

高二选择性必修(第二册)答案页第2期

当且仅当 $\frac{b}{ea} = \frac{ea}{b}$, 即 $b=ea=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

故 $\frac{1}{ea} + \frac{1}{b}$ 的取值范围是 $[4, +\infty)$. 故选 C.

二、多项选择题

9.ABD

提示: $(xe^x)' = e^x + xe^x$, 故 A 正确; $(\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$,

故 B 正确; $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, 故 C 错误; $[\lg(2x)]' =$

$\frac{2}{2x \ln 10} = \frac{1}{x \ln 10}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

10.ABC

提示: 对于 A, $s' = 3 - 2t$, 当 $t = 0$ 时, $s' = 3$, 所以此物体的初速度是 3 m/s, 故 A 正确;

对于 B, 当 $t = 2$ 时, $s' = 3 - 4 = -1$, 所以此物体在 $t = 2$ s 时的瞬时速度大小为 1 m/s, 方向与初速度相反, 故 B 正确;

对于 C, $s(t) = 3t - t^2$, $t = 0$ s 到 $t = 2$ s 时平均速度为 $\frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} =$

$\frac{6 - 4 - 0}{2} = 1$, 故 $t = 0$ s 到 $t = 2$ s 时平均速度为 1 m/s, 故 C 正确;

对于 D, $t = 3$ s 时, $s' = 3 - 2t = 3 - 6 = -3$, 故 $t = 3$ s 时的瞬时速度为 -3 m/s, 故 D 错误.

故选 ABC.

11.ABD

提示: 由题意得, 函数 $f(x)$ 具有 P 性质, 等价于对于导函数 $f'(x)$ 值域中的任意的值 k , $f'(x) = k$ 至少有两个根.

对于 A, 由 $f'(x) = 3x^2 + 2x = k$, $\Delta = 4 + 12k = 0$, 得 $k = -\frac{1}{3}$ 时, 方程有唯一解, 故函数 $f(x)$ 不具有 P 性质;

对于 B, 由 $f'(x) = 4x = k$ 只有唯一解, 故函数 $f(x)$ 不具有 P 性质;

对于 C, 由 $f'(x) = \cos x$ 是周期函数, 对于任意 $k \in [-1, 1]$, $\cos x = k$ 有无穷多个解, 故函数 $f(x)$ 具有 P 性质;

对于 D, 由 $f'(x) = \frac{2}{x} (x > 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 当 $k \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{2}{x} = k$ 不存在两解, 故函数 $f(x)$ 不具有 P 性质. 故选 ABD.

三、填空题

12. $2x + y - 1 = 0$

提示: 由 $f(x) = xe^x - 3x + 1$, 得 $f'(x) = e^x + xe^x - 3$, 所以 $f'(0) = -2$, 所以曲线 $f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 $y = -2x + 1$, 即 $2x + y - 1 = 0$.

13. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

提示: 当与直线 $l: 2x + y + 3 = 0$ 平行的直线与曲线 $f(x)$ 相切时, 则切点到直线 l 的距离最小.

因为 $f(x) = e^x - 3x$, 所以 $f'(x) = e^x - 3$, 而直线 l 的斜率为 -2, 令 $f'(x) = e^x - 3 = -2$, 得 $x = 0$, 将 $x = 0$ 代入函数 $f(x)$ 中, 可得 $A(0, 1)$,

故 A, B 两点之间距离的最小值, 即点 A 到直线 l 的距

离 $\frac{|1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

14. $\frac{4}{9} \sqrt{\frac{3}{\pi}}$

提示: 由题意, 设 t 时刻水面高为 h , 水面圆半径为 r , 则 $\frac{r}{h} = \frac{3}{8}$, 即 $r = \frac{3}{8}h$,

则此时水的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{3\pi}{64}h^3$, 又以 $3 \text{ cm}^3/\text{s}$ 的匀速往杯中注水, 则此时水的体积为 $3t$, 即 $3t = \frac{3\pi}{64}h^3$, 则 $h =$

数学人教 A



扫码免费下载
习题讲解 ppt

第5期

第3-4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示: 对于 A, 平均变化率为 $\frac{0 - (-1)^2}{0 - (-1)} =$

-1; 对于 B, 平均变化率为 $\frac{0 - (-1)^3}{0 - (-1)} = 1$;

对于 C, 平均变化率为 $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{0 - (-1)} = -1$;

对于 D, 平均变化率为 $\frac{2^0 - 2^{-1}}{0 - (-1)} = \frac{1}{2}$.

所以在区间 $[-1, 0]$ 上的平均变化率最大的是 $y = x^3$. 故选 B.

