

第13期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:结合正弦曲线可得 $y=\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图象与 x 轴有 3 个交点. 故选 C.

2.D

提示:当 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 时, $y=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减,且当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $y=1$, 当 $x=\frac{\pi}{3}$

时, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 当 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时, $y=\frac{1}{2}$, 所以 $y=\sin x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. 故选 D.

3.C

提示:令 $2k\pi-\pi\leq 2x-\frac{\pi}{4}\leq 2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$. 结合选项可知选 C.

4.C

提示:令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

结合选项可知选 C.

5.A

提示:当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x\geq 1$, 得 $\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2}$.

根据正切函数的周期性,得 $\tan x\geq 1$ 的解集为

$$\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{4}\leq x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}.$$

故选 A.

6.B

提示:由 $f(x)=\sin \omega x$, 知 $f(x_1)=-1$ 为 $f(x)$ 的最小值, $f(x_2)=1$ 为 $f(x)$ 的最大值,

$$\text{所以 } |x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}, \text{ 即 } \frac{T}{2}=\frac{T}{2}\cdot\frac{2\pi}{2\omega}, \text{ 得 } \omega=2.$$

故选 B.

7.B

提示:因为 $n=2\,024$, 所以 $x=\cos\frac{2k\pi}{2\,024}=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$, $k\in\mathbf{Z}$.

当 $0\leq k\leq 1\,012$ 且 $k\in\mathbf{Z}$ 时, $x=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$ 恰好取到半个周

期内的值,且 $x=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$ 单调递减,

所以 $x=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$ 在半个周期内有 1 013 个不同的值,再根据对称性,得 $x=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$ 在 1 个周期内有 1 013 个不同的值.

由集合中元素的互异性,得集合 A 中元素的个数为 1 013.

故选 B.

8.C

提示:由图知 $\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$, 即 $\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{4}$, 得 $\omega=2$.

因为 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=A\tan\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$,

$$\text{所以 } \frac{5\pi}{6}+\varphi=k\pi, k\in\mathbf{Z}, \text{ 得 } \varphi=-\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbf{Z}.$$

$$\text{又 } |\varphi|<\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi=-\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{由 } f(0)=A\tan\frac{\pi}{6}=1, \text{ 得 } A=\sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } f(x)=\sqrt{3}\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{13\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\tan\left(2\times\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\tan\frac{7\pi}{3}=3.$$

故选 C.

二、多项选择题

9.AD

提示:由正切函数的性质知,与函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象不相交的直线满足 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 得 $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. 结合选项,可知选 AD.

10.CD

提示:因为 $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$, 而 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增,所以 $\sin\frac{1}{5}<\sin\frac{1}{2}$, 故 A 错误;因为 $0<\frac{3\pi}{5}<\frac{6\pi}{7}<\pi$, 而 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 内单调递减,所以 $\cos\frac{3\pi}{5}>\cos\frac{6\pi}{7}$, 故 B 错

第13期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:结合正弦曲线可得 $y=\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图象与 x 轴有 3 个交点. 故选 C.

2.D

提示:当 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 时, $y=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减,且当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $y=1$, 当 $x=\frac{\pi}{3}$

时, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 当 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时, $y=\frac{1}{2}$, 所以 $y=\sin x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. 故选 D.

3.C

提示:令 $2k\pi-\pi\leq 2x-\frac{\pi}{4}\leq 2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$. 结合选项可知选 C.

4.C

提示:令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

结合选项可知选 C.

5.A

提示:当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x\geq 1$, 得 $\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2}$.

根据正切函数的周期性,得 $\tan x\geq 1$ 的解集为

$$\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{4}\leq x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}.$$

故选 A.

6.B

提示:由 $f(x)=\sin \omega x$, 知 $f(x_1)=-1$ 为 $f(x)$ 的最小值, $f(x_2)=1$ 为 $f(x)$ 的最大值,

$$\text{所以 } |x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}, \text{ 即 } \frac{T}{2}=\frac{T}{2}\cdot\frac{2\pi}{2\omega}, \text{ 得 } \omega=2.$$

故选 B.

