $a_4(a_5 - d) + 2a_4(a_5 + 2d) + (a_5 + d)(a_5 + 8d) = 2024d$ ，即 $4a_4^2 + 12a_4 d + 8d^2 = 2024d$ ，所以 $4(a_4 + 2d)(a_5 + d) = 2024d$ ，即 $4a_4 a_5 = 2024d$ ，故 $a_4 a_5 = 506d$ ，所以 $\frac{1}{a_6} - \frac{1}{a_5} = \frac{a_5 - a_6}{a_4 a_5} = \frac{-d}{506d} = -\frac{1}{506}$ 。

14. $[1, +\infty)$ 提示：因为 $f(x) = xe^x - \ln x - x$ ($x>0$)，所以 $f'(x) = e^x + xe^x - \frac{1}{x} - 1 = (x+1)(e^x - \frac{1}{x})$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，得 $e^x = \frac{1}{x}$ ，设 $e^x = \frac{1}{x_1}$ ， $x_1 \in (0, 1)$ ，所以 $x_1 e^{x_1} = 1$ ，即 $\ln x_1 + x_1 = 0$ ，

一、单项选择题

1.B 提示:由双曲线方程可知 $a^2=3, b^2=2$,所以渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$,故选B.

2.D 提示:因为等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{11}+7=2a_{12}$,所以 $a_{11}+10d+7=2(a_{11}+11d)$,即 $a_1+12d=7$,即 $a_{13}=7$,所以 $S_{25}=\frac{25(a_1+a_{25})}{2}=25a_{13}=25\times7=175$,故选D.

3.A 提示:因为随机变量 X 服从正态分布 $X\sim N(10, \sigma^2)$,所以 $P(X>10)=P(X\leq 10)=\frac{1}{2}$,且 $P(8\leq X\leq 10)=P(10<X\leq 12)$,故 $P(10<X\leq 12)=n$,所以 $P(X>10)=P(10<X\leq 12)+P(X>12)=m+n=\frac{1}{2}$,故选A.

4.A 提示:若直线 $l:y=kx+1$ 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交于 A, B 两点,则圆心到直线距离 $d=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, $|AB|=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{1+k^2}}=2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}$.

若 $k=1$,则 $|AB|=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $d=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$,即充分性成立.

若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$,则 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\times2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}=\frac{|k|}{1+k^2}=\frac{1}{2}$,即 $k^2+1=2|k|$,即 $k^2-2|k|+1=0$,则 $(|k|-1)^2=0$,即 $|k|=1$,解得 $k=\pm 1$,即必要性不成立.故“ $k=1$ ”是“ $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件.故选A.

5.C 提示: $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos x$.当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时, $f(x)$ 单调递减;当 $x\in(0,\pi)$ 时, $f(x)$ 单调递增;当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时, $f(x)$ 单调递减,当 $x=\pi$ 时, $f(x)$ 取得极大值,所以C项成立,故选C.

6.B 提示:设 $|AB|=2r$,由题意知 $r\geq 2$,设 AB 中点为 M ,作 $MN\perp y$ 轴于点 N ,过 A, B 作准线的垂线,垂足分别为 P, Q .由抛物线定义及梯形中位线性质,知 $2(|MN|+1)=|AP|+|BQ|=|AF|+|BF|=|AB|=2r$,于是 $|MN|=r-1$,由垂径定理,得 $|DE|=2\sqrt{r^2-(r-1)^2}=\frac{8}{5}r$,即 $16r^2-50r+25=0$,解得 $r=\frac{5}{2}$ 或 $r=\frac{5}{8}$,又 $r\geq 2$,故 $r=\frac{5}{2}$,于是 M 横坐标为 $\frac{3}{2}$,设直线 $l:y=k\cdot(x-1)$,与 $y^2=4x$ 联立,得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,则 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=2x_0=3$,解得 $k=\pm 2$,故直线 l 方程为 $2x\pm y-2=0$.故选B.

7.B 提示:取 AC 的中点 D ,以 D 为原点, BD, DC, DM 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴,建立空间直角坐标系,不妨设 $AC=2, N$ 为 BC 的中点,连接 AN ,则 $A(0,-1,0), M(0,0,2), B(-\sqrt{3},0,0), C(0,1,0), N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,所以 $\overrightarrow{AM}=(0,1,2), \overrightarrow{AN}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.由直棱柱的性质,知 $C_1C\perp$ 平面 ABC ,所以 $C_1C\perp AN$.又由等边三角形的性质,知 $AN\perp BC$.因为 $C_1C\cap BC=C$,所以 $AN\perp$ 平面 BCC_1B_1 ,所以 \overrightarrow{AN} 为平面 BCC_1B_1 的一个法向量.设 AM 与平面 BCC_1B_1 所成角为 α ,所以 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{10}$,即 AM 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$,故选B.

