

高考版答案页第 5 期

对于 B, 两圆的方程作差, 化简得, 两圆的公共弦所在直线方程是 $x+3y-10=0$, 故 B 错误; 对于 C, 由 $A(5, 5)$ 到直线 $x+3y-10=0$ 的距离为 $d=\frac{|5+15-10|}{\sqrt{1+9}}=\sqrt{10}$, 且 $2d=2\sqrt{10}<$

$5\sqrt{2}$, 所以 $\odot A$ 上到直线 $x+3y-10=0$ 的距离为 $\sqrt{10}$ 的点有四个, 故 C 正确; 对于 D, 由题意, 得 $[(x-5)^2+(y-5)^2]_{\max}$ 的几何意义为 $A(5, 5)$ 到 $\odot B$ 上点的距离的平方的最大值, 所以结合选项 A, 得 $[(x-5)^2+(y-5)^2]_{\max}=(|AB|+R_B)^2=(2\sqrt{10}+5\sqrt{2})^2=90+40\sqrt{5}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题

12. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 提示: 由直线 $3x+2y-3=0$ 与直线 $6x+my+7=0$ 互相平行, 得 $m=4$, 则直线 $3x+2y-3=0$ 与直线 $3x+2y+\frac{7}{2}=0$ 之间的距离为 $d=\frac{|\frac{7}{2}+3|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

13. $(x-3)^2+y^2=5$ 提示: 设圆心为 $C(a, 0)$, 由题意, 得 $\sqrt{(a-1)^2+(0-1)^2}=\frac{|2a-1|}{\sqrt{4+1}}$, 解得 $a=3$, 所以圆 C 的半径为 $r=\frac{|6-1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, 则圆 C 的标准方程为 $(x-3)^2+y^2=5$.

14. $(-21, -11)\cup(-1, 9)$ 提示: 圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 的圆心为 $(2, 0)$, 半径为 2. 圆心到直线 $3x+4y+a=0$ 的距离 $d=\frac{|6+a|}{5}$, 因为圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 上有且仅有两个点到直线 $3x+4y+a=0$ 的距离为 1, 所以 $r-1< d < r+1$, 即 $1<\frac{|6+a|}{5}<3$, 解得 $a\in(-21, -11)\cup(-1, 9)$.

四、解答题

15. 解: (1) 因为 $B(4, 3)$, $C(3, -2)$, 所以 $k_{BC}=5$. 因为 AD 是 BC 边上的高, 所以 $k_{AD}\cdot k_{BC}=-1$, 得 $k_{AD}=-\frac{1}{5}$, 所以高 AD 所在直线方程为 $y-1=-\frac{1}{5}(x+2)$, 即 $x+5y-3=0$.

(2) 因为 $A(-2, 1)$, 点 $M(3, 1)$ 为边 AC 的中点, 所以 $C(8, 1)$, 又 $B(4, 3)$, 则 BC 边所在直线的方程为 $\frac{y-3}{3-1}=\frac{x-4}{4-8}$, 即 $x+2y-10=0$.

16. 解: (1) 因为边 AC 上的高 BH 所在直线方程为 $x-y+6=0$, 所以设直线 AC 的方程为 $x+y+c=0$. 又点 $A(3, 3)$ 在直线 AC 上, 则 $3+3+c=0$, 解得 $c=-6$, 所以直线 AC 的方程为 $x+y-6=0$.

(2) 因为点 C 既在直线 $5x-3y-14=0$ 上, 又在直线 $x+y-6=0$ 上, 联立 $\begin{cases} 5x-3y-14=0, \\ x+y-6=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=2, \end{cases}$ 即 $C(4, 2)$, 所以 $|AC|=\sqrt{2}$. 设 $B(a, b)$, 因为点 B 在直线 $x-y+6=0$ 上, 则 $a-b+6=0$, 又 AB 的中点为 $M(\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2})$, 所以 $5\times\frac{a+3}{2}-$

$3\times\frac{b+3}{2}-14=0$, 即 $5a-3b-22=0$, 联立 $\begin{cases} a-b+6=0, \\ 5a-3b-22=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=20, \\ b=26, \end{cases}$ 则 $B(20, 26)$, 所以点 $B(20, 26)$ 到直线 $x+y-6=0$ 的距离 $d=\frac{|20+26-6|}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}$, 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 20\sqrt{2}=20$.