2.C

提示: 由题意知, $f'(x_0) = 2$,

则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} = \frac{1}{3}f'(x_0) = \frac{2}{3}$.

故选 C.

3.D

提示: 由 $s(t) = 3t^3 - \frac{1}{2}gt^2$, 得 $s'(t) = 9t^2 - gt = 9t^2 - 10t$,

所以 $s'(4) = 9 \times 16 - 10 \times 4 = 104$,

即该质点的瞬时速度是 104 m/s.

故选 D.

4.B

提示: 由图象, 知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(2) < \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} < f'(4)$,

即 $2f'(2) < f(4) - f(2) < 2f'(4)$.

故选 B.

5.C

提示: 因为 $f(x) = 2xf'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin x$, 所以 $f'(x) =$

$2f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos x$, 令 $x = \frac{\pi}{3}$, 得 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos \frac{\pi}{3}$,

则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

故选 C.

6.D

提示: 根据题意, 曲线 $y = (ax + 1)e^x$, 其导数 $y' = (ax + 1) \cdot e^x + ae^x = (ax + a + 1)e^x$,

所以 $y'|_{x=1} = (2a + 1)e$, 即曲线 $y = (ax + 1)e^x$ 在 $x = 1$ 处的切线斜率为 $k = (2a + 1)e$,

因为该切线与直线 $\frac{1}{e}x + y + 1 = 0$ 垂直,

所以 $(2a + 1)e \cdot \left(-\frac{1}{e}\right) = -1$, 解得 $a = 0$. 故选 D.

7.B

提示: 在 $xy + \ln y = 2$ 的两边同时对 x 求导数, 可得 $y + xy' + \frac{1}{y}y' = 0$,

将 $x = 2, y = 1$ 代入上式, 可得 $1 + 2y' + y' = 0$, 即所求切线的斜率为 $k = y' = -\frac{1}{3}$,

则所求切线的方程为 $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$, 即 $x + 3y - 5 = 0$.

故选 B.

8.C

提示: $y' = \frac{1}{x + 2a}$, 令 $\frac{1}{x + 2a} = e$, 则 $x = \frac{1}{e} - 2a$, 所以 $y =$

$\ln\left(\frac{1}{e} - 2a + 2a\right) = -1$,

所以 $e\left(\frac{1}{e} - 2a\right) - 2b = -1$, 即 $ae + b = 1$, 又 a, b 为正实数, 所

以 $\frac{1}{ea} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{ea} + \frac{1}{b}\right)(ae + b) = 1 + 1 + \frac{b}{ea} + \frac{ea}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{ea} \cdot \frac{ea}{b}} = 4$,

综上, 当 $m \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, m)$ 内单调递减, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 证明: 当 $m = 1$ 时, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, 令 $g(x) = xf(x) - e^x - x + e = x \ln x - e^x - x + e + 1$, 则 $g'(x) = \ln x - e^x$,

令 $h(x) = g'(x) = \ln x - e^x$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - e^x$,

因为 $x \geq 1$, 所以 $\frac{1}{x} \leq 1, e^x \geq e > 1$, 所以当 $x \geq 1$ 时, $h'(x) =$

$\frac{1}{x} - e^x < 0$ 恒成立,

所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 即 $g'(x) = \ln x - e^x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $g'(x) \leq g'(1) = -e < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x) \leq g(1) = 0$, 即 $xf(x) - e^x - x + e \leq 0$.

17. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 令 $f(x) = x \ln x - x - a = 0$, 则 $a = x \ln x - x$,

令 $h(x) = x \ln x - x$, 则 $h'(x) = \ln x$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

又当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) = x(\ln x - 1) < 0$, 且 $h(1) = -1$, 当 $x > 1$ 时, $h(e) = 0$, 所以当 $0 < x < e$ 时, $h(x)$ 先减后增, 且在 $x = 1$ 处有最小值 -1,

此时直线 $y = a$ 与 $h(x) = x \ln x - x$ 有两个交点, 所以实数 a 的取值范围为 $(-1, 0)$.

(2) 由 $g(x) - f(x) - 2x \geq 0$, 得 $x^2 - x + \ln x - x \ln x + a - ax \geq 0$, 即 $x(x - 1) - \ln x(x - 1) \geq a(x - 1)$, 对任意的 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立.

