

高考版答案页第4期

所以 $a_n=a_3q^{n-3}=2\times 2^{n-3}=2^{n-2}$.

(2) 因为 $\{b_n\}$ 是严格递增数列, 所以 $b_{n+1}-b_n>0$ 对于任意正整数 n 都成立, 又 $b_n=\lambda\cdot 3^n-a_n$, 所以 $b_{n+1}-b_n=\lambda(3^{n+1}-3^n)-(2^{n+1}-2^{n-2})=2\lambda\cdot 3^n-2^{n-2}>0$, 即 $\lambda>\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 对于任意正整数 n 都成立, 因为函数 $f(x)=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在 \mathbf{R} 上单调

递减, 所以 $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 的最大值是 $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{1}{12}$, 所以 $\lambda>\frac{1}{12}$.

即实数 λ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{12}, +\infty\right)$.

18. 解: (1) 因为 $a_{n+1}=3a_n+1$, 所以 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$, 又

$a_1=1$, 则 $a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, 所以 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$, 公比为 3 的等比数列, 所以 $a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times 3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$, 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$.

(2) $b_n=(2n-1)(2a_n+1)=(2n-1)\cdot 3^n$. 所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$, ①
 $3S_n=1\times 3^2+3\times 3^3+5\times 3^4+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n+1}$, ②

由 ①-②, 得 $-2S_n=3+2(3^2+3^3+3^4+\cdots+3^n)-(2n-1)\cdot 3^{n+1}=3+2\times\frac{9(1-3^{n+1})}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^{n+1}=(2-2n)\cdot 3^{n+1}-6$, 所以 $S_n=(n-1)\cdot 3^{n+1}+3$.

19. 解: (1) 因为 $a_3=4$, $a_1+a_5=17$, 所以 $a_1q^2=4$, $a_1+a_1q^4=17$, 则 $4q^4-17q^2+4=0$, 解得 $q^2=4$ 或 $q^2=\frac{1}{4}$, 又 $q>1$, 所以 $q^2=4$, 即 $q=2$, 则 $a_1=1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

(2) 因为 $a_n=2^{n-1}$, 所以 $a_{n+1}=2^n$, 所以 $c_n=\frac{n^2\cdot a_{n+1}}{3^n}=\frac{n^2\cdot 2^n}{3^n}=n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$, 则 $c_{n+1}=(n+1)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, 所以 $c_{n+1}-c_n=(n+1)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left[\frac{2}{3}(n+1)^2-n^2\right]=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+\frac{2}{3}\right)$, 令 $-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+\frac{2}{3}>0$, 解得 $2-\sqrt{6}<n<2+\sqrt{6}$, 又 $n\in\mathbf{N}_+$, 所以当 $1\leq n\leq 4$, $n\in\mathbf{N}_+$ 时, $-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+\frac{2}{3}>0$, 当 $n\geq 5$, $n\in\mathbf{N}_+$ 时, $-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+\frac{2}{3}<0$, 所以当 $1\leq n\leq 4$, $n\in\mathbf{N}_+$ 时, $c_{n+1}-c_n>0$, 数列 $\{c_n\}$ 为递增数列, 当 $n\geq 5$, $n\in\mathbf{N}_+$ 时, $c_{n+1}-c_n<0$, 数列 $\{c_n\}$ 为递减数列, 所以数列 $\{c_n\}$ 的最大值是 c_4 或 c_5 , 因为 $c_4=n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$, 所以 $c_4=4^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{256}{81}$, $c_5=5^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{800}{243}$, 则 $c_5>c_4$, 所以数列 $\{c_n\}$ 有最大项, 第 5 项为最大项.

第 14 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq 0)$, 由 $a_{2n}=a_n^2$, 且 $-a_2$ 是 a_1 与 a_3 的等差中项, 得 $\begin{cases} a_1q=a_n^2, \\ -2a_1q=a_1+a_1q^2, \end{cases}$ 解得 $a_1q=-1$. 所以 $a_n=a_1q^{n-1}=(-1)^{n-1}$, 则 $a_5=-1$. 故选 D.

2.B 提示: 由 $a_3=3$, 且 S_2, S_1+S_3, S_5 成等比数列, 得 $(S_1+S_3)^2=S_2S_5$, 即 $(3-d+9)^2=(6-d)(15+5d)$, 整理得 $2d^2-13d+18=0$, 解得 $d=2$ 或 $d=\frac{9}{2}$. 当 $d=2$ 时, $a_1=a_2-d=1>0$, 符合题意; 当 $d=\frac{9}{2}$ 时, $a_1=a_2-d=\frac{3}{2}<0$, 不符合题意, 所以 $d=2$. 故选 B.