17. 解: (1) 因为圆心 C 在直线 $x-y+3=0$ 上, 则设圆心 $C(a, a+3)$, 又圆 C 与 x 轴相切, 所以半径 $r=|a+3|$, 则圆 C 的标准方程为 $(x-a)^2+(y-a-3)^2=(a+3)^2$. 又圆 C 过点 $M(-3, 2)$, 所以 $(-3-a)^2+(2-a-3)^2=(a+3)^2$, 解得 $a=-1$, 所以圆 C 的标准方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

(2) 当切线的斜率不存在时, 则切线方程为 $x=-3$, 因为圆心 $C(-1, 2)$ 到直线 $x=-3$ 的距离为 2, 所以 $x=-3$ 是圆 C 的一条切线方程.

当切线的斜率存在时, 设切线方程为 $y-3=k(x+3)$, 即 $kx-y+3k+3=0$. 所以圆心 C 到该直线的距离 $d=\frac{|-k-2+3k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, 解得 $k=\frac{3}{4}$.

所以切线方程为 $y-3=\frac{3}{4}(x+3)$, 即 $3x-4y+21=0$.
综上, 所求切线方程为 $x=-3$ 或 $3x-4y+21=0$.

18. 解: (1) 设圆 C 的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, 得圆心为 $C(a, b)$, 半径为 r . 将 $A(-1, 1)$ 与 $B(-2, -2)$ 代入圆方程, 得 $(-1-a)^2+(1-b)^2=r^2$, $(-2-a)^2+(-2-b)^2=r^2$, 消去 r , 整理得, $a+3b+3=0$, ①

又圆心在直线 $l: x+y-1=0$ 上, 得 $a+b-1=0$, ②
联立 ①②, 解得 $a=3$, $b=-2$, 则 $r^2=(-1-3)^2+(1+2)^2=25$, 所以圆 C 的标准方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=25$.

数学



扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 17 期
第 2~3 版同步周测参考答案
一、单项选择题
1.C 提示: 由题意, 得 $(3a-1)\cdot 1+2a\cdot(-a)=0$, 即 $2a^2-3a+1=0$, 解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$. 故选 C.

2.C 提示: 因为 $A(2, 1)$, $B(-4, -a)$ 两点到直线 $l: x-y+2=0$ 的距离相等, 所以 $\frac{|2-1+2|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{|-4-a+2|}{\sqrt{1+(-1)^2}}$, 即 $|a+2|=3$, 解得 $a=1$ 或 $a=-5$. 故选 C.

3.B 提示: 因为点 $A(2, 4)$, $B(0, 2)$, 所以 $k_{AB}=1$, 线段 AB 的中点坐标为 $(1, 3)$, 所以线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y-3=-(x-1)$, 即 $x+y-4=0$. 故选 B.

4.C 提示: 由题意得, 圆的半径 $r=|AB|=\sqrt{5}$, 所以圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$, 则圆的一般方程为 $x^2+y^2-2x+2y-3=0$, 故选 C.

5.B 提示: 因为圆 $C: (x-1)^2+(y-1)^2=8$, 所以圆心为 $C(1, 1)$, 半径 $r=2\sqrt{2}$, 则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|1-1+6|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}>r$, 所以直线 l 和圆 C 相离, 所以圆 C 上的点到直线 l 的距离的最小值为 $d-r=\sqrt{2}$. 故选 B.