当 $x = 1$ 时, 上式显然成立, 当 $x > 1$ 时, 上式转化为 $a \leq x - \ln x$,

令 $\varphi(x) = x - \ln x, x \in (1, +\infty)$, 所以 $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x} > 0$,

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\varphi(x) > \varphi(1) = 1$, 所以 $a \leq 1$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

18. 解: (1) 由已知得 $\begin{cases} \frac{1}{2}a \times 100 + 10b - \ln 2 = 17.7, \\ \frac{1}{2}a \times 225 + 15b - \ln 3 = 25, \end{cases}$

化简得 $a = -\frac{1}{25}, b = \frac{51}{25}$.

所以 $y = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{51}{25}x - \ln \frac{x}{5} (x \geq 10)$,

则该景点改造升级后旅游增加利润为 $L(x) = -\frac{1}{50}x^2 +$

$\frac{51}{25}x - \ln \frac{x}{5} - x = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{26}{25}x - \ln \frac{x}{5} (x \geq 10)$.

(2) 由 (1) 得, $L(x) = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{26}{25}x - \ln \frac{x}{5} (x \geq 10)$,

则 $L'(x) = \frac{1}{25}x + \frac{26}{25} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 26x + 25}{25x} = \frac{(x - 1)(x - 25)}{25x}$,

令 $L'(x) = 0$, 得 $x = 25$, 当 $x \in (10, 25)$ 时, $L'(x) > 0, L(x)$ 单调递增; 当 $x \in (25, +\infty)$ 时, $L'(x) < 0, L(x)$ 单调递减, 所以 $x = 25$ 时, $L(x)$ 取得最大值, 且 $L(x)_{\max} = L(25) = 11.9$,

所以当投入 25 万元时, 旅游增加利润最大, 最大利润为 11.9 万元.

19. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减. 所以 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点, 且是唯一的极值点, 因为 $f(x)$ 在 $\left(a, a + \frac{1}{2}\right)$ 内存在极

值, 且 $a > 0$, 所以 $0 < a < 1 < a + \frac{1}{2}$, 解得 $\frac{1}{2} < a < 1$, 所以正实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(2) 当 $x \geq 1$ 时, $k \leq \frac{(x + 1)(1 + \ln x)}{x}$ 恒成立, 令 $g(x) = \frac{(x + 1)(1 + \ln x)}{x} (x \geq 1)$,

则 $g'(x) = \frac{\left(1 + \ln x + 1 + \frac{1}{x}\right)x - (x + 1)(1 + \ln x)}{x^2} = \frac{x - \ln x}{x^2}$,

再令 $h(x) = x - \ln x (x \geq 1)$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$, 所以 $h(x) \geq$

$h(1) = 1$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 为增函数, 所以 $g(x) \geq g(1) = 2$,

故 $k \leq 2$, 所以实数 k 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

对于 B, 因为 $[\ln(3x + 1)]' = \frac{1}{3x + 1} \times 3 = \frac{3}{3x + 1}$, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$, 故 C

正确;

对于 D, 因为 $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$, 故 D 错误. 故选 ABD.

10. CD 提示: $R' = 2CM - \frac{M}{2} = -\frac{M}{2}(M - 4C)$, 令 $R' = 0$, 解得 $M = 0$, 或 $M = 4C$,

当 $M \in (0, 4C)$ 时, $R' > 0$, 所以 R 在 $(0, 4C)$ 内单调递增; 当 $M \in (4C, 6C]$ 时, $R' < 0$, 在 $(4C, 6C]$ 上单调递减.

即当 $M = 4C$ 时, 能够降低的温度最大, 所以 A, B 均错误, C, D 均正确. 故选 CD.

11. BC 提示: 函数 $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 求得 $f'(x) = \frac{3x^2 - x^3}{e^x} = \frac{x^2(3 - x)}{e^x}$.

对于 A, 当 $x < 3$ 时, $f'(x) \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, $f(x)$ 在 $(-\infty, 3)$ 上单调递增,

当 $x > 3$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递减, 因此函数 $f(x)$ 有最大值 $f(3)$, 无最小值, 故 A 错误;

对于 B, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $f(x) < f(0) = 0$, 故 B 正确;

对于 C, 由 $f(x) = 0$, 得 $x = 0$, $f(x)$ 仅有一个零点, 故 C 正确;

对于 D, 由选项 A 知, $f(x)$ 仅有一个极值点, 故 D 错误.

故选 BC.

三、填空题

12. $y = x + 1$ 提示: 由 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2\Delta x) - f(1 - \Delta x)}{\Delta x} = 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2\Delta x) - f(1 - \Delta x)}{3\Delta x} = 3f'(1) = 3$,

得 $f'(1) = 1$, 而 $f'(x) = a - \frac{1}{x}$, 所以 $a = 2, f(x) = 2x - \ln x, f(1) = 2$,

所以所求的切线方程为 $y - 2 = x - 1$, 即 $y = x + 1$.

13. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 提示: 因为 $f(x) = \sqrt{x} - ax$, 所以 $f'(x) =$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} - a$, 因为 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递减, 所以 $\frac{1}{2\sqrt{x}} - a \leq 0$

在 $[1, 4]$ 上恒成立, 即 $a \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $[1, 4]$ 上恒成立. 因为函

数 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $[1, 4]$ 上单调递减, 所以 $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$, 所

以 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

14. $\left[\frac{e}{4 - e}, +\infty\right)$ 提示: 因为 $f(x) = xe^x$, 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$,

则 $g(x) = \frac{e^x}{x}$, 令 $h(x) = \frac{e^x(x^2 + 1)}{f(x)} = x + \frac{1}{x}$,

又对任意 $x_2 \in (0, +\infty)$, 存在 $x_1 \in (0, +\infty)$,

不等式 $\frac{f(x_1)}{x_1^2} \cdot \frac{f(x_2)}{e^{x_2}} \leq \frac{2k}{k + 1} \cdot \frac{(x_2^2 + 1)}{2}$ 恒成立,

又 $k > 0$, 即 $\frac{g(x_1)}{2k} \leq \frac{h(x_2)}{k + 1}$, 即 $\frac{g(x)_{\min}}{2k} \leq \frac{h(x)_{\min}}{k + 1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

又 $g(x) = \frac{e^x}{x}, g'(x) = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$, 则当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$,

$g(x)$ 单调递减, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, 故 $g(x)_{\min} = g(1) = e$.

又当 $x > 0$ 时, $h(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x = 1$

时, 等号成立, 故 $\frac{e}{2k} \leq \frac{2}{k + 1}$, 又 $k > 0$, 所以 $k \geq \frac{e}{4 - e}$. 所以正数

k 的取值范围是 $\left[\frac{e}{4 - e}, +\infty\right)$.

四、解答题

15. 解: (1) $f'(x) = [\sin(x^2 - x)]' - [\ln(2x - 1)]' + (e^{x^2 - 1})' +$

$x - 1 = (2x - 1)\cos(x^2 - x) - \frac{2}{2x - 1} + 2xe^{x^2 - 1} + x - 1$.

(2) $f(1) = \sin(1 - 1) - \ln(2 - 1) + e^{1 - 1} + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = 0$

一、单项选择题

1.D 提示:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=1-\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-x-6}{x^2}=\frac{(x-3)(x+2)}{x^2}$,令 $f'(x)<0$,又 $x>0$,解得 $0<x<3$,所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,3)$,故选D.

2.B 提示:函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,且 $f'(x)=\text{e}^x-1$,令 $f'(x)=0$,可得 $x=0$.当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减;当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增.故 $f(x)_{\min}=f(0)=\text{e}^0-0=1$.故选B.

3.C 提示:由 $f'(x)$ 图象知,当 $x>x_1$ 或 $x<0$ 时, $f'(x)>0$,此时 $f(x)$ 单调递增,当 $0<x<x_1$ 时, $f'(x)<0$,此时 $f(x)$ 单调递减,此时对应图象为C选项,故选C.

4.D 提示:由 $y=3^{f'(x)}$ 的图象知,当 $x\in(-\infty,x_1)$ 时, $3^{f'(x)}>1$,则 $f'(x)>0$,当 $x\in[x_1,x_3]$ 时, $3^{f'(x)}\leq 1$,则 $f'(x)\leq 0$,当 $x\in(x_3,+\infty)$ 时, $3^{f'(x)}>1$,则 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,x_1)$ 、 $(x_3,+\infty)$,单调递减区间为 (x_1,x_3) ,故 $f(x)$ 的极小值点为 x_3 ,故选D.

5.A 提示:由函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图象知,当 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2$ 时, $f'(x)>0$;当 $\frac{1}{2}<x<2$ 时, $f'(x)<0$.

不等式 $xf'(x)>0$ 等价于 $\begin{cases} x>0, \\ f'(x)>0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0, \\ f'(x)<0, \end{cases}$

故不等式 $xf'(x)>0$ 的解集为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$.故选A.

