

## 高二选择性必修(第二册)答案页第3期

## 数学

## 人教A

扫码免费下载  
习题讲解 ppt

## 第9期

## 第2-3版综合测试(一)参考答案

## 一、单项选择题

1.C 提示:因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,则 $a_4a_8=a_6^2=8$ ,即 $a_6=2$ ,所以 $a_4a_8=a_6^2=4$ .故选C.2.B 提示:因为 $f(x)=\sqrt{x}$ ,所以 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .故选B.3.C 提示:设等差数列的公差为 $d$ ,则 $\begin{cases} a_3=a_1+2d=4, \\ S_3=3a_1+3d=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=0, \\ d=2, \end{cases}$ 所以 $S_{12}=12a_1+\frac{12 \times (12-1)}{2}d=132$ .故选C.4.C 提示:因为 $f(x)=2f(-x)+e^x$ ,所以 $f(-x)=2f(x)+e^{-x}$ ,联立可解得 $f(x)=-\frac{2e^{-x}+e^x}{3}$ ,所以 $f'(x)=\frac{2e^{-x}-e^x}{3}$ ,所以所求切线斜率为 $f'(0)=\frac{1}{3}$ .5.D 提示:由题意可设善走男第 $n$ 天走的路程为 $a_n$ ,则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,公差为 $d$ , $a_1=100$ ,所以 $9a_1+\frac{9 \times 8}{2} \cdot d=1\ 260$ ,所以 $a_1+4d=140$ ,所以该善走男第5日所走的路程里数为 $a_5=a_1+4d=140$ .故选D.6.B 提示:因为 $f(x)=2\sin x+\cos x-\sqrt{5}x$ ,所以 $f'(x)=2\cos x-\sin x-\sqrt{5}=\sqrt{5}\cos(x+\varphi)-\sqrt{5}\leq 0$ ,其中 $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .因此 $f(x)=2\sin x+\cos x-\sqrt{5}x$ 为减函数,因为 $0<\lg 2<1$ , $(-1)^0=1$ , $\lg 3>1$ ,所以 $\lg 2<(-1)^0<\ln 3$ ,所以 $f(\lg 2)>f(-1^0)>f(\lg 3)$ ,所以 $a>c>b$ .故选B.7.A 提示:取 $m=1$ ,得 $a_{n+1}=a_n \cdot a_1$ ,即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_1$ ,所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1$ 为首项, $a_1$ 为公比的等比数列,所以 $a_n=a_1 \cdot a_1^{n-1}=a_1^n$ .取 $m=n=1$ ,得 $a_2=a_1^2=4$ ,所以 $a_1=\pm 2$ .因为 $T_n=a_1a_2 \cdots a_n=a_1^{1+2+3+\cdots+n}=\frac{n(n+1)}{2}$ ,所以 $T_5=a_1^{15}$ , $T_4=a_1^{10}$ .因为 $T_5<T_4$ ,所以 $a_1=-2$ ,所以 $T_{101}=(-2)^{\frac{101 \times 102}{2}}=-2^{5151}$ .8.C 提示:由函数 $f(x)=(x-1)^2(x-a)$ ,可得 $f'(x)=(x-1)(3x-2a-1)$ .令 $f'(x)=0$ ,可得 $x=1$ 或 $x=\frac{2a+1}{3}$ ,因为 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值点,则满足 $\frac{2a+1}{3}>1$ ,解得 $a>1$ ,所以实数 $a$ 的取值范围为 $(1,+\infty)$ .故选C.