6.D 提示: 由题意, 得直线 $l: (2x+y-9)m+(x+y-7)=0$, 由 $\begin{cases} 2x+y-9=0, \\ x+y-7=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=5, \end{cases}$ 所以直线 l 过定点 $A(2, 5)$, 圆 $C: (x-3)^2+(y-2)^2=16$ 的圆心为 $C(3, 2)$, 半径 $r=4$, 所以 $|AC|=\sqrt{10}<r$, 即点 $A(2, 5)$ 在圆 C 内, 直线 AC 斜率 $k_{AC}=-3$, 所以当 $l\perp AC$ 时, 直线 l 被圆 C 截得的弦最短, 此时直线 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$, 则直线 l 的方程为 $y-5=\frac{1}{3}(x-2)$, 即 $x-3y+13=0$. 故选 D.

7.B 提示: 由圆 $M_1: (x-2)^2+(y-1)^2=2$, 得圆心为 $M_1(2, 1)$, 半径 $r_1=\sqrt{2}$, 由圆 $M_2: x^2+y^2-2x+2y+1=0$, 即 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$, 得圆心为 $M_2(1, -1)$, 半径 $r_2=1$. 设圆心 $M_1(2, 1)$ 关于 y 轴的对称点为 M_3 , 则 $M_3(-2, 1)$, 所以 $|PM_1|\cdot|PM_2|=|PM_3|\cdot|PM_2|\geq|M_3M_2|=\sqrt{13}$. 故选 B.

8.A 提示: 圆 $C: (x+2)^2+(y+3)^2=12$ 的圆心为 $C(-2, -3)$, 半径 $r=2\sqrt{3}$. 因为 $|PM|\cdot|PN|\cdot|CM|=|CN|=2\sqrt{3}$,

$\sin\angle MPC=\frac{|CM|}{|PC|}=\frac{2\sqrt{3}}{|PC|}$, 且 $\angle MPN=2\angle MPC$, 所以 $\angle MPN$ 取最大值时, $\angle MPC$ 取最大值, 则 $|PC|$ 取最小值. $|PC|$ 的最小值等于圆心 C 到直线 l 的距离, 所以 $|PC|_{\min}=\frac{|3\times(-2)+4\times(-3)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$, 此时 $\sin\angle MPC=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\angle MPC=60^\circ$, $\angle MPN$ 的最大值为 $2\times 60^\circ=120^\circ$. 故选 A.

二、多项选择题

9.CD 提示: 对于 A, 当截距为 0 时, 可设直线方程为 $y=kx$, 由直线过点 $P(1, 2)$, 得 $k=2$, 则直线方程为 $y=2x$, 当截距不为 0 时, 可设直线方程为 $x+y=a(a\neq 0)$, 由直线过点 $P(1, 2)$, 得 $a=3$, 直线方程为 $x+y=3=0$. 综上, 所求直线方程为 $2x-y=0$ 或 $x+y-3=0$, 故 A 错误; 对于 B, 直线 $y=kx-2$ 在 y 轴的截距是 -2, 故 B 错误; 对于 C, 直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则该直线的倾斜角为 30° , 故 C 正确; 对于 D, 由直线的倾斜角为 90° , 得该直线的斜率不存在, 又直线过点 $(5, 4)$, 则所求直线的方程为 $x=5$, 即 $x-5=0$, 故 D 正确. 故选 CD.

10.BC 提示: 由圆 M 的一般方程为 $x^2+y^2-8x+6y=0$, 得圆 M 的标准方程为 $(x-4)^2+(y+3)^2=25$, 则圆心为 $M(4, -3)$, 半径为 5, 则直径为 10, 故 A 错误. B 正确: 由圆心 $M(4, -3)$ 到 x 轴的距离为 3, 得圆 M 被 x 轴截得的弦长为 $2\sqrt{5^2-3^2}=8$, 故 C 正确; 设圆心 $M(4, -3)$ 关于直线 $y=x-2$ 对称的点为

$M'(a, b)$, 则 $\begin{cases} \frac{b+3}{a-4}=-1, \\ \frac{b-3}{2}=\frac{a+4}{2}-2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=2, \end{cases}$ 即 $M'(-1, 2)$, 又圆 M 关于直线 $y=x-2$ 对称的圆的半径为 5, 所以圆 M 关于直线 $y=x-2$ 对称的圆的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, 即 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$, 故 D 错误. 故选 BC.