6.D 提示:令 $f(x)=\frac{x^2}{\text{e}^x}$,所以 $a=\text{e}^{-1}=f(1)$, $b=4\text{e}^{-2}=f(2)$, $c=\text{e}^{2-\text{e}}=f(\text{e})$,且 $f'(x)=\frac{-x^2+2x}{\text{e}^x}=\frac{-x(x-2)}{\text{e}^x}$,令 $f'(x)<0$,得 $x>2$ 或 $x<0$;令 $f'(x)>0$,得 $0<x<2$,所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调递增,在 $(-\infty,0)$ 、 $(2,+\infty)$ 上单调递减,则 $f(1)<f(2)$, $f(2)>f(\text{e})$,即 $a<b$, $b>c$,由 $a-c=\frac{1}{\text{e}}-\frac{\text{e}^2}{\text{e}^{\text{e}}}=\frac{\text{e}^{\text{e}-1}-\text{e}^2}{\text{e}^{\text{e}}}<0$,则 $a<c$,所以 $a<c<b$.故选D.

7.A 提示: $f'(x)=3x^2-4cx+c^2$,因为 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处有极小值,所以 $f'(-1)=3+4c+c^2=0$,解得 $c=-1$ 或 $c=-3$.当 $c=-1$ 时, $f'(x)=3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)$,当 $-3<x<-1$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,当 $x>-1$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,此时, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处有极小值,满足题意.故选A.

8.C 提示:当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=\text{e}^x+\ln(x+1)+1$, $f'(x)=\text{e}^x+\frac{1}{x+1}$,所以在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)\geq f(0)=2$.

因为函数 $f(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-a, & x<0, \\ \text{e}^x+\ln(x+1)+1, & x\geq 0 \end{cases}$ 的值域为 \mathbf{R} ,所以只需当 $x<0$ 时, $f(x)_{\min}\geq 2$,所以当 $x<0$ 时, $f(x)=-x^2-2ax-a$ 为开口向下的抛物线,对称轴为 $x=-\frac{2a}{2}=-a$.

①若 $-a\leq 0$,即 $a\geq 0$ 时, $f(x)_{\max}=f(-a)=-(-a)^2+2a^2-a=a^2-a$,则 $a^2-a\geq 2$,解得 $a\leq -1$ 或 $a\geq 2$,又 $a\geq 0$,所以 $a\geq 2$;
②若 $-a>0$,即 $a<0$ 时, $f(x)<f(0)=a$,则 $-a\geq 2$,解得 $a\leq -2$,又 $a<0$,所以 $a\leq -2$.综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.故选C.

二、多项选择题

9.BD 提示:函数 $f(x)=ax^3+3x^2-x+1$ 恰好有三个单调区间,则 $f'(x)=3ax^2+6x-1$ 有两个不相等的零点,即 $\begin{cases} a\neq 0, \\ \Delta=36+12a>0, \end{cases}$ 解得 $a>-3$ 且 $a\neq 0$.故选BD.

10.AB 提示:由 $f'(x)$ 图象可得,当 $x<-2$ 时, $f'(x)<0$,当 $-2<x<\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)>0$,当 $\frac{1}{2}<x<2$ 时, $f'(x)<0$,当 $x>2$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上单调递增,在 $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 和 $x=2$ 处取得极小值,在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极大值.故选AB.

11.ACD 提示:由 $f(x)=4\ln x-\frac{1}{2}x^2+1$,得 $f'(x)=\frac{4}{x}-x=\frac{4-x^2}{x}(x>0)$.

对于A,因为 $f(1)=\frac{1}{2}$, $f'(1)=3$,所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-\frac{1}{2}=3(x-1)$,即 $y=3x-\frac{5}{2}$,故A正确;

对于B,C,由 $f'(x)=\frac{4-x^2}{x}=0$,得 $x=2$ 或 $x=-2$ (舍去),当 $0<x<2$ 时, $f'(x)>0$,当 $x>2$ 时, $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调递增,在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,所以当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取极大值 $f(2)=4\ln 2-1$,无极小值,故B错误,C正确;

对于D,当 $x\in[1,\text{e}]$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[1,2)$ 上单调递增,在 $(2,\text{e}]$ 上单调递减,所以 $f(x)_{\max}=f(2)=4\ln 2-1$,因为 $f(1)=\frac{1}{2}$, $f'(\text{e})=5-\frac{\text{e}^2}{2}>\frac{1}{2}$,所以 $f(x)_{\min}=f(1)=\frac{1}{2}$,故D正确.故选ACD.

三、填空题

12.0 提示:由 $f(x)=x^3-3x$,得 $f'(x)=3x^2-3$,令 $f'(x)>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>1$,令 $f'(x)<0$,解得 $-1<x<1$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-1,1)$ 内单调递减,所以函数 $f(x)$ 的极值点为 -1 和 1 ,则 $x_1+x_2=0$.