7.B

提示:因为 $n=2\,024$, 所以 $x=\cos\frac{2k\pi}{2\,024}=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$, $k\in\mathbf{Z}$.

当 $0\leq k\leq 1\,012$ 且 $k\in\mathbf{Z}$ 时, $x=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$ 恰好取到半个周

期内的值,且 $x=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$ 单调递减,

所以 $x=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$ 在半个周期内有 1 013 个不同的值,再根据对称性,得 $x=\cos\frac{k\pi}{1\,012}$ 在 1 个周期内有 1 013 个不同的值.

由集合中元素的互异性,得集合 A 中元素的个数为 1 013.

故选 B.

8.C

提示:由图知 $\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$, 即 $\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{4}$, 得 $\omega=2$.

因为 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=A\tan\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$,

$$\text{所以 } \frac{5\pi}{6}+\varphi=k\pi, k\in\mathbf{Z}, \text{ 得 } \varphi=-\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbf{Z}.$$

$$\text{又 } |\varphi|<\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi=-\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{由 } f(0)=A\tan\frac{\pi}{6}=1, \text{ 得 } A=\sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } f(x)=\sqrt{3}\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{13\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\tan\left(2\times\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\tan\frac{7\pi}{3}=3.$$

故选 C.

二、多项选择题

9.AD

提示:由正切函数的性质知,与函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象不相交的直线满足 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 得 $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. 结合选项,可知选 AD.

10.CD

提示:因为 $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$, 而 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增,所以 $\sin\frac{1}{5}<\sin\frac{1}{2}$, 故 A 错误;因为 $0<\frac{3\pi}{5}<\frac{6\pi}{7}<\pi$, 而 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 内单调递减,所以 $\cos\frac{3\pi}{5}>\cos\frac{6\pi}{7}$, 故 B 错

$\frac{\pi}{12}$),故 D 正确.

故选 BCD.

三、填空题

12. $-\frac{\pi}{2}$

提示:由已知,得 $\beta=\alpha+\pi+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 所以 $\cos\beta=\cos(\alpha+\pi+2k\pi)=-\cos\alpha$.

$$\text{当 } \alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right] \text{ 时, } \cos\alpha\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

$$\text{则 } \cos\beta\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right]. \text{ 所以 } \cos\beta \text{ 的最大值为 } -\frac{1}{2}.$$

13. π

$$\text{提示: } y=\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

故它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

$$14. \frac{\pi}{6}, -\frac{5}{13}$$

$$\text{提示:令 } f(x)=0, \text{ 得 } \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{12}{13}.$$

因为 α, β 是函数 $f(x)=13\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-12$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的两个零点,

所以 α, β 是方程 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{12}{13}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的两个

$$\text{实根, 即 } \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\beta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{12}{13}.$$

$$\text{当 } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } 2x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right), \text{ 结合正弦曲线, 得}$$

$$\frac{2\alpha+\frac{\pi}{3}+2\beta+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}. \text{ 所以 } \beta=\frac{\pi}{6}-\alpha.$$

$$\text{结合 } 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}, \text{ 得 } 0<2\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}, \text{ 故 } \cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)>0.$$

$$\text{又 } \cos^2\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

$$\text{解得 } \cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{13} \text{ (负值舍去)}.$$

$$\text{所以 } \sin(\alpha-\beta)=\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{5}{13}.$$

四、解答题

15. 解:(1)由角 α 的终边经过点 $P(2,-3)$, 得 $\tan\alpha=-\frac{3}{2}$.

$$\text{故 } \frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)\sin\alpha}{(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}=-\tan\alpha=\frac{3}{2}.$$

$$(2) 2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha+1=\frac{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1=\frac{2\tan^2\alpha-3}{\tan^2\alpha+1}$$

$$=\frac{2\times\frac{9}{4}-3}{\frac{9}{4}+1}=\frac{19}{13}.$$

$$16. \text{解: (1) 若选 } T_1, \text{ 将函数 } g(x)=3\sin x+3 \text{ 的图象纵坐标不变, 横坐标伸长为原来的 2 倍, 得到 } y=3\sin\frac{1}{2}x+3 \text{ 的图}$$

$$\text{象, 再向左平移 } \frac{\pi}{3} \text{ 个单位长度, 得到 } y=f(x)=3\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]+$$

$$3=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+3 \text{ 的图象.}$$

$$\text{若选 } T_2, \text{ 将函数 } g(x)=3\sin x+3 \text{ 的图象向左平移 } \frac{\pi}{6} \text{ 个}$$

$$\text{单位长度, 得到 } y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3 \text{ 的图象, 再纵坐标不变,}$$

$$\text{再向左平移 } \frac{\pi}{3} \text{ 个单位长度, 得到 } y=f(x)=3\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]+$$