3.A 提示: 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$, 由 $a_1=3$, 且 $-3a_1, a_2, a_3$ 成等差数列, 得 $2a_2=a_3-3a_1$, 即 $6q=3q^2-9$, 解得 $q=3$ (舍去负值), 所以 $S_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}-3}{2}$. 故选 A.

4.B 提示: 当 $n\geq 2$ 时, $na_n=n(S_n-S_{n-1})=S_n+n(n-1)$, 即 $(n-1)S_n-nS_{n-1}=n(n-1)$, 则 $\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=1$, 因为 $a_1=-1$, 则 $\frac{S_1}{1}=-1$, 所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 -1 为首项, 1 为公差

的等差数列, 所以 $\frac{S_n}{n}=-1+n-1=n-2$, 又 $na_n=S_n+n(n-1)$,

数学

第 13 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B 提示: 因为等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases} a_1+a_1q^2=10, \\ a_1q+a_1q^3=5, \end{cases}$ 解

得 $a_1=8, q=\frac{1}{2}$, 所以 $a_5=a_1q^4=8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

2.B 提示: 因为 $\lg a_2, \lg a_{2023}$ 是 $f(x)=3x^2-12x+9$ 的两个零点, 所以 $\lg a_2+\lg a_{2023}=4$, 所以 $\lg(a_2a_{2023})=4$, 则 $a_2a_{2023}=10^4$, 所以 $a_1a_{2024}=a_2a_{2023}=10^4$. 故选 B.

3.B 提示: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $S_3=4$, $a_4+a_5+a_6=8$, 所以 $a_4+a_5+a_6=q^3(a_1+a_2+a_3)=q^3S_3=4q^3=8$, 得 $q^3=8$, 则 $\frac{S_9}{S_6}=\frac{1-q}{a_1(1-q^6)}=\frac{1-q^9}{1-q^6}=\frac{1-2^3}{1-2^2}=\frac{7}{3}$. 故选 B.

4.A 提示: 因为 $S_1=a_1-2, S_2=a_2-2$, 两式相减, 得 $S_2-S_1=a_2-a_1$, 即 $a_3=a_4-a_3$, 则 $a_4=2a_3$, 所以公比 $q=\frac{a_4}{a_3}=2$. 故选 A.

5.C 提示: 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $S_{10}, S_{20}-S_{10}, S_{30}-S_{20}$ 是首项为 S_{10} , 公比为 q^{10} 的等比数列, 因为 $S_{30}=7S_{10}, S_{10}+S_{30}=80$, 所以 $S_{10}=10, S_{30}=70$, 所以 $(S_{30}-10)^2=10(70-S_{30})>0$, 即 $S_{30}^2-10S_{30}-600=0$, 解得 $S_{30}=30$ 或 $S_{30}=-20$ (舍去). 故选 C.

6.B 提示: 因为 $a_{n+1}=a_n^2+2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$, 所以 $a_{n+1}+1=a_n^2+2a_n+1=(a_n+1)^2$. 两边取对数, 得 $\log_2(a_{n+1}+1)=2\log_2(a_n+1)$, 设 $c_n=\log_2(a_n+1)$, 则 $c_{n+1}=2c_n$, 又 $a_1=7$, 则 $c_1=\log_2(a_1+1)=3$, 所以数列 $\{c_n\}$ 是首项为 3, 公比为 2 的等比数列, 所以 $c_n=3\cdot 2^{n-1}=\log_2(a_n+1)$, 所以 $a_n+1=2^{3\cdot 2^{n-1}}$, 所以 $a_n=2^{3\cdot 2^{n-1}}-1$. 由放小麦的规则, 得小麦总粒数为 $S=1+2+2^2+\cdots+2^{63}=\frac{1\times(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1$, 所以 $2^{3\cdot 2^{n-1}}-1\leq 2^{64}-1$, 则 $3\cdot 2^{n-1}\leq 64$, 解得 $n\leq 5$. 故选 B.