13. $\frac{3}{2}$ 提示:由题意知, $f'(x)=3x-\frac{27}{x}=\frac{3(x+3)(x-3)}{x}$,当 $x\in[1,2]$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $f(1)=\frac{3}{2}$.

14. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 提示:因为 $f'(x)+2x=[f(x)+x^2]'\geq 0$,所以令 $g(x)=f(x)+x^2$, $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

因为 $f(2x-1)+3x^2>f(1-x)+2x$,所以 $f(2x-1)+(2x-1)^2>f(1-x)+(1-x)^2$,即 $g(2x-1)>g(1-x)$,所以 $2x-1>1-x$,解得 $x>\frac{2}{3}$,所以 $f(2x-1)+3x^2>f(1-x)+2x$ 的解集为 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.

四、解答题

15.解:函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x)=2\text{e}^{2x}+(a+2)\text{e}^x+a=(2\text{e}^x+a)(\text{e}^x+1)$.当 $a\geq 0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$,则 $x=\ln\left(\frac{a}{-2}\right)$.

当 $x\in\left(-\infty,\ln\left(\frac{a}{-2}\right)\right)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,当 $x\in\left(\ln\left(\frac{a}{-2}\right),+\infty\right)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

综上,当 $a\geq 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(\frac{a}{-2}\right)\right)$ 上单调递减,在 $\left(\ln\left(\frac{a}{-2}\right),+\infty\right)$ 上单调递增.

16.解:(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,当 $a=-2$ 时, $f(x)=x^2-2\ln x$,则 $f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.令 $f'(x)<0$,得 $0<x<1$,所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,1)$.

(2) $g(x)=x^2+a\ln x+\frac{2}{x}$,则 $g'(x)=2x+\frac{a}{x}-\frac{2}{x^2}$,因为 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是单调函数,所以分以下两种情况.

①若 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,则 $g'(x)\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,即 $a\geq \frac{2}{x}-2x^2$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立.设 $h(x)=\frac{2}{x}-2x^2$,因为 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(1)=0$,所以 $a\geq 0$.

②若 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,则 $g'(x)\leq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,由①知,这不可能.综上,实数 a 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

17.解:(1)因为 $f(x)=x\left(a-\frac{\ln x}{x}\right)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,所以 $f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.

因为 $a>0$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{a}$,所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

故当 $x=\frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值,也是最小值,且最小值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$,无最大值.

(2)当 $a=1$ 时,由 $f(x)\leq \frac{ke^x-x}{x}$,可得 $x-\ln x\leq \frac{ke^x-x}{x}$,

整理得 $ke^x\geq x^2+x-x\ln x$,即 $k\geq \frac{x^2+x-x\ln x}{\text{e}^x}$,令 $h(x)=\frac{x^2+x-x\ln x}{\text{e}^x}$,则 $h'(x)=\frac{(2x+1-\ln x-1)\text{e}^x-(x^2+x-x\ln x)\text{e}^x}{(\text{e}^x)^2}=\frac{(x-\ln x)(1-x)}{\text{e}^x}$,

由(1)知,当 $a=1$ 时, $f(x)=x-\ln x$ 的最小值为 $f(1)=1>0$,即 $x-\ln x>0$ 恒成立,所以当 $x\in(0,1)$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增;当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减.

故当 $x=1$ 时, $h(x)$ 取得最大值 $h(1)=\frac{2}{\text{e}}$,即 $k\geq \frac{2}{\text{e}}$,故 k 的取值范围为 $\left[\frac{2}{\text{e}},+\infty\right)$.

18.解:(1)由题意得,销售收入为200 x 万元,当产量不足50万件时, $p(x)=\frac{1}{120}x^2+160$,利润函数为 $f(x)=200x-x\cdot p(x)-300=200x-x\cdot\left(\frac{1}{120}x^2+160\right)-300=-\frac{1}{120}x^3+40x-300$;

当产量不小于50万件时, $p(x)=201+\frac{6\,400}{x^2}-\frac{1\,460}{x}$,利润函数为 $f(x)=200x-x\cdot p(x)-300=200x-x\cdot\left(201+\frac{6\,400}{x^2}-\frac{1\,460}{x}\right)-300=-x-\frac{6\,400}{x}+1\,160$.