8.D 提示:因为有95%以上的把握认为“支持增加中学生体育锻炼时间的政策与性别有关”,所以 $\frac{160\times[(70-m)(30-m)-(10+m)(50+m)]^2}{80\times80\times120\times40}\geq 3841$,化简得 $(m-10)^2\geq 28.8075$.因为函数 $y=(m-10)^2$ 在 $m\in[10,20]$ 上单调递增,且 $m\in\mathbf{N}_+$, $(15-10)^2<28.8075,(16-10)^2\geq 28.8075$,所以 m 的最小值为16,即在这被调查的80名女生中支持增加中学生体育锻炼时间的人数的最小值为50+16=66.故选D.

二、多项选择题

9.ABD 提示:对于A,因为 $a_1a_2a_3a_4a_5=a_1^5$,所以 $a_4=1$,故A正确;对于B,因为 $a_1a_2=a_1a_3a_4a_5$,所以 $T_2=T_5$,故B正确;对于C, $T_7=a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7=a_1^7$,故C错误;对于D,若 $a_1=1$,则 $q^n=\frac{a_n}{a_1}=1$,解得 $q=1$,所以 $a_2=a_1q=1$,故D正确.故选ABD.

10.AB 提示:对于A,若A展馆需要3种花卉,则有 $C_3^2=4$ 种安排方法,故A正确;

对于B,共有 $C_1^1+C_2^1+C_3^1=4+6+4=14$ 种安排方法,故B正确;

对于C,若“绿水晶”去A展馆,则有 $C_2^1+C_3^1+C_1^1=1+3+3=7$ 种安排方法,故C错误;

对于D,若2种三角梅不能去往同一个展馆,则有 $A_3^2\times 2=8$ 种安排方法,故D错误.故选AB.

11.AD 提示:双曲线 C_1 的一条渐近线的方程为 $y=\sqrt{3}x$,则设双曲线 C_1 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=\lambda(\lambda\neq 0)$.由双曲线 C_1 过点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$,得 $1-\frac{3}{4}=\lambda$,得 $\lambda=-\frac{1}{4}$,所以双曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$,所以双曲线 C_1 的离心率 $e=2$,实轴的长为 $\frac{2}{4}$.

1,故A正确,B错误;又易知椭圆 C_2 的两焦点为 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$,将 $A(1,y_1)(y_1>0)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,得 $\frac{1}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,所以 $y_1=\frac{b^2}{a}$,所以直线 AB 的方程为 $y=\frac{b^2}{2a}(x+1)$,联立

$\begin{cases} y=\frac{b^2}{2a}(x+1), \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 整理得 $(a^2+3)x^2+2(a^2-1)x-3a^2-1=0$,所以 $1\cdot x_0=-\frac{3a^2+1}{a^2+3}$,则 $x_0=-\frac{3a^2+1}{a^2+3}=-3+\frac{8}{a^2+3}$.由 $a^2>1$,得 $a^2+3>4$,则 $0<\frac{8}{a^2+3}<2$,所以 $-3<x_0<-1$,故C错误,D正确.故选AD.

三、填空题

12.21 提示:由题意知, $x^2=[(x-1)+1]^2=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_5(x-1)^5$.

根据二项式 $[(x-1)+1]^7$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_7^r\cdot(x-1)^{7-r}(r=0,1,2,3,4,5,6,7)$,令 $r=2$,故 $a_3=C_7^2=21$.

13. $\frac{65}{2}$ 提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,则 $a_1+d=4, a_1+5d=16$,解得 $a_1=1, d=3$,设在数列 $\{a_n\}$ 每相邻两项之间插入三个数所得新数列为 $\{b_n\}$,则新的等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $\frac{d}{4}=\frac{3}{4}$,首项为 $b_1=a_1=1$,所以新数列的通项公式为 $b_n=1+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}$,故 $b_{48}=\frac{3}{4}\times43+\frac{1}{4}=\frac{65}{2}$.