7.C 提示: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $8S_6=7S_3$, 得 $8(S_6-S_3)=-S_3$, 则 $a_4+a_5+a_6=-\frac{1}{8}(a_1+a_2+a_3)$, 即 $q^3(a_1+a_2+a_3)=-\frac{1}{8}(a_1+a_2+a_3)$, 因为 $a_n\neq 0$, 所以 $q^3=-\frac{1}{8}$. 解得 $q=-\frac{1}{2}$, 又 $a_1=\frac{1}{2}$, 则 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 所以 $S_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1+\frac{1}{2}}=$

$\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$. 当 n 为奇数时, $S_n=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$, 所以 $S_n\leq S_1=\frac{1}{2}$, 当 n 为偶数时, $S_n=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]<\frac{1}{3}$, 所以 $(S_n)_{\min}=\frac{1}{2}$, 又 $\lambda\geq S_n$ 恒成立, 所以 $\lambda\geq\frac{1}{2}$. 故选 C.

8.D 提示: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_1\cdot a_5=4a_2$, 得 $a_1\cdot a_1q^4=a_1q$, 即 $a_1q^3=4$, 又 $a_7=a_1q^6=\frac{1}{2}$, 得 $q^3=\frac{1}{8}$, 得 $q=\frac{1}{2}$, 所以 $a_1=\frac{4}{q^3}=32$, 所以 $a_n=a_1q^{n-1}=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{6-n}$, 所以

以当 $1\leq n\leq 5$ 时, $a_n>1$, 当 $n=6$ 时, $a_n=1$, 当 $n\geq 7$ 时, $0<a_n<1$. 令 $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$, 则 $T_1<T_2<\cdots<T_5=T_6, T_6>T_7>\cdots$, 所以 $(T_n)_{\max}=T_6=T_5=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5=2^5\times 2^4\times 2^3\times 2^2\times 2=2^{15}$. 所以

$\log_2a_1+\log_2a_2+\cdots+\log_2a_n=\log_2(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n)=\log_2T_n\leq \log_2(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5)=\log_22^{15}=15$. 故选 D.

二、多项选择题

9.AC 提示: 由正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 得 $a_n>0, q>0$. 对于 A, 因为 $a_4=2, a_6=8$, 所以 $\begin{cases} a_1q^3=2, \\ a_1q^5=8, \end{cases}$ 解得 $a_1=\frac{1}{4}$, $q=2$, 所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{4}\times 2^{n-1}=2^{n-3}$, 故 A 正确; 对于 B, $a_{10}=2^7=128$, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $a_n=2^{n-3}$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{1}{2^{n-3}}=-\frac{1}{2^{n-2}}<0$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{1}{a_n}$, 所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是递减数

量 $\mathbf{m}=(x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AF}=-3x+y+4z=0, \\ \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{CF}=3x+y+4z=0, \end{cases}$ 令 $z=1$, 则 $x=0$,

$y=-4$, 得 $\mathbf{m}=(0, -4, 1)$, 设 AE 与平面 ACF 所成角为 θ , 所以 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{EA}, \mathbf{m}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{EA}\cdot\mathbf{m}|}{|\overrightarrow{EA}||\mathbf{m}|}=\frac{\sqrt{34}}{34}$, 所以直线 AE 与平面

ACF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{34}}{34}$.

17. (1) 证明: 因为底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AB\perp BC, CD\perp AD$, 又 $CB\perp BP, AB\cap BP=B, AB, BP\subset$ 平面 PAB , 所以 $BC\perp$ 平面 PAB , 所以 $BC\perp PA$. 又 $CD\perp AD, CD\perp DP, AD\cap DP=D, AD, DP\subset$ 平面 PAD , 所以 $CD\perp$ 平面 PAD , 所以 $CD\perp PA$, 又 $BC\cap CD=C, BC, CD\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 解: 由 (1) 知, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA\perp AB, PA\perp AD$, 又底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AB\perp AD$, 以点 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 因为 $PA=2$, 点 E, F 分别为 PB, PD 的中点, 所以 $P(0, 0, 2), A(0, 0, 0), E(1, 0, 1), F(0, 1, 1), \overrightarrow{AE}=(1, 0, 1), \overrightarrow{AF}=(0, 1, 1), \overrightarrow{AP}=(0, 0, 2)$, 设平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+z=0, \\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AF}=y+z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 则 $y=1, z=-1$, 得 $\mathbf{n}=(1, 1, -1)$, 所以点 P 到平面 AEF 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

18. (1) 证明: 因为 $\angle BCD=60^\circ, BC=CD=2$, 所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形, 所以 $BD=2$. 又四边形 $ABCD$ 为梯形, $AB\parallel DC$, 则 $\angle ABD=60^\circ$, 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\angle ABD=12$, 所以 $AD^2+BD^2=AB^2$, 则 $AD\perp BD$, 因为平面 $PBD\perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PBD\cap$ 平面 $ABCD=BD, AD\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AD\perp$ 平面 PBD , 又 $PDC\subset$ 平面 PBD , 所以 $AD\perp PD$.