所以利润函数为 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{120}x^3+40x-300, & 0<x<50, \\ -x-\frac{6\,400}{x}+1\,160, & x\geq 50. \end{cases}$

(2)当 $0<x<50$ 时, $f'(x)=-\frac{1}{40}(x+40)(x-40)$.所以当 $0<x<40$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(0,40)$ 内单调递增;当 $40<x<50$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(40,50)$ 内单调递减.所以当 $x=40$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(40)=\frac{2\,300}{3}$.当 $x\geq 50$ 时, $f(x)=-\left(x+\frac{6\,400}{x}\right)+1\,160\leq -2\sqrt{x\cdot\frac{6\,400}{x}}+1\,160=1\,000$,当且仅当 $x=\frac{6\,400}{x}$,即 $x=80$ 时,等号成立.又因为 $1\,000>\frac{2\,300}{3}$,故当 $x=80$ 时,所获利润最大,最大值为1 000万元.

19.解:(1)由题意知, $f'(x)=3x^2+2ax+b$,因为函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-1$ 处取得极值2, $f(1)=2$,

所以 $\begin{cases} f'(-1)=3-2a+b=0, \\ f(1)=1+a+b+c=2, \end{cases}$ 解得 $a=1$, $b=-1$, $c=1$.

(2)若函数 $y=f(x)+m$ 在区间 $[-2,2]$ 上有3个零点,则 $y=f(x)$ 与 $y=-m$ 在区间 $[-2,2]$ 上有3个交点,由(1)知 $f(x)=x^3+x^2-x+1$, $x\in[-2,2]$, $f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{3}$,所以在 $(-2,-1)$ 内 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,在 $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ 内 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,在 $\left(\frac{1}{3},2\right)$ 内 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)_{\text{极大值}}=f(-1)=2$, $f(x)_{\text{极小值}}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+1=\frac{22}{27}$,又 $f(-2)=-1$, $f(2)=11$,

结合 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的图象,可知 $\frac{22}{27}<-m<2$,即 $-2<m<-\frac{22}{27}$,所以 m 的取值范围为 $\left(-2,-\frac{22}{27}\right)$.

数学人教A

一、单项选择题

1.D 提示:因为 $f'(x)=1-\sin x\geq 0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,因为 $2<\text{e}<\pi$,所以 $f(2)<f(\text{e})<f(\pi)$.故选D.

2.D 提示: $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x)=12-3x^2=3(4-x^2)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm 2$,当 $x\in(-\infty,-2)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,当 $x\in(-2,2)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,当 $x\in(2,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值 $f(-2)=-10$,所以 $f(x)$ 的极小值点为 -2 .故选D.

3.C 提示:由图象知,当 $x<-2$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,当 $x>-2$ 时, $f'(x)\geq 0$, $f(x)$ 单调递增,所以当 $x=-2$ 时,函数 $f(x)$ 取得极小值,无极大值,故C正确,A,B错误;因为 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减,在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增,故D错误.故选C.

4.B 提示:由题意得, $f'(x)=3x^2+2ax+b$,因为函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2(a,b\in\mathbf{R})$ 在 $x=0$ 处取得极大值9,所以 $\begin{cases} f(0)=a^2=9, \\ f'(0)=b=0, \end{cases}$ 解得 $a=3$ 或 $a=-3$, $b=0$,将 $a=3$, $b=0$ 代入 $f(x)$,可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值,不符合题意,经检验, $a=-3$, $b=0$ 符合题意,则 $a+b=-3$.故选B.

5.A 提示: $f(x)>x+1$,即 $f(x)-(x+1)>0$,令 $g(x)=f(x)-(x+1)$,则 $g'(x)=f'(x)-1<0$,故 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减.

又由 $f(2)=3$,得 $g(2)=f(2)-3=0$,故 $f(x)>x+1$,等价于 $g(x)>0$,即 $g(x)>g(2)$,得 $x<2$.故选A.

6.B 提示:因为 $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$, $x\in[0,\pi]$,则 $f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$,所以当 $0\leq x<\frac{\pi}{3}$ 时, $f'(x)<0$,当 $\frac{\pi}{3}\leq x\leq \pi$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减,在 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选B.

7.B 提示:由 $f(x)=x-\sin x$,得 $f'(x)=1-\cos x\geq 0$,则 $f(x)$ 单调递增,所以不等式 $f(x+\ln a)\geq f(\ln x)$ 恒成立,即 $x+\ln a\geq \ln x$,即 $\ln a\geq \ln x-x$ 恒成立.令 $g(x)=\ln x-x$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,所以当 $x>1$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减,当 $0<x<1$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增,所以 $g(x)_{\max}=g(1)=-1$,可得 $\ln a\geq -1$,解得 $a\geq \frac{1}{\text{e}}$.故选B.