14. $[-1,2]$ 提示:因为 $g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)$,所以 $g(-2)=-\frac{a}{e}$.由 $g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)=0$,得 $a=\frac{x-2}{x+2}e^x=f(x)$,函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq-2\}$,当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时, $f(x)>0$,当 $-2<x\leq 2$ 时, $f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)e^x-(x-2)e^x}{(x+2)^2}=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\geq 0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-2,2]$ 上单调递增.又因为

$f(-1)=-\frac{3}{e}, f(2)=0$,由 $-\frac{3}{e}\leq a\leq 0$,即 $-\frac{3}{e}\leq f(x)\leq 0$,即 $f(-1)\leq f(x)\leq f(2)$,解得 $-1\leq x\leq 2$,所以,若 $a\in\left[-\frac{3}{e},0\right]$,则函数 $g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)$ 零点的取值范围是 $[-1,2]$.

四、解答题

15.解:(1)选条件①时,由 $na_{n+1}=(n+1)a_n$,得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$,所以 $a_n=n$.

选条件②时,由 $S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$,得 $2S_n=(n+1)a_n$,当 $n\geq 2$ 时, $2S_{n-1}=na_{n-1}$,两式相减,得 $2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$,即 $(n-1)a_n=na_{n-1}$,整理得 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\frac{a_1}{1}=1$,所以 $a_n=n$.

选条件③时,由于 $a_n^2+a_n=2S_n$,当 $n\geq 2$ 时, $a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}$.

两式相减,得 $a_n^2-a_{n-1}^2=a_n+a_{n-1}$.因为 $\{a_n\}$ 为正项数列,所以 $a_n-a_{n-1}=1$,所以数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项,1为公差的等差数列,所以 $a_n=n$.

(2)由(1),得 $b_n=-n\cdot 2^n$.设 $c_n=n\cdot 2^n$,其前 n 项和为 C_n ,所以 $C_n=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$,两式相减,得 $-C_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2\times(1-2^{n+1})}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}$,故 $C_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$,所以 $T_n=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$.

16.解:(1)由频率之和为1,得 $(0.004+a+0.018+0.022+0.022+0.028)\times 10=1$,解得 $a=0.006$, $[80,90]$ 这组的频率为 $0.022\times 10=0.22$, $[90,100]$ 这组的频率为 $0.018\times 10=0.18$, $0.18<1-80\%, 0.18+0.22>1-80\%$,故80%分位数在 $[80,90)$ 组,设80%分位数为 x ,

则 $0.022\times(90-x)+0.18=1-80\%$,解得 $x\approx 89.09$,故80%分位数为89.09.

(2)①任抽一份问卷,是来自甲社区业主的问卷记作事件A,问卷评分不足60分记作事件B,由题意知, $P(A)=0.75, P(\bar{A})=0.25, P(B|A)=0.06, P(B|\bar{A})=0.10$,

所以 $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.75\times 0.06=0.045$,

$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.25\times 0.10=0.025$,

所以 $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=0.045+0.025=0.07$.

所以在所有评分不足60分的调查问卷中随机抽取一份,估计这份问卷恰来自甲社区业主的概率为

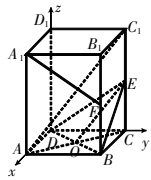
$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.045}{0.07}=\frac{9}{14}$;

②70份评分不足60分的调查问卷中来自甲社区业主

的问卷份数 $X\sim B\left(70,\frac{9}{14}\right)$,

所以 $EX=70\times\frac{9}{14}=45$.

17.(1)证明:连接 AC 与 BD 交于点 O ,连接 OE ,如图,



(第 17 题图)

因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱,所以四边形 $ABCD$ 是正方形.所以 O 为 AC 的中点,又因为 E 为 CC_1 的中点,所以 $AC_1\parallel OE$,又 $AC_1\not\subset$ 平面 $BDE, OE\subset$ 平面 BDE ,所以 $AC_1\parallel$ 平面 BDE .

(2)解:以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A_1(1,0,2), F(1,1,1), B(1,1,0), D(0,0,0), E(0,1,1)$,所以 $\overrightarrow{AF}=(0,1,-1), \overrightarrow{BD}=(-1,-1,0), \overrightarrow{BE}=(-1,0,1)$,设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x-y=0, \\ -x+z=0, \end{cases}$

令 $x=1$,得 $y=-1, z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$,设直线 AF 与平面 BDE 所成的角为 θ ,

则直线 AF 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

18.(1)证明:设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), P(x_0,y_0)$,由题意知, $F_1(-2,0), F_2(2,0)$,则 $k_1=\frac{y_0}{x_0+2}, k_2=\frac{y_0}{x_0-2}$.因为点 P 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 上异于顶点的任意一点,所以 $x_0^2-y_0^2=4$,所以 $k_1k_2=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}$,即 $k_1\cdot k_2=1$.