11.AD 提示: 对于 A, 由 $\odot A: x^2+y^2-10x-10y=0$, 即 $(x-5)^2+(y-5)^2=50$, 得其圆心为 $A(5, 5)$, 半径为 $R_A=5\sqrt{2}$, $\odot B: x^2+y^2-6x+2y-40=0$, 即 $(x-3)^2+(y+1)^2=50$, 得其圆心为 $B(3, -1)$, 半径为 $R_B=5\sqrt{2}$, 则两圆的圆心距为 $|AB|=2\sqrt{10}$, 则 $R_A-R_B<|AB|<R_A+R_B$, 所以两圆相交, 故 A 正确;

(舍去); 当 l_2 与 l 之间的距离为 $6\sqrt{2}$ 时, 得 $\frac{|t-4|}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$, 解得 $t=-8$ 或 $t=16$ (舍去).

综上, 直线 l 的方程为 $x-y-8=0$ 或 $x-y+8=0$.
17. 解: (1) 因为 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$, 结合双曲线的定义, 则 $2a=4$, 所以 $a=2$, 所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 由题意, 可知 $k\neq\pm\frac{1}{2}$, 联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{4}-y^2=1, \end{cases}$ 得 $(1-4k^2)x^2-8kx-8=0$, 则 $\Delta=(-8k)^2-4\times(-8)\cdot(1-4k^2)=32(1-2k^2)>0$, 得 $k^2<\frac{1}{2}$, 且 $x_1+x_2=\frac{8k}{1-4k^2}$, $x_1x_2=\frac{-8}{1-4k^2}$. 又点 O 到 $l_{MN}: y=kx+1$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, 所以 $S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|\cdot\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{2}$

$=2\sqrt{\frac{2-4k^2}{(1-4k^2)^2}}=2\sqrt{6}$, 令 $t=k^2$, 则 $t<\frac{1}{2}$, 上式化为 $24t^2-11t+1=0$, 解得 $t=\frac{1}{3}$ 或 $t=\frac{1}{8}$, 所以 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

18. 解: (1) 由题意, 得 $A_2(a, 0)$, $G(0, b)$, 则直线 A_2G 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, 即 $bx+ay-ab=0$, 因为直线 A_2G 与圆 $x^2+y^2=\frac{8}{3}$ 相切, 所以 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$, 即 $8(a^2+b^2)=3a^2b^2$, ①

又 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $a^2=2b^2$, ②
联立 ①②, 解得 $a^2=8$, $b^2=4$, 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 由 (1) 可得, 右焦点 $F(2, 0)$. 当直线 l 的斜率不存在时, 则 A, B 关于 x 轴对称, 要使 $|MA|\cdot|MB|$, 则 M 与原点 O 重合, 此时 $m=0$.

当直线 l 的斜率存在且不为 0 时, 设直线 l 的方程为 $x=ty+2$, $t\neq 0$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} x=ty+2, \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得 $(2+t^2)\cdot y^2+4ty-4=0$, 则 $y_1+y_2=-\frac{4t}{2+t^2}$, $x_1+x_2=t(y_1+y_2)+4=-\frac{8}{2+t^2}$, 所以 AB 的中点 $D(\frac{4}{2+t^2}, -\frac{2t}{2+t^2})$, 因为 $|MA|\cdot|MB|$, 所以 $MD\perp AB$, 则 $k_{MD}=\frac{m+\frac{2}{2+t^2}}{\frac{4}{2+t^2}}=-t$, 可得 $m=\frac{2t}{2+t^2}$, 因为 $t\neq 0$, 所以

$\frac{2t}{2+t^2}=\frac{2}{t}$, 当 $t>0$ 时, 则 $t+\frac{2}{t}\geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $t=\frac{2}{t}$, 即 $t=\sqrt{2}$ 时, 取等号, 所以 $0<m\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $t<0$ 时, $-t+(\frac{2}{t})\geq 2\sqrt{2}$, 所以 $t+\frac{2}{t}\leq-2\sqrt{2}$, 当且仅当 $-t=-\frac{2}{t}$, 即 $t=-\sqrt{2}$ 时, 取等号, 所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq m<0$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