(2) 解: 由 (1) 知, $AD\perp PD$, 又 $AB\perp PD, AD\cap AB=A, AD, AB\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD\perp CD, \angle PCD$ 是 PC 与平面 $ABCD$ 所成角, 所以 $\tan\angle PCD=\frac{PD}{CD}=2$, 所以 $PD=4$. 由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$, 得 $PD\perp DB$, 由 (1) 知, $AD\perp BD, PD\perp DA$, 则以 D 点为坐标原点, DA, DB, DP 所在的直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $B(0, 2, 0), C(-\sqrt{3}, 1, 0), P(0, 0, 4)$, 所以 $\overrightarrow{BP}=(0, -2, 4), \overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3}, -1, 0)$, 设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n}_1=(x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1\cdot\overrightarrow{BP}=-2y+4z=0, \\ \mathbf{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{3}x-y=0, \end{cases}$ 令 $z=3$, 则 $y=6, x=-2\sqrt{3}$, 得 $\mathbf{n}_1=(-2\sqrt{3}, 6, 3)$, 由 $BD\perp$ 平面 PAD , 得平面 PAD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2=(0, 1, 0)$, 所以 $|\cos\langle\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle|=\frac{|\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}=\frac{6}{2\sqrt{57}}$, 所以平面 PBC 与平面 PAD 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

2. 解: 由 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$, 所以平面 PBC 与平面 PAD 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

(1) 证明: 设 M, N 分别为 EF, AB 的中点, 连接 MN, DM, CN , 因为 $AE\parallel CD\parallel BF, AE=5, CD=4, BF=3$, 所以 $MN=CD=4$, 且 $MN\parallel CD$, 则四边形 $CNMD$ 为平行四边形, 所以 $MD\parallel CN$, 因为 $\triangle ABC$ 为正三角形, N 为 AB 边的中点, 则 $CN\perp AB$, 又 $AE\perp$ 平面 $ABC, CN\subset$ 平面 ABC , 所以 $AE\perp CN$, 又 $AE\cap AB=A, AE, AB\subset$ 平面 $AEFB$, 所以 $CN\perp$ 平面 $AEFB$, 又 $MD\parallel CN$, 所以 $MD\perp$ 平面 $AEFB$, 又 $MD\subset$ 平面 DEF , 所以平面 $DEF\perp$ 平面 $AEFB$.

(2) 解: 因为 $AE\perp$ 平面 ABC , 则以点 A 为坐标原点, AC, AE 所在直线分别为 y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $E(0, 0, 5), D(0, 2, 4), F(\sqrt{3}, 1, 3)$. 设点 $P(0, 0, t)$, 则 $\overrightarrow{DF}=(\sqrt{3}, -1, -1), \overrightarrow{DE}=(0, -2, 1), \overrightarrow{DP}=(0, -2, t-4)$.

设平面 PDF 的法向量为 $\mathbf{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1\cdot\overrightarrow{DF}=\sqrt{3}x_1-y_1-z_1=0, \\ \mathbf{n}_1\cdot\overrightarrow{DP}=-2y_1+(t-4)z_1=0, \end{cases}$ 令 $z_1=2$, 则 $y_1=t-4, x_1=\frac{t-2}{\sqrt{3}}$, 所以 $\mathbf{n}_1=\left(\frac{t-2}{\sqrt{3}}, t-4, 2\right)$. 设平面 EDF 的法向量为 $\mathbf{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2\cdot\overrightarrow{DE}=-2y_2+z_2=0, \\ \mathbf{n}_2\cdot\overrightarrow{DF}=\sqrt{3}x_2-y_2-z_2=0, \end{cases}$ 令 $y_2=1$, 则 $x_2=\sqrt{3}, z_2=2$, 所以 $\mathbf{n}_2=(\sqrt{3}, 1, 2)$, 则 $|\cos\langle\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle|=\frac{|\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, 将 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 代入, 化简得 $t^2+8t-29=0$, 解得 $t=\pm 3\sqrt{5}-4$, 因为点 P 为线段 AE 上一点, 则 $0\leq t\leq 5$, 所以 $t=3\sqrt{5}-4$, 所以存在点 P 满足条件. 此时 $AP=3\sqrt{5}-4$.