(2)解:由直线 PF_1 的方程为 $y=k_1(x+2)$,代入椭圆 C 的方程 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$,可得 $(1+2k_1^2)x^2+8k_1^2\cdot x+8\cdot k_1^2-8=0$,所以 $x_1+x_2=-\frac{8k_1^2}{2k_1^2+1}, x_1x_2=\frac{8k_1^2-8}{2k_1^2+1}$,所以 $|AB|=\sqrt{1+4k_1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{k_1^2+1}{2k_1^2+1}}$.同理可得 $|CD|=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{k_2^2+1}{2k_2^2+1}}$,因为 $k_1\cdot k_2=1$,所以 $|CD|=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{k_1^2+1}{k_1^2+2}}$,即存在常数 $\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{8}$,使得 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$ 恒成立.

19.(1)解:当 $k=1$ 时, $f(x)=x^2-\ln x, f(1)=\frac{1}{2}, f'(x)=x-\frac{1}{x}$,所以 $f'(1)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-\frac{1}{2}=0$.

(2)证明:当 $k>0$ 时, $f(x)+\frac{3}{2}k^2-2k\geq 0$,即 $\frac{x^2}{2}+(1-k)x-k\ln x+\frac{3}{2}k^2-2k\geq 0$,令 $g(x)=\frac{x^2}{2}+(1-k)x-k\ln x+\frac{3}{2}k^2-2k, x\in(0,+\infty), k>0$,则 $g'(x)=x+(1-k)-\frac{k}{x}=\frac{(x-k)(x+1)}{x}$,当 $k>0$ 时, $x\in(0,k), g'(x)<0$,此时函数 $g(x)$ 单调递减; $x\in(k,+\infty), g'(x)>0$,此时函数 $g(x)$ 单调递增.当 $x=k$ 时,函数 $g(x)$ 取得极小值,也是最小值,所以只要证明 $g(k)=k^2-k-k\ln k\geq 0$,即证明 $k-1-\ln k\geq 0(k>0)$ 即可.

令 $h(k)=k-1-\ln k, k\in(0,+\infty)$,则 $h'(k)=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$,由 $h'(k)<0$,得 $0<k<1$;由 $h'(k)>0$,得 $k>1$,所以 $k\in(0,1)$ 时, $h(k)$ 单调递减; $k\in(1,+\infty)$ 时, $h(k)$ 单调递增.

所以 $h(k)=k-1-\ln k\geq 0(k>0)$ 即可.

9.BC 提示:由等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d<0$,得 $\{a_n\}$ 是单调递减数列,又 $|a_1|=|a_5|$,则 $a_3>0, a_5<0$,即 $a_4=-a_6$,所以 $a_3+a_6=2a_6=0$,所以数列 $\{a_n\}$ 的前5项或前6项和最大.故选BC.

一、单项选择题

1.A 提示:因为 $\boldsymbol{a}=(1,2,3), \boldsymbol{b}=(-1,0,-2)$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,2,1), (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0\times(-1)+2\times 0+1\times(-2)=-2$.故选A.

2.D 提示: $f'(x)=1+2e^x$,所以 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 $k=f'(0)=3$,又 $f(0)=1$,所以 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y-1=3(x-0)$,即 $y=3x+1$.故选D.

3.B 提示:由抛物线的方程可得准线的方程为 $y=-\frac{p}{2}$,设 P 的纵坐标为 n ,由抛物线的性质,则 $n+\frac{p}{2}-n=1$,解得 $p=2$,故选B.

4.C 提示:设学校为 A, B, C ,先把甲乙两人安排到不同学校,有 $A_3^2=6$ 种,不妨设甲在 $A, \boldsymbol{乙}$ 在 B ,只需剩余3人至少有1人去 C 即可,利用间接法计算,有 $3^3-2^3=19$ 种不同安排方法,

根据分步乘法计数原理,可知共有 $6\times 19=114$ 种不同安排方法.故选C.

5.C 提示:过 E 作 $EO\perp$ 平面 $ABCD$,垂足为 O ,过 E 分别作 $EG\perp BC, EM\perp AB$,垂足分别为 G, M ,连接 OG, OM .