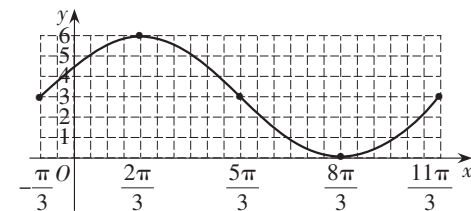
$$3=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+3 \text{ 的图象.}$$

$$\text{综上, 选择 } T_1, T_2 \text{ 两种变换均得 } f(x)=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+3.$$

列表:

$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$
$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$	0	1	0	-1	0
$f(x)$	3	6	3	0	3

描点并用光滑的曲线连接, 如图所示.



(第16题图)

(2) 令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,

$$\text{解得 } \frac{2\pi}{3}+4k\pi\leq x\leq\frac{8\pi}{3}+4k\pi, k\in\mathbf{Z},$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为

$$\left[\frac{2\pi}{3}+4k\pi, \frac{8\pi}{3}+4k\pi\right], k\in\mathbf{Z}.$$

$$\text{当 } \frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}, \text{ 即 } x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi, k\in\mathbf{Z} \text{ 时, } f(x)$$

$$\text{取得最大值 6, 此时对应 } x \text{ 的取值集合为 } \left\{x\left|x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}.$$

$$17. \text{解: (1) 因为 } \alpha\in(0,\pi), \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \sin\alpha=$$

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ 所以 } \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5},$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}.$$

$$(2) \text{ 因为 } \alpha\in(0,\pi), \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}>0, \text{ 所以 } \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{又 } \beta\in(0,\pi), \text{ 所以 } \alpha+\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\text{又 } \sin(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}<0, \text{ 所以 } \alpha+\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$\text{所以 } \sin(3\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta+2\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos 2\alpha+$$

$$\cos(\alpha+\beta)\sin 2\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{4}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{由 } \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \text{ 得 } 2\alpha\in(0,\pi),$$

$$\text{又 } \cos 2\alpha=-\frac{3}{5}<0, \text{ 所以 } 2\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right), \text{ 又 } \alpha+\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } 3\alpha+\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right). \text{ 所以 } 3\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}.$$

18. 解:(1)如图1所示,根据正切函数与余弦函数图象的对称性,得阴影部分的面积等价于矩形 $ABCO$ 的面积,

$$\text{故 } \frac{\pi}{\omega}x=1, \text{ 解得 } \omega=\frac{\pi}{4}, \text{ 所以 } f(x)=\tan\frac{\pi x}{4}.$$

$$\text{由 } \frac{\pi}{4}x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}, \text{ 得 } x\neq 2+4k, k\in\mathbf{Z}.$$

一、单项选择题

1.B

提示:因为 $\sin \alpha=\frac{4}{5}, \alpha \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\cos \alpha=\sqrt{1-\sin ^2 \alpha}=\frac{3}{5}$.

所以 $\cos \left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos \alpha \cos \frac{\pi}{3}+\sin \alpha \sin \frac{\pi}{3}$

$=\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}+\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+4 \sqrt{3}}{10}$.

故选 B.

2.C

提示:因为 $\sin 18^{\circ}=m$,

所以 $\sin 63^{\circ}=\sin \left(18^{\circ}+45^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 18^{\circ}+\cos 18^{\circ})=$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(m+\sqrt{1-m^2}\right)$.

故选 C.