直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A_1(2, 0, 2), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), C_1(0, 2, 2), E(1, 0, 0), F(2, 1, 0), G(1, 2, 2), \overrightarrow{EC_1}=(-1, 2, 2), \overrightarrow{EF}=(1, 1, 0), \overrightarrow{EC}=(0, 2, 2), \overrightarrow{A_1C}=(-2, 2, -2)$, 则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0, \overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0$, 所以 $EF\perp A_1C, EG\perp A_1C$, 又 $EF\cap EG=E, EF, EG\subset$ 平面 EFG , 所以 $A_1C\perp$ 平面 EFG , 故 B 正确; 因为 $A_1C\perp$ 平面 EFG , 所以 $\mathbf{n}=\overrightarrow{A_1C}=(-2, 2, -2)$ 是平面 EFG 的一个法向量, $\cos\langle\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{EG}|}=\frac{1}{2}$, $\sin\langle\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $S_{\triangle EFG}=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{EF}|\times|\overrightarrow{EG}|\times\sin\langle\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}\rangle=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, 点 C_1 平面 EFG 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{EC_1}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以三棱锥 C_1-EFG 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle EFG}\cdot d=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}$, 故 A 正确; 由 $\overrightarrow{BC_1}=(-2, 0, 2)$, 得 $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0$, 所以 $BC_1\parallel$ 平面 EFG , 故 C 正确; 因为平面 EFG 的一个法向量为 $\mathbf{n}=\overrightarrow{A_1C}=(-2, 2, -2)$, 平面 EFC 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(0, 0, 1)$, $\cos\langle\mathbf{n}, \mathbf{m}\rangle=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{|\mathbf{n}||\mathbf{m}|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 由图知, 二面角 $G-EF-C$ 的平面角为锐角, 所以二面角 $G-EF-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

三、填空题

12.3 或 -2 提示: 由题意, 得 $\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}=(4, 1-\lambda, \lambda)$, 所以 $|\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{4^2+(1-\lambda)^2+\lambda^2}=\sqrt{29}$, 解得 $\lambda=3$ 或 $\lambda=-2$.

13. $\frac{1}{3}$ 提示: 因为点 $A(0, -1, 0)$, 点 $B(1, -1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AB}=(1, 0, 0)$, 所以点 B 到平面 PAD 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|}=\frac{1}{3}$.

14. $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right); \frac{1}{4}$ 提示: 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直线坐标系, 则 $A(1, 0, 0), B(1, 2, 0), C(0, 2, 0), D_1(0, 0, 1)$, 令 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}=(\lambda, 2\lambda, -\lambda)$, 则 $P(\lambda, 2\lambda, 1-\lambda)$, $0<\lambda<1$, 又 $\frac{D_1P}{PB}=t$, 所以 $t=\frac{\lambda}{1-\lambda}, \overrightarrow{PA}=(1-\lambda, -2\lambda, \lambda-1), \overrightarrow{PC}=(-\lambda, 2-2\lambda, \lambda-1)$, 由 $\angle APC$ 为钝角, 得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-\lambda(1-\lambda)-2\lambda(2-2\lambda)+(\lambda-1)^2<0$, 即 $6\lambda^2-7\lambda+1<0$, 解得 $\frac{1}{6}<\lambda<1$, 则 $0<1-\lambda<\frac{5}{6}$, 所以 $t=\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}-1\in\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$. 又 $\overrightarrow{DA}=(1, 0, 0)$, 则点 P 到直线 AD 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{DA}|}{|\overrightarrow{DA}|}\right)^2}=\sqrt{5\lambda^2-2\lambda+1}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, 即 $25\lambda^2-10\lambda+1=0$, 解得 $\lambda=\frac{1}{5}$, 所以 $t=\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{1}{4}$.