8.D 提示:由 $x_1\ln x_2-x_2\ln x_1<4(x_1-x_2)$,得 $x_1\ln x_2-4x_1<x_2\ln x_1-4x_2$,即 $\frac{\ln x_2-4}{x_2}<\frac{\ln x_1-4}{x_1}$,又对任意的正实数 $x_1,x_2\in(a,+\infty)$,满足当 $x_1<x_2$ 时, $\frac{\ln x_2-4}{x_2}<\frac{\ln x_1-4}{x_1}$.设 $f(x)=\frac{\ln x-4}{x}$,所以 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f'(x)=\frac{5-\ln x}{x^2}\leq 0$ 在 $(a,+\infty)$ 恒成立,所以 $\ln x\geq 5$ 在 $(a,+\infty)$ 恒成立,则 $\ln a\geq 5$,解得 $a\geq \text{e}^5$,即实数 a 的取值范围为 $[\text{e}^5,+\infty)$.故选D.

二、多项选择题

9.AD 提示:对于A,在区间 $(-2,0)$ 内, $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 内单调递增,必有 $f(-2)<f(-1)$,故A正确;对于B, $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 内单调递增,必有 $f(-1)<f(0)$,故B错误;

对于C,在区间 $(1,2)$ 内, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,在区间 $(2,3)$ 内, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,所以不能确定 $f(1)$ 、 $f(3)$ 的大小,故C错误;

对于D,在区间 $(2,4)$ 内, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,必有 $f(2)>f(4)$,故D正确.

故选AD.

10.ABD 提示:由 $f(x)=\frac{x}{\text{e}^x}$, $x\in\mathbf{R}$,得 $f'(x)=\frac{1-x}{\text{e}^x}$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=\frac{1}{\text{e}}$, $f(0)=0$, $x\rightarrow+\infty$, $f(x)\rightarrow 0$,因为 $0<\frac{1}{2\,024}<\frac{1}{\text{e}}$,所以 $y=\frac{1}{2\,024}$ 与 $y=f(x)$ 的图象

高二选择性必修(第二册)答案页第2期

有2个不同的交点,所以方程2 024 $f(x)=1$ 有2个不同的解.因为 $f'(1)=0$, $f(1)=\frac{1}{\text{e}}$,所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-\frac{1}{\text{e}}=0$,即 $\text{e}y-1=0$.故选ABD.

11.ABC 提示:令 $f'(x)=2x(3x-a)=0$,得 $x_1=0$, $x_2=\frac{a}{3}$ ($a<0$).当 $\frac{a}{3}<x<0$ 时, $f'(x)<0$;当 $x<\frac{a}{3}$ 或 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$, $(0,+\infty)$,单调递减区间为 $\left(\frac{a}{3},0\right)$.

从而 $f(x)$ 在 $x=\frac{a}{3}$ 处取得极大值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}$.

由 $f(x)=-\frac{a^3}{27}$,得 $\left(x-\frac{a}{3}\right)^2\left(2x+\frac{a}{3}\right)=0$.

解得 $x=\frac{a}{3}$ 或 $x=-\frac{a}{6}$,又 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2},\frac{a+6}{3}\right)$ 上有最大值,所以 $\frac{a}{2}<\frac{a}{3}<\frac{a+6}{3}\leq -\frac{a}{6}$,解得 $a\leq -4$,

结合选项可知, a 的取值可能为 -6 , -5 , -4 .故选ABC.
三、填空题
12. $(-\infty,1)$ 提示:易知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x)=\text{e}^x-\text{e}$,令 $f'(x)<0$,解得 $x<1$,则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1)$.

13.1,-e 提示:令 $f(x)=(x-2)\text{e}^x=0$,得 $x=2$,则 $f(x)$ 的零点个数为1. $f'(x)=\text{e}^x+(x-2)\text{e}^x=(x-1)\text{e}^x$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$,所以当 $x\in(-\infty,1)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值,极小值为 $f(1)=-\text{e}$.

14. $\left[\frac{1}{\text{e}},\text{e}\right]$ 提示:由 $\ln a$ 有意义,知 $a>0$.由 $(\text{e}-1)\cdot(\ln a+x)\geq \text{ae}^x-1$,得 $(\text{e}-1)\ln(\text{ae}^x)\geq \text{ae}^x-1$,令 $t=\text{ae}^x$,则 $(\text{e}-1)\cdot\ln t\geq t-1$.因为 $x\in[0,1]$, $a>0$,所以 $t=\text{ae}^x\in[a,\text{ae}]$,令 $f(t)=(\text{e}-1)\ln t-t+1$,问题转化为存在 $t\in[a,\text{ae}]$,使得 $f(t)\geq 0$.因为 $f'(t)=\frac{\text{e}-1-t}{t}$,令 $f'(t)<$