3.C

提示:原式 $=\sin 78^{\circ} \cos 48^{\circ}-\cos 78^{\circ} \sin 48^{\circ}$

$=\sin \left(78^{\circ}-48^{\circ}\right)=\sin 30^{\circ}=\frac{1}{2}$.

故选 C.

4.C

提示:因为 $\tan \alpha=3, \tan \beta=2$,

所以 $\tan (\alpha+\beta)=\frac{\tan \alpha+\tan \beta}{1-\tan \alpha \tan \beta}=\frac{3+2}{1-3 \times 2}=-1$.

因为 $\alpha, \beta \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha+\beta \in(0, \pi)$,所以 $\alpha+\beta=\frac{3 \pi}{4}$.

故选 C.

5.A

提示: $\sin x+\cos x=\sqrt{2} \sin \left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,则 $T=2 \pi$; $\sin x \cos x=$

$\frac{1}{2} \sin 2 x$,则 $T=\pi$; $\sin ^2 x+\cos ^2 x=1, f(x)$ 是常函数,不存在最

小正周期; $\sin ^2 x-\cos ^2 x=-\cos 2 x$,则 $T=\pi$.故选 A.

6.A

提示:由 $\tan \alpha \tan \beta=\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}=2$,

得 $\sin \alpha \sin \beta=2 \cos \alpha \cos \beta$.

又 $\cos (\alpha+\beta)=\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta=m$,

所以 $\cos \alpha \cos \beta=-m, \sin \alpha \sin \beta=-2 m$.

所以 $\cos (\alpha-\beta)=\cos \alpha \cos \beta+\sin \alpha \sin \beta=-3 m$.

故选 A.

7.B

提示:由已知,得 $M=\sqrt{2} \sin \left(100^{\circ}-45^{\circ}\right)=\sqrt{2} \sin 55^{\circ}>$

$\sqrt{2} \sin 45^{\circ}=1$,

$N=\sqrt{2} \sin \left(44^{\circ}+12^{\circ}\right)=\sqrt{2} \sin 56^{\circ}>\sqrt{2} \sin 55^{\circ}=M$.

因为 $\tan 45^{\circ}=\tan \left(22^{\circ}+23^{\circ}\right)=\frac{\tan 22^{\circ}+\tan 23^{\circ}}{1-\tan 22^{\circ} \tan 23^{\circ}}=1$,

所以 $\tan 22^{\circ}+\tan 23^{\circ}+\tan 22^{\circ} \tan 23^{\circ}=1$.

所以 $P=\frac{1}{2}(1+\tan 22^{\circ})(1+\tan 23^{\circ})$

$=\frac{1}{2}(1+\tan 22^{\circ}+\tan 23^{\circ}+\tan 22^{\circ} \tan 23^{\circ})=1$.

所以 $P<M<N$.

故选 B.

8.D

提示:由 $f(x)=4 \cos ^2\left(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-1=2\left[1+\cos \left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)\right]-$

$1=2 \cos \left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的值域为 $[-1,3]$.又对

任意的实数 $t, f(x)$ 在区间 $\left(t, t+\frac{2 \pi}{3}\right)$ 上的值域均为 $[-1,$

$3]$,则 $\frac{2 \pi}{3}>T=\frac{2 \pi}{\omega}$,解得 $\omega>3$.故选 D.

二、多项选择题

9.BC

提示: $f(x)=1-\sin 2 x \tan x=1-2 \sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

$=1-2 \sin ^2 x=\cos 2 x\left(x \neq k \pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right)$.

所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程满足 $2 x=k \pi, k \in \mathbf{Z}$,

即对称轴方程为 $x=\frac{k \pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.结合选项可知选 BC.