## 二、多项选择题

9.BC 提示:根据题意,设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$ ,因为 $S_3=a_1(1+q+q^2)>0$ ,又 $1+q+q^2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ ,所以 $a_1>0$ .又 $S_4>0$ ,即 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1(1+q+q^2+q^3)=a_1(1+q)(1+q^2)>0$ ,所以 $q>-1$ .对于A, $a_5=a_1q$ ,由于 $q$ 正负不定,故无法确定 $a_5$ 与0的大小,故A错误;对于B, $a_5=a_1q^2>0$ ,故B正确;对于C, $S_5=S_4+a_5q^4>0$ ,故C正确;对于D,因为 $S_8-S_6=a_7q^6(1+q)>0$ ,所以 $S_8>S_6$ ,故D错误.故选BC.10.AC 提示:对于A,因为 $S_{12}>0$ ,所以 $S_{12}=\frac{(a_1+a_{12}) \times 12}{2}=\frac{(a_6+a_{13}) \times 12}{2}=6(a_6+a_7)>0$ ,又 $a_7<0$ ,所以 $a_6>0$ ,故A正确;对于B,结合选项A知, $a_6>0$ , $a_7<0$ , $a_6+a_7>0$ ,又 $a_7=12$ ,所以 $\begin{cases} a_6=12+3d>0, \\ a_7=12+4d<0, \end{cases}$ 又 $a_7=12$ ,所以 $\begin{cases} a_6=12+3d>0, \\ a_6+a_7=24+7d>0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{24}{7}<d<-3$ ,故B错误;对于C, $S_{15}=\frac{(a_1+a_{15}) \times 15}{2}=13a_7<0$ ,又结合选项A知, $S_{12}>0$ ,所以 $S_n<0$ 时, $n$ 的最小值为13,故C正确;对于D,结合选项A和B知,当 $1 \leq n \leq 6$ 时, $a_n>0$ ,当 $n \geq 7$ 时, $a_n<0$ ,所以当 $S_n$ 最大时, $n=6$ ,故D错误.故选AC.11.ACD 提示:对于A,若 $f(x)$ 为奇函数,则 $a=0$ , $f(x)=x^3+bx$ , $f'(x)=3x^2+b$ ,因为 $f'(-x)=3(-x)^2+b=3x^2+b=f'(x)$ ,所以 $f'(x)$ 为偶函数,故A正确;对于B,若 $a=0$ ,不妨取 $b=-1$ ,则 $f(x)=x^3-x=0$ ,解得 $x=$ 又 $a_{1013}>0$ ,所以 $0<\frac{a_{1013}}{a_{1012}}<1$ ,又 $a_1>0$ , $\{a_n\}$ 为正项等比数列,设公比为 $q$ ,则 $0<q<1$ ,所以 $\{a_n\}$ 为递减数列,且 $T_{1012}$ 最大,故A,C正确,B错误;因为 $\frac{T_{n+2}}{T_n}=a_{n+1}a_{n+2}$ , $\{a_n\}$ 的公比为 $q$ ,所以 $\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{a_{n+2}a_{n+3}}{a_{n+1}a_{n+2}}=q^2$ ,即 $\left\{\frac{T_{n+2}}{T_n}\right\}$ 为等比数列,故D

正确.故选ACD.

11.BC 提示:对于A,由题意知,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ,且 $f'(x)=\ln x+1+a$ ,则 $\begin{cases} f(1)=a+1+b, \\ f'(1)=1+a+1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=0, \\ b=-1, \end{cases}$ 所以 $a+b=-1$ ,故A错误;对于C,因为 $f(x)=x \ln x$ , $f'(x)=\ln x+1$ ,令 $f'(x)<0$ ,解得 $0<x<\frac{1}{e}$ ,令 $f'(x)>0$ ,解得 $x>\frac{1}{e}$ ,可知 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 内单调递减,在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增,则 $\frac{1}{e}$ 为 $f(x)$ 的极小值点,

故C正确;

对于B,若 $x \in \left[\frac{1}{4}, e\right]$ ,则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{e}\right]$ 上单调递减,在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上单调递增,可知 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ ,且 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4} \ln \frac{1}{4}<0$ , $f(e)=e>f\left(\frac{1}{4}\right)$ ,即 $f(x)$ 的最大值为 $f(e)=e$ ,所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4}, e\right]$ 上的最大值和最小值之和为 $e-\frac{1}{e}$ ,故B正确;对于D,令 $f(x)=x \ln x=e$ ,整理得 $\ln x=-\frac{e}{x}$ ,令 $g(x)=\ln x-\frac{e}{x}$ , $x>0$ ,因为函数 $y=\ln x$ 与 $y=-\frac{e}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $g(e)=0$ ,所以 $g(x)$ 有且仅有一个零点 $e$ ,即方程 $f(x)=e$ 有且仅有一个根 $e$ ,故D错误.故选BC.

## 三、填空题

12.-1 提示:因为 $y=ax \cos x$ ,所以 $y'=a \cos x-ax \sin x$ ,由曲线 $y=ax \cos x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线斜率为-1,即 $x=0$ 时, $k=y'=a \cos 0-0=-1$ ,解得 $a=-1$ .13.-21 提示:因为 $S_8=17S_4$ ,显然 $q \neq 1$ ,则 $\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$ ,化简得 $1+q^4=17$ ,解得 $q^4=16$ ,则 $q=\pm 2$ . $S_2=-1=a_1+a_1q$ ,当 $q=2$ 时, $a_1=-\frac{1}{3}$ , $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{-\frac{1}{3} \times (1-64)}{-1}=-21$ ;当 $q=-2$ 时, $a_1=1$ , $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{1 \times (1-64)}{3}=-21$ .14.6;4.7 提示:①因为当销售价格为5元/套时,每日可售出30套,所以 $30=\frac{m}{5-3}+3 \times (5-8)^2$ ,解得 $m=6$ .②由(1)知 $y=\frac{6}{x-3}+3(x-8)^2$ ,设利润函数 $f(x)=(x-3)\left[\frac{6}{x-3}+3(x-8)^2\right]=3(x-3)(x-8)^2+6$ ,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3,8)$ ,可得 $f'(x)=(x-8)(9x-42)$ .当 $3<x<\frac{14}{3}$ 时, $f'(x)>0$ , $f(x)$ 单调递增;当 $\frac{14}{3}<x<8$ 时, $f'(x)<0$ , $f(x)$ 单调递减.所以当 $x=\frac{14}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最大值,此时 $x=\frac{14}{3} \approx 4.7$ .则当销售价格 $x=4.7$ 元/套时,日销售该商品所获得的利润最大.