四、解答题

15. (1) 证明: 因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 侧棱 $A_1A\perp$ 平面 $ABCD, AB, AD\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $A_1A\perp AB, A_1A\perp AD$, 又 $AB\perp AD$, 则以 A 为坐标原点, AD, AA_1, AB 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 2), C(1, 0, 1), E(0, 1, 0), C_1(1, 2, 1)$, 所以 $\overrightarrow{BC}=(-1, 0, -1), \overrightarrow{EC_1}$

高考版答案页第4期

数学

积为 $2^2+4^2+4\times\frac{1}{2}\times(2+4)h=20+12\sqrt{10}$,解得 $h=\sqrt{10}$,所以侧棱长为 $\sqrt{10+\left(\frac{4-2}{2}\right)^2}=\sqrt{11}$,因为正四棱台上、下底面的对角线长分别为 $2\sqrt{2}$ 和 $4\sqrt{2}$,所以正四棱台的高 $H=\sqrt{11-\left(\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3$,则该正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times(4+16+\sqrt{4\times16})\times3=28$.故选B.

4.C 提示:连接 A_1D,D_1E ,因为 $A_1B_1//CD,A_1B_1=CD$,所以四边形 A_1B_1CD 是平行四边形,所以 $A_1D//B_1C$,则异面直线 DE 与 B_1C 所成角为 $\angle A_1DE$ 或其补角).设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2,则 $A_1D=2\sqrt{2},A_1E=D_1E=\sqrt{2}$,在 $\text{Rt}\triangle DD_1E$ 中, $DE=\sqrt{DD_1^2+D_1E^2}=\sqrt{6}$,则 $A_1D^2=A_1E^2+DE^2$,所以 $\triangle A_1ED$ 是直角三角形,所以 $\cos\angle A_1DE=\frac{DE}{A_1D}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选C.

5.B 提示:取 B_1C_1 的中点 D , BB_1 的中点 E ,连接 MD,DE,ME ,易知 $MD//A_1B_1//AB,DE//BC_1$,又 $MD\not\subset$ 平面 ABC_1 , $ABC\subset$ 平面 ABC_1 ,所以 $MD//$ 平面 ABC_1 ,同理可得, $DE//$ 平面 ABC_1 ,又 $MD\cap DE=D,MD,DEC$ 平面 MDE ,所以平面 $MDE//$ 平面 ABC_1 ,又 $MN//$ 平面 ABC_1 ,所以点 N 的轨迹为线段 DE ,又 $DE=\frac{1}{2}BC_1=2$,所以 $BC_1=4$.故选B.

6.C 提示:对于A,因为底面 $ABCD$ 是矩形,所以 $AB//CD$,又 $AB\not\subset$ 平面 $PCD,CD\subset$ 平面 PCD ,所以 $AB//$ 平面 PCD ,故A正确;对于B,因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD,BCC$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BC$,又底面 $ABCD$ 是矩形,所以 $AB\perp BC$,又 $PA\cap AB=A,PA,ABC$ 平面 PAB ,所以 $BC\perp$ 平面 PAB ,又 $PBC\subset$ 平面 PAB ,所以 $PB\perp BC$.故B正确;对于C,若 $PCLBD$,因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BD$,又 PC,PAC 平面 $PAC,PC\cap PA=P$,所以 $BD\perp$ 平面 PAC ,则 $BD\perp AC$,又底面 $ABCD$ 是矩形, $AD=2AB$,所以 AC 与 BD 不垂直,矛盾,所以 PC 与 BD 不垂直,故C错误;对于D,因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD,PAC$ 平面 PAD ,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,故D正确.故选C.

7.B 提示:取 BC 中点 D ,连接 AD,PD ,因为 $\triangle ABC$ 为边长为2的等边三角形,则 $AB=AC$,又 $\angle PAB=\angle PAC=45^\circ$,所以 $\triangle PAB\cong\triangle PAC$,即 $PB=PC$,所以 $PD\perp BC$,又 $AD\perp BC,AD\cap PD=D,AD,PD\subset$ 平面 PAD ,所以 $BC\perp$ 平面 PAD .又 PAC 平面 PAD ,所以 $PA\perp BC$,则 AP 在平面 ABC 的射影落在 AD 上,所以 $\angle PAD$ 为直线 PA 与平面 ABC 所成角,又在 $\triangle PAB$ 中, $PA=\sqrt{2},AB=2,\angle PAB=45^\circ$,由余弦定理,得 $PC=PB=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$,则 $PD=1$,又 $AD=\sqrt{3}$,所以 $AD^2=AP^2+PD^2$,则 $\angle APD=90^\circ$,所以 $\sin\angle PAD=\frac{PD}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选B.