10.BCD

提示: $\sin 5 \theta+\sin 3 \theta=\sin (4 \theta+\theta)+\sin (4 \theta-\theta)=2 \sin 4 \theta \cos \theta$,

故 A 正确;

$\cos 3 \theta-\cos 5 \theta=\cos (4 \theta-\theta)-\cos (4 \theta+\theta)=2 \sin 4 \theta \sin \theta$,

故 B 错误;

$\sin 3 \theta-\sin 5 \theta=\sin (4 \theta-\theta)-\sin (4 \theta+\theta)=-2 \cos 4 \theta \sin \theta$,

故 C 错误;

$\sin 5 \theta+\cos 3 \theta=\sin (4 \theta+\theta)+\cos (4 \theta-\theta)$

$=\sin 4 \theta \cos \theta+\cos 4 \theta \sin \theta+\cos 4 \theta \cos \theta+\sin 4 \theta \sin \theta$

$=(\cos 4 \theta+\sin 4 \theta) \cdot(\cos \theta+\sin \theta)$

$=2 \sin \left(4 \theta+\frac{\pi}{4}\right) \cos \left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$,故 D 错误.

故选 BCD.

11.AC

提示: $f(x)=4 \sin \left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right) \sin \omega x$

$=4\left(\frac{1}{2} \sin \omega x+\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega x\right) \sin \omega x$

$=2 \sin ^2 \omega x+2 \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x$

$=1-\cos 2 \omega x+\sqrt{3} \sin 2 \omega x=1+2 \sin \left(2 \omega x-\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $f(x)=0$,得 $\sin \left(2 \omega x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

由 $x \in\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \omega>0$,得 $2 \omega x-\frac{\pi}{6} \in\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{4 \omega \pi-\pi}{6}\right)$.

因为 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有 4 个零点,

所以 $\frac{23 \pi}{6}<\frac{4 \omega \pi-\pi}{6} \leqslant \frac{31 \pi}{6}$,解得 $6<\omega \leqslant 8$.

故选 AC.

三、填空题

12.2

提示: $f(x)=\sin x-\sqrt{3} \cos x=2 \sin \left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x \in[0, \pi]$ 时, $x-\frac{\pi}{3} \in\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2 \pi}{3}\right]$,

所以当 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{5 \pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2.

13. $-\frac{2 \sqrt{2}}{3}$

提示:由 α 为第一象限角, β 为第三象限角,

得 $2 k_1 \pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2 k_1 \pi, \pi+2 k_2 \pi<\beta<\frac{3 \pi}{2}+2 k_2 \pi, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

所以 $\pi+2\left(k_1+k_2\right) \pi<\alpha+\beta<2 \pi+2\left(k_1+k_2\right) \pi, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$,

即 $\pi+2 k \pi<\alpha+\beta<2 \pi+2 k \pi, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $\tan \alpha+\tan \beta=4, \tan \alpha \tan \beta=\sqrt{2}+1$,

所以 $\tan (\alpha+\beta)=\frac{\tan \alpha+\tan \beta}{1-\tan \alpha \tan \beta}=\frac{4}{1-\left(\sqrt{2}+1\right)}=-2 \sqrt{2}<0$,

所以 $\frac{3 \pi}{2}+2 k \pi<\alpha+\beta<2 \pi+2 k \pi, k \in \mathbf{Z}$.

所以 $\sin (\alpha+\beta)<0$.

将 $\frac{\sin (\alpha+\beta)}{\cos (\alpha+\beta)}=-2 \sqrt{2}$ 与 $\sin ^2(\alpha+\beta)+\cos ^2(\alpha+\beta)=1$ 联

立,解得 $\sin (\alpha+\beta)=-\frac{2 \sqrt{2}}{3}$.

14.[2,6]U[14,15]

提示: $f(x)=\cos ^2 \omega x+2 \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x-\sin ^4 \omega x$

$=(\cos ^2 \omega x-\sin ^2 \omega x)(\cos ^2 \omega x+\sin ^2 \omega x)+\sqrt{3} \sin 2 \omega x$

$=\cos 2 \omega x+\sqrt{3} \sin 2 \omega x=2 \sin \left(2 \omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.

当 $\frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{9}$ 且 $\omega>0$ 时, $\frac{\omega \pi}{6}+\frac{\pi}{6} \leqslant 2 \omega x+\frac{\pi}{6} \leqslant \frac{2 \omega \pi}{9}+\frac{\pi}{6}$,

则 $\left\{\begin{array}{l} \frac{\omega \pi}{6}+\frac{\pi}{6} \geqslant \frac{\pi}{2}+2 k \pi, \\ \frac{2 \omega \pi}{9}+\frac{\pi}{6} \leqslant \frac{3 \pi}{2}+2 k \pi, \end{array} \quad k \in \mathbf{Z},\right.$

解得 $2+12 k \leqslant \omega \leqslant 6+9 k, k \in \mathbf{Z}$.