## 四、解答题

15.解:(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ ,则 $\begin{cases} a_5=a_1+4d=6, \\ S_3+a_3=4a_1+5d=13, \end{cases}$ 解得 $a_1=2$ , $d=1$ ,故 $a_n=a_1+(n-1)d=n+1$ .(2)由(1)可得 $b_n=(-1)^n \cdot \frac{2n+3}{a_n a_{n+1}}=(-1)^n \cdot \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=$  $(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$ ,则 $T_4=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$ .16.解:(1)选择①②,设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ ,因为 $a_8=9$ , $S_5=5a_3=20$ ,所以 $a_8=9$ , $a_3=4$ ,则 $5d=a_8-a_3=5$ ,即 $d=1$ ,则 $a_n=4+(n-3) \times 1=n+1$ .选择①③,已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,设公差为 $d$ ,因为 $a_8=9$ , $a_2+a_6=13$ ,所以 $a_8-6d+a_2+d=13$ ,则 $5d=5$ ,即 $d=1$ ,则 $a_n=9+(n-8) \times 1=n+1$ .选择②③,已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,设公差为 $d$ ,因为 $S_5=20$ , $a_2+a_6=13$ ,所以 $a_5=4$ , $a_3-d+a_3+6d=13$ ,则 $5d=5$ ,即 $d=1$ ,则 $a_n=4+(n-3) \times 1=n+1$ .(2)由(1)可得 $b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ ,则 $T_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$ .17.解:(1) $f(x)$ 为奇函数,证明如下:由 $\frac{1-x}{1+x}>0$ ,解得 $-1< x < 1$ ,则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$ ,而 $f(-x)=\log_2 \frac{1+x}{1-x}=-\log_2 \frac{1-x}{1+x}=-f(x)$ ,故 $f(x)$ 为奇函数.(2)由 $m=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$ 在 $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ 上单调递减,而 $y=\log_2 m$ 在定义域上为增函数,所以 $f(x)$ 在 $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ 上单调递减,故 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$ .要使任意 $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ , $t \in [-2,2]$ ,不等式 $f(x) \geq t^2+at-6$ 恒成立,只需 $t^2+at-6 \leq -1$ 在 $t \in [-2,2]$ 上恒成立,即 $t^2+at-5 \leq 0$ 在 $t \in [-2,2]$ 上恒成立,由 $y=t^2+at-5$ 开口向上,则 $\begin{cases} 4-2a-5 \leq 0, \\ 4+2a-5 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ .综上,实数 $a$ 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .18.解:(1)由 $a_{n+1}-a_n=2(n \in \mathbf{N}_+)$ ,可知数列 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列,由 $\begin{cases} S_5=5a_1+10d=25, \\ d=2, \end{cases}$ 解得 $a_1=1$ ,所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$ .由 $2T_n=3b_n-3(n \in \mathbf{N}_+)$ ,得 $2T_{n+1}=3b_{n+1}-3$ ,两式相减,得 $b_{n+1}=3b_n(n \in \mathbf{N}_+)$ ,所以数列 $\{b_n\}$ 是公比为3的等比数列,由 $2T_1=3b_1-3$ ,得 $b_1=3$ ,所以 $b_n=3^n$ .(2)由(1)可得 $c_n=(2n-1) \times 3^n$ ,所以 $R_n=1 \times 3+3 \times 3^2+5 \times 3^3+\cdots+(2n-1) \times 3^n$ ,则 $3R_n=1 \times 3^2+3 \times 3^3+5 \times 3^4+\cdots+(2n-1) \times 3^{n+1}$ ,两式相减,得 $-2R_n=1 \times 3+2 \times 3^2+2 \times 3^3+\cdots+2 \times 3^n-$  $(2n-1) \times 3^{n+1}=3+\frac{2 \times 3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1) \times 3^{n+1}=-6-(2n-2) \times 3^{n+1}$ ,所以 $R_n=3+(n-1) \times 3^{n+1}$ .19.(1)解:因为 $f'(x)=e^x-x+a$ , $f(x)$ 为增函数,所以 $f'(x) \geq 0$ 恒成立,设 $g(x)=e^x-x+a$ ,则 $g'(x)=e^x-1$ ,令 $g'(x)=0$ ,则 $x=0$ .当 $x<0$ 时, $g'(x)<0$ ,所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减;当 $x>0$ 时, $g'(x)>0$ ,所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.所以 $x=0$ 是函数 $f'(x)$ 的极小值点,故当 $f'(0)=1+a \geq 0$ ,即 $a \geq -1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 为增函数时, $a$ 的取值范围为 $[-1,+\infty)$ .(2)证明: $f'(x)=e^x-x+a$ ,由(1)知当 $f''(0)<0$ ,即 $a<-1$ 时, $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2$ ,故 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ ,设 $x_1<0$ ,则 $x_2>0$ ,设 $h(x)=f'(x)-f'(-x)=e^x-x+a-(e^{-x}+x+a)=e^x-e^{-x}-2x$ , $x>0$ ,则 $h'(x)=e^x+e^{-x}-2>0$ ,故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(x)>h(0)=0$ .所以当 $x>0$ 时, $f'(x)>f'(-x)$ ,又 $x_2>0$ ,故 $f'(x_2)>f'(-x_2)$ ,所以 $f'(x_1)>f'(-x_1)$ ,又 $x_1<0$ , $-x_2<0$ , $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,故 $x_1<-x_2$ ,所以 $x_1+x_2<0$ .