8.C 提示:取正 $\triangle BCD$ 的中心为 P ,连接 AP,PC ,则正三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球心 O 在 AP 上,连接 OC ,因为在正 $\triangle BCD$ 中, $BC=2$,所以 $PC=\frac{2}{3}\times BC\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中, $AC=\sqrt{3}$,所以 $AP=\sqrt{AC^2-PC^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.设外接球的半径为 R ,则 $OC=OA=R$,在 $\text{Rt}\triangle OPC$ 中, $OP^2+PC^2=OC^2$,即 $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}-R\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2$,解得 $R=\frac{9}{2\sqrt{15}}$.

所以正三棱锥 $A-BCD$ 的外接球表面积 $S=4\pi R^2=\frac{27\pi}{5}$.故选C.

二、多项选择题

9.BC 提示:对于A,只有当 $\alpha\perp\beta$ 时,才能存在 $m\subset\alpha$,使得 $m\perp\beta$,故A错误;对于B,当 $m//l$ 时,结合线面平行的判定,得 $m//\beta$,故B正确;对于C,若 $\alpha\perp\beta$,则结论成立,若 α 与 β 不垂直,则对任意 $m\subset\alpha$,设 $a\subset\beta$,使得 a 为 m 在平面 β 上的射影,存在 $n\subset\beta$,使得 $n\perp a$,此时 $m\perp n$,故C正确;对于D,当 $m\cap l=A$ 时,在平面 β 内不存在直线 n ,使得 $m//n$,故D错误.故选BC.

10.ACD 提示:对于A,连接 CF ,棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, F 为 DD_1 的中点,所以 $CO=\sqrt{2},OF=\sqrt{3},CF=\sqrt{5}$,则 $CF^2=OC^2+OF^2$,则 $OC\perp OF$,故A正确;对于B,连接 A_1F,A_1O ,易证 $A_1F//CE$,所以 $\angle A_1FO$ (或其补

角)为 CE 与 OF 所成角,在 $\triangle A_1FO$ 中, $A_1F=\sqrt{5},OF=\sqrt{3},A_1O=\sqrt{6}$,由余弦定理的推论,得 $\cos\angle A_1FO=\frac{5+3-6}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$,则 CE 与 OF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$,故B错误;对于C,取 C_1C 的中点 G ,连接 BC ,因为 E,F 分别为 BB_1,DD_1 的中点,易证 $BC//C_1E,BC//AF$,所以 $AF//C_1E$,所以 A,E,C_1,F 四点共面,故C正确;对于D,连接 EF ,则 $AE=AF=\sqrt{5},EF=2\sqrt{2}$,在 $\triangle AEF$ 中,由余弦定理的推论,得 $\cos\angle EAF=\frac{5+5-8}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$,则 $\sin\angle EAF=\frac{2\sqrt{6}}{5}$,所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin\angle EAF=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\sqrt{6}$,故D正确.故选ACD.

11.ABD 提示:对于A,因为 $PB\perp$ 平面 $AEF,PBC\subset$ 平面 PAB ,所以平面 $AEF\perp$ 平面 PAB ,故A正确;对于B,因为 $PB\perp$ 平面 $AEF,AEC\subset$ 平面 AEF ,所以 $PB\perp AE$,又 $\triangle PAB$ 为等边三角形,所以 E 为 PB 的中点,故B正确;对于C,因为 $PB\perp$ 平面 $AEF,EFC\subset$ 平面 AEF ,所以 $PB\perp EF$,设 $\triangle PAB$ 的边长为2,则 $BC=\sqrt{2},PB=2,AB=\sqrt{2}$,取 AB 的中点 O ,连接 CO,PO ,则 $CO=\frac{1}{2}AB=1,PO=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$,因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC ,平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB,CO\perp AB$,所以 $CO\perp$ 平面 PAB ,则 $CO\perp PO$,所以 $PC=\sqrt{PO^2+CO^2}=2$,在 $\triangle BPC$ 中,由余弦定理的推论,可得 $\cos\angle BPC=\frac{PC^2+PB^2-BC^2}{2\cdot PC\cdot PB}=\frac{3}{4}$,在 $\text{Rt}\triangle PEF$ 中, $\cos\angle BPC=\frac{PE}{PF}=\frac{1}{PF}=\frac{3}{4}$,所以 $PF=\frac{4}{3},FC=PC-PF=\frac{2}{3}$,所以 $PF=2FC$,故C错误;对于D,因为 $PF=2FC,M$ 为 EB 的中点,所以 $PE=2EM$,所以 $CM//FE$,又 $FEC\subset$ 平面 $AEF,CM\subset$ 平面 AEF ,所以 $CM//$ 平面 AEF ,故D正确.故选ABD.