由 $\left\{\begin{array}{l} 6+9 k>0, \\ 2+12 k \leqslant 6+9 k, \end{array} \quad\right.$ 解得 $-\frac{2}{3}< k \leqslant \frac{4}{3}$.

因为 $k \in \mathbf{Z}$,所以 $k=0$ 或 1,

则 ω 的取值范围为 $[2,6] \cup[14,15]$.

四、解答题

15.解:(1)因为 β 为锐角, $\cos \beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\sin \beta=\sqrt{1-\cos ^2 \beta}=\frac{2 \sqrt{5}}{5}$.

因为 α, β 为锐角,即 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$,

所以 $-\frac{\pi}{2}<-\beta<0$,得 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,

又 $\sin (\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{2}}{10}$,

所以 $\cos (\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin ^2(\alpha-\beta)}=\frac{7 \sqrt{2}}{10}$.

所以 $\sin \alpha=\sin \left[(\alpha-\beta)+\beta\right]=\sin (\alpha-\beta) \cos \beta+\cos (\alpha-\beta) \cdot$

$\sin \beta=\frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{7 \sqrt{2}}{10} \times \frac{2 \sqrt{5}}{5}=\frac{3 \sqrt{10}}{10}$.

(2)由(1)知 $\sin \alpha=\frac{3 \sqrt{10}}{10}$,又 α 为锐角,

所以 $\cos \alpha=\sqrt{1-\sin ^2 \alpha}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\cos (\alpha+\beta)=\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta$

$=\frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{3 \sqrt{10}}{10} \times \frac{2 \sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$,得 $0<\alpha+\beta<\pi$,所以 $\alpha+\beta=\frac{3 \pi}{4}$.

16.(1)解:由题意及三角函数的定义,

得 $|O M|=\cos \alpha=\frac{3}{5},|B N|=\sin \beta=\frac{12}{13}$.

因为 α 和 β 均为锐角,所以 $\sin \alpha=\frac{4}{5}, \cos \beta=\frac{5}{13}$.

所以 $\cos (\alpha+\beta)=\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta=\frac{3}{5} \times \frac{5}{13}-\frac{4}{5} \times$

$\frac{12}{13}=-\frac{33}{65}$.

(2)证明:由题意及三角函数的定义,

得 $|M A|=\sin \alpha,|N B|=\sin \beta$,

$|P C|=\sin (\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta<\sin \alpha+1+\sin \beta \cdot$

$1=\sin \alpha+\sin \beta$,所以 $|P C|<|M A|+|N B|$.

17.解:(1) $f(\alpha)=\frac{2 \sin ^2 \alpha+\sin 2 \alpha}{\cos \left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\frac{2 \sin ^2 \alpha+2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4}+\sin \alpha \sin \frac{\pi}{4}}$

$=\frac{2 \sin \alpha(\sin \alpha+\cos \alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha+\sin \alpha)}$

$=2 \sqrt{2} \sin \alpha$.

(2)由(1)知 $f(\alpha)=2 \sqrt{2} \sin \alpha=-\frac{2 \sqrt{5}}{5}$,

所以 $\sin \alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

又 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$,所以 $\cos \alpha=\frac{3 \sqrt{10}}{10}, \tan \alpha=\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}=-\frac{1}{3}$.

所以 $\tan 2 \alpha=\frac{2 \tan \alpha}{1-\tan ^2 \alpha}=-\frac{3}{4}$.

18.解:(1)因为 $f(x)=\cos x\left(2 \sqrt{3} \sin x+\cos x\right)-\sin ^2 x$

$=2 \sqrt{3} \sin x \cos x+\cos ^2 x-\sin ^2 x=\sqrt{3} \sin 2 x+\cos 2 x$

$=2 \sin \left(2 x+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$.