19. (1) 解: 由题意, 得 $\begin{cases} 64m-7n=1, \\ 16m-n=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=\frac{1}{8}, \\ n=1, \end{cases}$ 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$, 则 $a=2\sqrt{2}$, $c=3$, 所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

(2) 证明: 由 (1) 知, 双曲线 C 的右焦点为 $(3, 0)$, 则直线 $l: y=k(x-3)$, 联立 $\begin{cases} y=k(x-3), \\ \frac{x^2}{8}-y^2=1, \end{cases}$ 得 $(1-8k^2)x^2+48k^2x-72k^2-8=0$, 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $1-8k^2\neq 0$, 即 $k^2\neq\frac{1}{8}$. 且 $x_1+x_2=\frac{48k^2}{8k^2-1}$, $x_1x_2=\frac{72k^2+8}{8k^2-1}$, 因为点 N 关于 x 轴的对称点为 P , 所以 $P(x_2, -y_2)$, 则直线 PM 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$, 根据对称性可知, 直线 PM 经过的定点必

在 x 轴上, 令 $y=0$, 得 $x=\frac{-y_1(x_1-x_2)}{x_1-y_1+y_2}+x_1=\frac{y_1x_2+x_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{kx_2(x_1-3)+kx_1(x_2-3)}{k(x_1-3)+k(x_2-3)}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)}{k(x_1+x_2)-6k}$.

当 $k\neq 0$ 且 $k^2\neq\frac{1}{8}$ 时, $x=\frac{2\cdot\frac{72k^2+8}{8k^2-1}-3\cdot\frac{48k^2}{8k^2-1}}{\frac{48k^2}{8k^2-1}-6}=\frac{144k^2+16-144k^2}{48k^2-(48k^2-6)}=\frac{8}{3}$.

所以直线 PM 过定点 $(\frac{8}{3}, 0)$.

外接圆半径 $R=\frac{1}{2}\cdot\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=\frac{c}{\sin\angle F_1PF_2}=\frac{a^2}{2b}$, 即 $\triangle F_1PF_2$ 的外接圆半径的最小值为 $\frac{a^2}{2b}$, 故 D 正确. 故选 AD.

11. BCD 提示: 对于 A, 由双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{3}=1$, 得 $a=1$, $c=2$, 则离心率 $e=\frac{c}{a}=2$, 故 A 错误; 对于 B, 当 $m=\sqrt{3}$ 时, 直线 $l: x=\sqrt{3}y-1$, 联立 $\begin{cases} x=\sqrt{3}y-1, \\ \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $\frac{8}{3}y^2-2\sqrt{3}y=0$, 解得 $y=0$ 或 $y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 所以 $|MN|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\times|\frac{3\sqrt{3}}{4}-0|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 故 B 正确; 对于 C, 由直线 $l: x=my-1$, 得 $M(-1, 0)$, 可设直线 PM, PF_2 的斜率分别为 $k, -k$, 则直线 MP 的方程为 $y=k(x+1)$, 联立 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(3-k^2)x^2-2k^2x-k^2-3=0$, 设 $N(x_1, y_1)$, 则 $3-k^2\neq 0$, $-x_1=\frac{-k^2-3}{3-k^2}$, 则 $x_1=\frac{3+k^2}{3-k^2}$, 所以 $N(\frac{3+k^2}{3-k^2}, \frac{6k}{3-k^2})$. 当 $NF_2\perp x$ 轴时, $|MF_2|\cdot|NF_2|=3$, $\triangle MF_2N$ 是等腰直角三角形, 又 $P(\frac{1}{2}, y_0)$, 则 $\angle PF_2M=\angle NF_2P=45^\circ$; 当 NF_2 不垂直于 x 轴时, 直线 NF_2 的斜率为 $\frac{2k}{k^2-1}$, 所以 $\tan\angle NF_2M=-\frac{2k}{k^2-1}$, 因为 $\tan\angle PF_2M=k$, 所以 $\tan 2\angle PF_2M=\frac{2k}{1-k^2}=\tan\angle NF_2M$, 所以 $2\angle PF_2M=\angle NF_2M$, 则 $\angle PF_2M=\angle NF_2P$, 故 C 正确; 对于 D, 因为 $QF_1\parallel PF_2$, 结合 C 选项, 所以 $\angle F_2F_1Q=\angle PF_2M=\angle NF_2P=\angle F_2QF_1$, 所以 $|QF_2|\cdot|F_1F_2|=4$, 故 D 正确. 故选 BCD.