## 第12期

## 第2-3版综合测试(四)参考答案

## 一、单项选择题

1.A 提示:根据题意,函数 $f(x)=2x-3 \ln x+2$  024,其定义域为 $(0,+\infty)$ ,其导数 $f'(x)=2-\frac{3}{x}=\frac{2x-3}{x}$ ,令 $f'(x)<0$ ,解得 $0<x<\frac{3}{2}$ ,所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ .故选A.2.C 提示:因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,所以 $S_8=$  $\frac{a_1+a_8}{2} \times 8=72$ ,即 $a_1+a_8=18$ ,因为 $a_1+a_8=18=a_3+a_6$ ,且 $a_3=6$ ,所以 $a_6=12$ .故选C.3.A 提示:因为 $f(x)=\frac{e^x+2 \sin x}{1+x^2}$ ,所以 $f'(x)=$  $\frac{(e^x+2 \cos x)(1+x^2)-(e^x+2 \sin x) 2x}{(1+x^2)^2}$ ,故 $f'(0)=3$ ,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线为 $y=3x+1$ ,令 $x=0$ ,解得 $y=1$ ,令 $y=0$ ,解得 $x=-\frac{1}{3}$ ,故所求三角形的面积为 $S=\frac{1}{2} \times \left|-\frac{1}{3}\right| \times 1=\frac{1}{6}$ .4.A 提示:根据题意,等比数列 $\{a_n\}$ 中,由 $S_3=-3$ , $S_6=21$ ,得 $a_4+a_5+a_6=24$ ,则 $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)=-3, \\ a_4+a_5+a_6=a_1q^3(1+q+q^2)=24, \end{cases}$ 所以 $q^3=-8$ ,所以 $q=-2$ .故选A.5.B 提示:设 $f(x)=x+\ln x$ ,易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $f(a)=a+\ln a=\frac{5}{2}$ , $f(2)=2+\ln 2>2+\ln \sqrt{e}=\frac{5}{2}$ ,所以 $a<2$ ;设 $g(x)=x+\lg x$ ,易知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $g(b)=b+\lg b=\frac{5}{2}$ , $g(2)=2+\lg 2<2+\lg \sqrt{10}=\frac{5}{2}=g(b)$ ,所以 $2<b$ .6.D 提示:由题意知,等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为60,公差为 $\frac{1}{6}$ ,所以 $a_n=60+(n-1) \times \frac{1}{6}$ ,又 $1981-1961+1=21$ ,所以 $a_{21}=60+20 \times \frac{1}{6}=63+\frac{1}{3}=63$ 岁4月.故选D.7.B 提示:若 $m=n$ ,则 $f(x)=-m(x-m)^3$ 为单调函数,无极值点,不符合题意,故 $m \neq n$ .由 $f'(x)=m(x-m)(-3x+m+2n)$ ,令 $f'(x)=0$ ,解得 $x=m$ 或 $x=\frac{m+2n}{3}$ .①当 $m>0$ 时,若 $m$ 为极小值点,则需满足 $m<\frac{m+2n}{3}$ ,故有 $0<m&lt$



## 一、单项选择题

1.D 提示:奇数项为负,偶数项为正,可用 $(-1)^n$ 来实现,而各项分母可看作 $2^1-1=1,2^2-1=3,2^3-1=7,2^4-1=15,2^5-1=31,\cdots$ ,各项分子均为1,所以该数列的一个通项公式为 $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n-1}$ .故选D.

2.C 提示:因为 $f(x)=\frac{x}{x-2}$ ,所以 $f'(x)=\frac{-(x-2)+x}{(x-2)^2}=\frac{2}{(x-2)^2}$ ,所以 $f'(1)=2$ ,又 $f(1)=1$ ,所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$ ,即 $2x-y-1=0$ .故选C.

3.C 提示: $S_{10}-S_5=a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=7a_7=35$ ,解得 $a_7=5$ ,在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_6+a_7=a_3+a_{10}=7$ ,则 $a_6=2$ ,故公差 $d=a_7-a_6=5-2=3$ .故选C.