令 $-\frac{\pi}{2}+2 k \pi \leqslant 2 x+\frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{2}+2 k \pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $-\frac{\pi}{3}+k \pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}+k \pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k \pi, \frac{\pi}{6}+k \pi\right],$

$k \in \mathbf{Z}$.

(2)若选①,由 $f(x) \geqslant m$ 有解,得 $m \leqslant f(x)_{\max}$.

因为 $x \in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\frac{\pi}{6} \leqslant 2 x+\frac{\pi}{6} \leqslant \frac{7 \pi}{6}$,

可得 $2 x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时,

$f(x)$ 取得最大值,且最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$.

故 $m \leqslant 2$,即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

若选②,由 $f(x) \geqslant m$ 恒成立,得 $m \leqslant f(x)_{\min}$.

因为 $x \in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\frac{\pi}{6} \leqslant 2 x+\frac{\pi}{6} \leqslant \frac{7 \pi}{6}$,

可得 $2 x+\frac{\pi}{6}=\frac{7 \pi}{6}$,即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,

$f(x)$ 取得最小值,且最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

故 $m \leqslant-1$,即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

19.解:(1)在 Rt $\triangle P A Q$ 中, $\angle P A B=\alpha \in\left(0, \frac{\pi}{3}\right), A P=60$ m,

所以 $P Q=A P \sin \alpha=60 \sin \alpha$ (m).

又 $\angle B A C=\frac{\pi}{3}$,在 Rt $\triangle P A R$ 中,得 $P R=60 \sin \left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ (m).

(2)由题可知 $\angle Q P R=\frac{2 \pi}{3}$,所以 $\triangle P Q R$ 的面积为

$S=\frac{1}{2} P Q \cdot P R \cdot \sin \angle Q P R$

$=\frac{1}{2} \cdot 60 \sin \alpha \cdot 60 \sin \left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) \cdot \sin \frac{2 \pi}{3}$

$=900 \sqrt{3} \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$=900 \sqrt{3} \sin \alpha\left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha-\cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right)$

$=450 \sqrt{3}\left(\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha-\sin ^2 \alpha\right)$

$=450 \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2 \alpha+\frac{1}{2} \cos 2 \alpha-\frac{1}{2}\right)$

$=450 \sqrt{3}\left[\sin \left(2 \alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right]$.

因为 $\alpha \in\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$,所以 $2 \alpha+\frac{\pi}{6} \in\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5 \pi}{6}\right)$,

可得 $2 \alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时, S 取得最大值 $225 \sqrt{3}$.

所以这块三角形绿地的最大面积为 $225 \sqrt{3}$ m²,且取

到最大面积时 α 的值为 $\frac{\pi}{6}$.

第15期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:由 $f(x)=2 \sin \left(\frac{1}{2} x+\frac{\pi}{4}\right)$,得周期是 $\frac{2 \pi}{\frac{1}{2}}=4 \pi$,振幅

是 2,初相是 $\frac{\pi}{4}$.故选 D.

2.D

提示:将函数 $y=\sin (7 x+\pi)=-\sin 7 x$ 图象上所有点的

横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,所得图象的解析

式为 $f(x)=-\sin \frac{7 x}{2}$.故选 D.

3.D

提示:将函数 $f(x)=\tan x$ 的图象向右平移 1 个单位长

度,得到 $h(x)=\tan (x-1)$ 的图象,再关于 y 轴对称,得到

$g(x)=h(-x)=\tan (-x-1)=-\tan (x+1)$ 的图象.故选 D.

4.A

提示:因为 $y=\sin 2 x+\cos 2 x=\sqrt{2} \cos \left(2 x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \cdot$

$\cos \left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right]$,所以只要把 $y=\sqrt{2} \cos 2 x$ 的图象上所有的

点向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度.故选 A.

5.C

提示:由题图得 $T=2 \times(6-2)=8$,所以 $\omega=\frac{2 \pi}{T}=\frac{\pi}{4}$.

故选 C.

6.C

提示:由图象可知,函数 $y=3 \sin (\omega x+\varphi)+k$ 的最小值为

2,又当 $\sin (\omega x+\varphi)=-1$ 时, y 取得最小值,所以 $-3+k=2$,解