则等腰梯形所在的面、等腰三角形所在的面与底面夹角分别为 $\angle EMO$ 和 $\angle EGO$,所以 $\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\frac{\sqrt{14}}{5}$.

因为 $EO\perp$ 平面 $ABCD, BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $EO\perp BC$,因为 $EG\perp BC, EO, EG\subset$ 平面 $EOG, EO\cap EG=E$,所以 $BC\perp$ 平面 EOG ,因为 $OG\subset$ 平面 EOG ,所以 $BC\perp OG$,同理, $OM\perp BM$,又 $BM\perp BG$,故四边形 $OMBG$ 是矩形,所以由 $BC=10$,得 $BG=OM=5$,所以 $EO=\sqrt{14}$,所以 $OG=5$,

所以在 $\text{Rt}\triangle EOG$ 中, $EG=\sqrt{EO^2+OG^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2+5^2}=5\sqrt{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle EBG$ 中, $EB=\sqrt{EG^2+BG^2}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+5^2}=8$,又因为 $EF=AB-2OG=25-2\times 5=15$,所以所有棱长之和为 $2\times 25+2\times 10+15\times 4=8+117\text{m}$.故选C.

6.D 提示:记事件 A_1 为“买到的洗衣机是甲厂产品”,事件 A_2 为“买到的洗衣机是乙厂产品”,事件 B 为“买到的洗衣机是合格品”,则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.8\times 0.9+0.2\times 0.8=0.88$,即从该地市场上买到一台合格洗衣机的概率是0.88.故选D.

7.B 提示:在等比数列 $\{a_n\}$ 中,由 $a_1>1, a_4a_7>1$,得 $a_4a_7>1$,所以 $q>0, a_n>0$.

若 $q\geq 1$,则 $a_1>1, a_2>1$,此时 $\frac{a_n-1}{a_n-1}>0$,与已知条件 $\frac{a_n-1}{a_n-1}<0$ 矛盾,因此 $0<q<1$,故B正确,C错误;显然数列 $\{a_n\}$ 是递减数列,由 $\frac{a_n-1}{a_n-1}<0$,得 $0<a_n<1$,则 $a_na_6=a_3^2$,故A错误;由于 $\frac{T_m}{T_n}=a_m$,当 $n\in\mathbf{N}_+, n\leq 5$ 时, $a_m>1$,而 $T_n>0$,则 $T_m>T_n$,当 $n\geq 6$ 时, $a_m<1$,则 $T_m<T_n$,因此当 $n\leq 6$ 时, T_n 逐渐增大,当 $n\geq 6$ 时, T_n 逐渐减小,所以 T_n 的最大值为 T_6 ,故D错误.故选B.

8.B 提示:函数 $g(x)$ 的导数 $g'(x)=3x^2-2x=3x(2-x)$,所以函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ 上单调递减,在 $\left[\frac{2}{3},2\right]$ 上单调递增, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-5=-\frac{41}{8}, g(2)=8-4-5=-1$,则 $g(x)_{\min}=-1$,

若对任意 $x_1, x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,都有 $f(x_1)-g(x_2)\geq 2$ 成立,即当 $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$ 时, $f(x)\geq 1$ 恒成立,即 $\frac{a}{x}+x\ln x\geq 1$ 恒成立,即

$a\geq x-x^2\ln x$ 在 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上恒成立.

令 $h(x)=x-x^2\ln x$,则 $h'(x)=1-2x\ln x-x, h''(x)=-3-2\ln x$,当 $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$ 时, $h''(x)=-3-2\ln x<0$,即 $h'(x)=1-2x\ln x-x$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递减,

由于 $h'(1)=0$,则当 $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ 时, $h'(x)>0$;当 $1\leq x\leq 2$ 时, $h'(x)<0$,所以 $h(x)\leq h(1)=1$,所以 $a\geq 1$.故选B.

二、多项选择题

9.BC 提示:由等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d<0$,得 $\{a_n\}$ 是单调递减数列,又 $|a_1|=|a_5|$,则 $a_3>0, a_5<0$,即 $a_4=-a_6$,所以 $a_3+a_6=2a_6=0$,所以数列 $\{a_n\}$ 的前5项或前6项和最大.故选BC.

10.AB 提示:因为 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$,故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{2OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,所以 $OA\perp OB$,由题意知,圆心 $(0,0)$ 到直线 $x+y=a$ 的距离 $d=\frac{|a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}</$