4.A 提示:因为 $\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ,故A正确;

因为 $(\ln(2x-1))'=\frac{1}{2x-1}\times 2=\frac{2}{2x-1}$ ,故B错误;  
因为 $(x^3e^x)'=3x^2e^x+x^3e^x$ ,故C错误;  
因为 $(2^x+\cos x)'=2^x\ln 2-\sin x$ ,故D错误.故选A.  
5.A 提示:根据题意,无穷等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1>0$ ,若 $q>0$ ,则 $a_n=a_1q^{n-1}>0$ ,必有 $S_{n+1}>S_n$ ,故 $S_n$ 存在最小值 $S_1$ ,则“ $q>0$ ”是“ $S_n$ 存在最小值”的充分条件.  
当 $a_1=1,q=-\frac{1}{2}$ 时, $S_n$ 存在最小值 $S_2$ ,则“ $q>0$ ”不是“ $S_n$ 存在最小值”的必要条件.故“ $q>0$ ”是“ $S_n$ 存在最小值”的充分不必要条件.故选A.  
6.C 提示:因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, $S_9<S_4$ ,且 $S_{15}>0$ ,所以 $S_9-S_5=a_4+a_6+a_7+a_8+a_9=5a_7<0$ ,所以 $a_7<0$ ,又 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8>0$ ,所以 $a_8>0$ ,故公差 $d=a_8-a_7>0$ ,所以当 $S_n$ 取得最小值时, $n=7$ .故选C.  
7.C 提示:设 $g(x)=f(x)-\ln x,x>0$ ,

则 $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}=\frac{xf'(x)-1}{x}$ ,由 $xf'(x)-1<0$ ,得 $g'(x)<0$ ,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,又 $f(e)=2$ ,所以 $g(e)=f(e)-\ln e=1$ ,所以不等式 $f(e^x)<x+1$ 可化为 $f(e^x)-x<1$ ,即 $f(e^x)-\ln e^x<1$ ,所以 $g(e^x)<g(e)$ ,所以 $e^x>e$ ,所以 $x>1$ ,所以该不等式的解集为 $(1,+\infty)$ .故选C.

8.D 提示:由 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+2}}(n\in\mathbf{N}_+)$ ,可得 $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{2}{a_{n+1}}$ ,所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为1,公差为 $d$ 的等差数列,所以 $\frac{1}{a_{2024}}=1+2\ 023d=\frac{2\ 025}{2}$ ,解得 $d=\frac{1}{2}$ ,则 $\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$ ,即 $a_n=\frac{2}{n+1},a_n a_{n+1}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}=4\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ ,

$a_1 a_2+a_2 a_3+\cdots+a_n a_{n+1}=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{2n}{n+2}$ ,故选D.

## 二、多项选择题

9.BD 提示:函数 $f(x)=ax^3+3x^2-x+1$ 恰好有三个单调区间,则 $f'(x)=3ax^2+6x-1$ 有两个不相等的零点,即 $\begin{cases} a\neq 0, \\ \Delta=36+12a>0, \end{cases}$ 解得 $a>-3$ 且 $a\neq 0$ ,故B、D符合题意.故选BD.

10.ABC 提示:对于A,由题意知, $a_1 a_{14}=a_4 a_{13} q=a_7^2 q=q$ ,故A正确;

对于B,当 $0<q<1$ 时,由 $a_7=1$ ,得 $a_i>a_7=1(i=1,2,\cdots,6)$ ,可得 $T_7>a_7=1$ ,故B正确;

对于C,因为 $T_{15}=a_1^2=1$ ,所以C正确;对于D,当 $q>1$ 时,因为 $a_1=1$ ,所以 $a_i<a_1=1(i=1,2,\cdots,6)$ ,则 $T_n$ 的最小值为 $T_6$ 或 $T_7$ ,故D错误.故选ABC.

11.AC 提示:令 $f'(x)=3x^2-3=0$ ,得 $x=\pm 1$ ,当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $f'(x)>0$ ,则 $f(x)$ 单调递增,当 $x\in(-1,1)$ 时, $f'(x)<0$ ,则 $f(x)$ 单调递减,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$ ,则 $f(x)$ 单调递增,所以-1为极大值点,1为极小值点,故A正确;

令 $f(x)=0$ ,则 $x^3-3x-2=0\Rightarrow(x+1)^2(x-2)=0$ ,解得 $x=-1$ 或 $x=2$ ,所以函数 $f(x)$ 有2个零点,故B错误;

令 $g(x)=x^3-3x$ ,则 $f(x)=g(x)-2$ ,又 $g(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-g(x)$ ,所以 $g(x)$ 为奇函数,其图象关于点 $(0,0)$ 对称,则 $f(x)$ 图象关于点 $(0,-2)$ 对称,故C正确;

设切点坐标为 $(x_0,x_0^3-3x_0-2)$ ,则斜率 $k=f'(x_0)=3x_0^2-3$ ,则切线方程为 $y-(x_0^3-3x_0-2)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$ ,将点 $(0,2)$ 代入切线方程,整理可得 $x_0^3+2=0$ ,解得 $x_0=(-2)^{\frac{1}{3}}$ ,即过点 $(0,2)$ 可以作曲线 $y=f(x)$ 的一条切线,故D错误.

故选AC.

## 三、填空题

12. $\frac{3}{4}$  提示:由 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$ ,得 $f'(x)=3x^2+a$ ,设切点为 $(x_0,0)$ ,则 $\begin{cases} 3x_0^3+a=0, \\ x_0^3+ax_0+\frac{1}{4}=0, \end{cases}$ 消去 $a$ 并整理,得 $x_0^3=-\frac{1}{8}$ ,则 $x_0=\frac{1}{2}$ ,所以 $a=-3x_0^2=-\frac{3}{4}$ .

13. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2^{n+1}-2$   
提示:因为 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ,

所以数列 $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ ,因

为 $n^2+2^n=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n+2^n$ ,所以数列 $\{n^2+2^n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=2\left[\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right]-(1+2+\cdots+n)+(2+2^2+\cdots+2^n)=$

$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2^{n+1}-2$ .

14. $\left[0,\frac{1}{3}\right]$  提示:函数 $f(x)=2x+\frac{5}{x}+3\ln x$ ,定义域为 $(0,+\infty)$ ,则 $f'(x)=2-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x}=\frac{2x^2+3x-5}{x^2}=\frac{(2x+5)(x-1)}{x^2}$ ,

令 $f'(x)=0$ ,可得 $x=1$ 或 $x=-\frac{5}{2}$ (舍去).

当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$ , $f(x)$ 单调递减;  
当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$ , $f(x)$ 单调递增.  
又因为函数 $f(x)$ 在 $(a,2-3a)$ 内有最小值,故 $0\leq a<1<2-3a$ ,解得 $0\leq a<\frac{1}{3}$ ,

所以实数 $a$ 的取值范围是 $\left[0,\frac{1}{3}\right)$ .

## 四、解答题

15.解:(1)当 $m=2$ 时, $f(x)=x^3-2x-1$ ,则 $f(1)=-2$ ,即 $P(1,-2)$ , $f'(x)=3x^2-2$ ,所以曲线在 $P(1,-2)$ 处的切线的斜率 $k=3-2=1$ ,

所以所求的切线方程为 $y-(-2)=x-1$ ,即 $x-y-3=0$ .

(2)因为 $f'(x)=3x^2-m$ , $P(1,-m)$ ,所以曲线在 $P$ 处的切线的斜率 $k=3-m$ ,所以切线方程为 $y-(-m)=(3-m)(x-1)$ ,即 $y=(3-m)x-3$ ,又因为切线与两坐标轴围成三角形,

所以 $m\neq 3$ .令 $x=0$ ,得 $y=-3$ ;令 $y=0$ ,得 $x=\frac{3}{3-m}$ .

又因为所围成三角形的面积为9,

所以 $\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{|3-m|}=9$ ,所以 $|3-m|=\frac{1}{2}$ ,解得 $m=\frac{5}{2}$ ,或 $m=\frac{7}{2}$ .

16.解:(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$ .选择①,由题意得 $S_5=5a_1+10d=15$ ,又 $a_1=S_1=1$ ,则 $d=1$ ,所以 $a_n=1+(n-1)=n$ .

选择②,由 $a_1,a_3,a_9$ 成等比数列,得 $a_1 a_9=a_3^2$ ,又 $a_1=S_1=1$ ,所以 $1+8d=(1+2d)^2$ ,

解得 $d=1$ 或 $d=0$ (舍去),所以 $a_n=1+(n-1)=n$ .

选择③,由 $a_6=3a_2$ ,及 $a_1=S_1=1$ ,得 $1+5d=3(1+d)$ ,解得 $d=1$ ,所以 $a_n=1+(n-1)=n$ .

(2)由(1)得 $b_n=2n-1$ ,则 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20}=1+3+5+\cdots+39=\frac{20\times(1+39)}{2}=400$ .

17.解:(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ , $f'(x)=\frac{1-1-\ln x}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$ ,令 $f'(x)=0$ ,得 $x=1$ .

当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0$ , $f(x)$ 单调递增;  
当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$ , $f(x)$ 单调递减.  
所以 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点,且是唯一的极值点,

所以 $0<a<1<a+\frac{1}{2}$ ,故 $\frac{1}{2}<a<1$ ,所以正实数 $a$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ .

(2)根据题意,得当 $x\geq 1$ 时, $k\leq\frac{(x+1)(1+\ln x)}{x}$ 恒成立,

令 $g(x)=\frac{(x+1)(1+\ln x)}{x}(x\geq 1)$ ,

则 $g'(x)=\frac{\left(1+\ln x+1+\frac{1}{x}\right)x-(x+1)(1+\ln x)}{x^2}=\frac{x-\ln x}{x^2}$ .

再令 $h(x)=x-\ln x(x\geq 1)$ ,则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}\geq 0$ ,所以 $h(x)$

在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(x)\geq h(1)=1$ ,所以 $g'(x)>0$ ,所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)\geq g(1)=2$ ,故 $k\leq 2$ ,所以实数 $k$ 的取值范围是 $(-\infty,2]$ .

18.解:(1)数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_1}{2^1}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{a_n}{2^n}=n$ ,

设 $T_n=\frac{a_1}{2^1}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{a_n}{2^n}=n$ ,

当 $n=1$ 时,有 $T_1=\frac{a_1}{2^1}=1$ ,即 $a_1=2$ ;

当 $n\geq 2$ 时,有 $T_n-T_{n-1}=\frac{a_n}{2^n}=n-(n-1)=1$ ,得 $a_n=2^n$ .