三、填空题

12. 提示: 由题意, 得 $a=2$, 离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $c=\sqrt{3}$, 所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$, 故椭圆的短轴长为 $2b=2$.

13. $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ 提示: 因为 $A(2, \sqrt{3})$, 将 $y=\sqrt{3}$ 代入 $y^2=2x$, 得 $x=\frac{3}{2}$, 所以 $B(\frac{3}{2}, \sqrt{3})$, 设抛物线的焦点为 F , 由抛物线的光学性质, 可知 BC 过焦点 F , 又 $F(\frac{1}{2}, 0)$, 则 BC 与 x 轴交点的横坐标为 $\frac{1}{2}$, 直线 BF 的斜率为 $\sqrt{3}$, 所以直线 BC 的倾斜角为 60° , 且 $\angle ABC=120^\circ$, 所以 $|BC|=\frac{2p}{\sin^2 60^\circ}=\frac{8}{3}$.

又 $|AB|=\frac{1}{2}$, 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. 2 提示: 设 $\frac{|PI|}{|IQ|}=\lambda$, 由 I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心, 得 $\frac{|PI|}{|IQ|}=\frac{|PF_1|}{|F_1Q|}=\frac{|PF_2|}{|F_2Q|}=\lambda$, 则 $|PF_2|=\lambda|F_2Q|$, $|PF_1|=\lambda|F_1Q|$, 由双曲线的定义, 得 $|PF_2|\cdot|PF_1|=2a$, 又 $|F_1Q|+|F_2Q|=|F_1F_2|=2c$, 所以 $|PF_1|=\lambda c-a$, $|PF_2|=\lambda c+a$, 又 $\angle PF_1F_2=\frac{2\pi}{3}$, 所以在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理, 得 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\angle PF_1F_2$, 即 $(\lambda c+a)^2=(\lambda c-a)^2+(2c)^2-2(\lambda c-a)\cdot 2c\cdot(-\frac{1}{2})$, 则 $(2+\lambda)c=2\lambda+1$, 又 $c=\frac{5}{4}$, 代入上式, 解得 $\lambda=2$.

四、解答题

15. 解: (1) 将点 $P(4, 2)$ 代入 $x^2=2py$, 得 $16=4p$, 解得 $p=4$, 所以抛物线的焦点到其准线的距离为 4.

(2) 由 (1) 可知抛物线的方程为 $x^2=8y$. 由题意, 得直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y=kx+b(b\neq 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} x^2=8y, \\ y=kx+b, \end{cases}$ 得 $x^2-8kx-8b=0$, 所以 $x_1+x_2=8k$, $x_1x_2=-8b$, 因为 $\angle AOB=90^\circ$, 所以 $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$, 则 $x_1x_2+y_1y_2=0$, 即 $x_1x_2+\frac{x_1^2}{8}+\frac{x_2^2}{8}=0$, 所以 $b^2-8b=0$, 解得 $b=8$ 或 $b=0$ (舍去), 所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot|x_1-x_2|=4\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{64k^2+256}\geq 64$, 当 $k=0$ 时, $\triangle AOB$ 的面积取得最小值 64.

16. 解: (1) 联立 $\begin{cases} x^2+\frac{y^2}{4}=1, \\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得 $4x^2+6tx+3t^2-12=0$, 因得直线 l 与椭圆 C 没有公共点, 所以 $\Delta=36t^2-4\times 4\times(3t^2-12)<0$, 解得 $t>4$ 或 $t<-4$.

(2) 由题意, 点 P 到直线 l