又 $a_1=2$ 符合 $a_n=2^n$ ,所以 $a_n=2^n$ .  
(2) $\{a_n\}$ 是等比数列,且各项均为正整数,则公比 $q>0$ .若 $q=1$ ,则 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{n},\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递减数列,符合题意;  
若 $0<q<1$ ,则当 $n>-\log_q a_1$ 时, $a_n=a_1 q^{n-1}<1$ ,不为正整数,不合题意;

若 $q>1$ ,则 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{[qn-(n+1)]a_n}{n(n+1)}$ ,

当 $qn>n+1$ ,即 $n>\frac{1}{q-1}$ 时, $\frac{a_{n+1}}{n+1}>\frac{a_n}{n}$ ,这与 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递减数列相矛盾,不合题意.

综上,公比 $q=1$ .

19.解:(1)将 $a=-1$ 代入可得 $f(x)=x^2-x+1+e^x$ ,其定义域为 $\mathbf{R}$ ,则 $f'(x)=2x-1+e^x$ ,

因为 $y=2x-1$ 和 $y=e^x$ 都在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $f'(x)=2x-1+e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增且 $f'(0)=0$ ,所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)<0$ ,函数 $f(x)$ 单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$ ,函数 $f(x)$ 单调递增.综上所述,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$ ,单调递增区间为 $(0,+\infty)$ .

(2)由 $f(x)=0$ ,得 $a=\frac{x^2-x+1}{e^x}$ ,令 $g(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}$ ,则 $g'(x)=\frac{(2x-1)e^x-(x^2-x+1)e^x}{e^{2x}}=\frac{-(x-1)(x-2)}{e^x}$ ,

所以当 $x\in(-\infty,1)$ 时, $g'(x)<0$ , $g(x)$ 单调递减,当 $x\in(1,2)$ 时, $g'(x)>0$ , $g(x)$ 单调递增,当 $x\in(2,+\infty)$ 时, $g'(x)<0$ , $g(x)$ 单调递减.

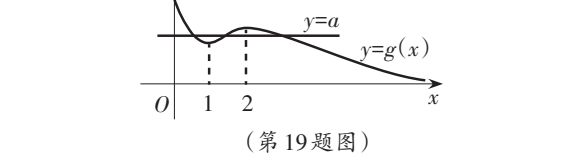
由单调性可知,当 $x\rightarrow-\infty$ 时, $g(x)\rightarrow+\infty$ ;当 $x\rightarrow+\infty$ 时,

$g(x)\rightarrow 0$ ;

当 $x=1$ 时, $g(x)$ 取得极小值,即 $g(1)=\frac{1}{e}$ .

当 $x=2$ 时, $g(x)$ 取得极大值,即 $g(2)=\frac{3}{e^2}$ .

所以 $y=g(x)$ 和 $y=a$ 的大致图象如下:



综上所述,若 $f(x)$ 有3个零点,则 $a$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{e},\frac{3}{e^2}\right)$ .

第2~3版综合测试(三)参考答案  
一、单项选择题  
1.A 提示:因为 $S(t)=2^t$ ,所以 $S'(t)=2^t\ln 2$ ,则 $S'(1)=2\ln 2$ .故选A.

2.C 提示:由题意知, $a_1+a_{13}=2a_7=\frac{2}{3}\times(5a_7)=\frac{2}{3}\times(a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})=40$ .故选C.

3.A 提示:根据题意,在区间 $(0,1)$ 内,若 $f'(x)>1$ ,则在曲线 $f(x)$ 上任意一点切线的斜率都大于1,分析选项,A符合这个特点.故选A.

4.B 提示:因为 $\{a_n\}$ 是等比数列,所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}=$

$\frac{a_1+a_3}{a_1 a_3}=\frac{a_1+a_3}{a_2^2}$ ,所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{a_1+a_3}{a_2^2}+\frac{1}{a_2}=\frac{a_1+a_3+a_2}{a_2^2}=\frac{S_3}{a_2^2}=7$ ,因为 $a_2=\frac{1}{2}$ ,所以 $4S_3=7$ ,即 $S_3=\frac{7}{4}$ .

5.A 提示: $h'(x)=\frac{1}{x}-ax-2$ ,因为函数 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$ 在 $[1,4]$ 上单调递增,所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-ax-2\geq 0$ 在 $[1,4]$ 上恒成立,分离参数

得 $a\leq\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2-1$ ,当 $\frac{1}{x}=1$ ,即 $x=1$ 时, $\left(\frac{1}{x}-1\right)^2-1$ 取得最小值-1,所以 $a\leq-1$ ,所以 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,-1]$ .

6.C 提示:由题意可设前 $n$ 组里含有的正整数的个数为 $S_n$ ,则 $S_n=1+2+2^2+3+\cdots+2^{n-1}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$ ,因为 $S_{10}=2^{10}-1=1\ 023<2\ 025$ , $S_{11}=2^{11}-1=2\ 047>2\ 025$ ,所以2 025在第11组.故选C.

7.B 提示:设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ .因为 $a_1=1,a_1+a_5=a_3$ ,由等差数列的性质可知, $a_1+a_5=a_3+a_3=a_5$ ,所以 $a_5=0,d=a_5-a_1=-1$ ,则 $a_n=2-n$ ,所以 $b_n=2^{2-n}=2\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$ ,所以 $\{b_n\}$ 是首项为2,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,所以 $S_n=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=4-\frac{1}{2^{n-2}}$ ,因为 $S_m=\frac{63}{16}$ ,所以 $4-\frac{1}{2^{m-2}}=\frac{63}{16}$ ,解得 $m=6$ .故选B.

8.C 提示: $f'(x)=6ax^2-6x=6x(ax-1)$ ,因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值1,所以 $f'(1)=6a-6=0$ ,解得 $a=1$ ,可得 $f(x)=2x^3-3x^2+b$ ,则 $f(1)=2-3+b=1$ ,解得 $b=2$ ,所以 $f(x)=2x^3-3x^2+2,f'(x)=6x(x-1)$ .

当 $x\in[-1,0)$ 时, $f'(x)>0$ , $f(x)$ 单调递增;  
当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$ , $f(x)$ 单调递减;  
当 $x\in(1,2]$ 时, $f'(x)>0$ , $f(x)$ 单调递增.  
又 $f(0)=2,f(-1)=-2-3+2=-3,f(2)=16-12+2=6$ ,则 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为6.故选C.

## 二、多项选择题

9.BCD 提示:对于A, $\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-\frac{1}{x^2}$ ,故A错误;

对于B, $(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,故B正确;

对于C, $(x^x)'=ax^{x-1}$ ,故C正确;  
对于D, $(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}$ ,故D正确.故选BCD.

10.BC 提示:当 $q=1$ 时, $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d+nb_1=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1+b_1-\frac{d}{2}\right)n$ ,不合题意;

当 $q\neq 1$ 时, $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d+\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n+\left(\frac{b_1}{1-q}\right)q^n+\frac{b_1}{1-q}$ ,因为 $S_n=n^2-n+2^n-1$ ,所以 $\frac{d}{2}=1,a_1-\frac{d}{2}=-1,-\frac{b_1}{1-q}=1$ ,

$q=2$ ,所以 $a_1=0,d=2,b_1=1,q=2$ ,所以 $d+q=4$ .故选BC.  
11.AB 提示:对于A,函数 $f(x)=2x^3-3x^2,f'(x)=6x^2-$

$6x=6x(x-1)$ ,令 $f'(x)=0$ ,解得 $x=0$ 或 $x=1$ ,故当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)>0$ ,当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$ ,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$ ,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,在 $(0,1)$ 内单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,故1是 $f(x)$ 的极小值点,故A正确;

对于B,因为 $f(x)+f(1-x)=2x^3-3x^2+2(1-x)^3-3(1-x)^2=2x^3-3x^2+2-6x+6x^2-2x^3-3+6x-3x^2=-1$ ,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 对称,故B正确;

对于C,由 $g(x)=f(x)+1=2x^3-3x^2+1$ ,可知 $g(x),f(x)$ 的单调性一致,而 $g(1)=0$ ,故 $g(x)=f(x)+1$ 有2个零点,故C错误;

对于D,当 $0<x<1$ 时, $-1<x^2-1<x-1<0$ ,而 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递增,故 $f(x^2-1)<f(x-1)$ ,故D错误.故选AB.

## 三、填空题

12. $3n^2+\frac{1}{2}n$  提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ ,由 $a_5=a_1+4d$ ,得 $14=2+4d$ ,解得 $d=3$ ,所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=2n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ .

13. $a<c<b$   
提示: $\ln a=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$ , $\ln b=\frac{1}{e}\ln e=\frac{1}{e}$ , $\ln c=\frac{1}{\pi}\ln\pi$ ,

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$ ,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ,由 $f'(x)>0$ ,得 $0<x<e$ ;由 $f'(x)<0$ ,得 $x>e$ .所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 内单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.所以 $f(e)=\frac{\ln e}{e}=\ln b$ 最大.

而 $\ln a-\ln c=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{\pi}\ln\pi=\frac{1}{4}\ln 4-\frac{1}{\pi}\ln\pi<0$ ,所以 $a<c$ ,则 $a<c<b$ .

14.①③ 提示:对于①,依题意,数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1,a_2-a_1=2,a_3-a_2=3,a_4-a_3=4,\cdots,a_n-a_{n-1}=n,n\geq 2$ ,于是得 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ ,又 $b_1=1$ 满足上式,所以 $b_n=n^2$ ,令 $\frac{n(n+1)}{2}=2\ 025$ ,此方程无整数解,

令 $n^2=2\ 025$ ,解得 $n=45$ ,所以2 025不是三角形数,是正方形数,故②错误;  
对于③, $\forall m\in\mathbf{N}_+,m\geq 2$ ,取 $p=m,q=m-1$ ,则 $a_p+a_q=a_m+a_{m-1}=\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}=m^2=b_m$ ,故③正确.  
故填:①③.  
四、解答题  
1