12.30 提示:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,由 $S_2=6$,且 a_2 与 a_3 的等差中项为6,得 $a_1+a_2q=6,a_2+a_3=a_1q+a_1q^2=12$,解得 $a_1=q=2$,所以 $S_4=\frac{2\times(1-2^4)}{1-2}=30$.

18.解:(1)因为 $\frac{1}{3a_1}+\frac{1}{5a_2}+\frac{1}{7a_3}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)a_n}=\frac{n}{2n+1}$,所以当 $n\geq2$ 时, $\frac{1}{3a_1}+\frac{1}{5a_2}+\frac{1}{7a_3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)a_{n-1}}=\frac{n-1}{2n-1}$,两式相减,得 $\frac{1}{(2n+1)a_n}=\frac{n}{2n+1}-\frac{n-1}{2n-1}=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$,所以 $a_n=2n-1(n\geq2)$,又当 $n=1$ 时, $\frac{1}{3a_1}=\frac{1}{3}$,则 $a_1=1$,上式仍成立,所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)①由(1)知, $a_n=2n-1$,则 $b_n=\frac{a_n+1}{2^{a_n}}=\frac{2n}{2^{2n-1}}$,所以 $S_n=\frac{2}{2^1}+\frac{4}{2^3}+\frac{6}{2^5}+\cdots+\frac{2n}{2^{2n-1}}$,所以 $\frac{1}{4}S_n=\frac{2}{2^3}+\frac{4}{2^5}+\frac{6}{2^7}+\cdots+\frac{2(n-1)}{2^{2n-1}}+\frac{2n}{2^{2n+1}}$,两式相减,得 $\frac{3}{4}S_n=\frac{2}{2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^5}+\cdots+\frac{2}{2^{2n-1}}-\frac{2n}{2^{2n+1}}=1-\frac{1}{4^n}-\frac{2n}{2^{2n+1}}=\frac{4}{3}-\frac{3n+4}{3\times2^{2n}}$,所以 $S_n=\frac{16}{9}-\frac{12n+16}{9\times2^{2n}}$.

②由①得, $S_n=\frac{16}{9}-\frac{12n+16}{9\times2^{2n}}$,则不等式 $(3n+4)m\geq(2n-5)\left(\frac{16}{9}-S_n\right)\times2^n$ 恒成立,转化为 $m\geq\frac{2n-5}{9\times2^{n-2}}$ 恒成立.设 $c_n=\frac{2n-5}{9\times2^{n-2}}$,则 $c_{n+1}-c_n=\frac{2n-3}{9\times2^{n-1}}-\frac{2n-5}{9\times2^{n-2}}=\frac{7-2n}{9\times2^{n-1}}$,所以当 $n\leq3$ 时, $c_{n+1}>c_n$,当 $n\geq4$ 时, $c_{n+1}<c_n$,所以数列 $\{c_n\}$ 的前4项递增,从第5项开始递减,所以 $\{c_n\}$ 的最大值是 $c_4=\frac{1}{12}$,所以 $m\geq\frac{1}{12}$,即 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{12},+\infty\right)$.

19.解:(1)在排列51243中,与5构成逆序的有4个,与1构成逆序的有0个,与2构成逆序的有0个,与4构成逆序的有1个,与3构成逆序的有0个,所以 $T(51243)=4+0+0+1+0=5$.

(2)由(1)中的方法,同理可得 $T(3412)=4$,因为 $T(51243)=5$,所以 $a_{n+1}=5a_n-4$.设 $a_{n+1}+\lambda=5(a_n+\lambda)$,得 $a_{n+1}=5a_n+4\lambda$,所以 $4\lambda=-4$,解得 $\lambda=-1$,则 $a_{n+1}-1=5(a_n-1)$,因为 $a_1=2$,则 $a_1-1=1$,所以数列 $\{a_n-1\}$ 是首项为1,公比为5的等比数列,所以 $a_n-1=5^{n-1}$,则 $a_n=5^{n-1}+1$.

(3)因为 $j_i=n+1-i(i=1,2,\cdots,n)$,所以 $b_n=T(j_1,j_2,\cdots,j_n)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$.

所以 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,所以 $S_n=\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots+\frac{1}{b_{n+1}}=2\times\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

第15期

第2~3版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A 提示:对于空间中的4个点,若其中3个点共线,则这4个点共面,此时与“四点不共面”矛盾,故A正确;空间中,垂直于同一条直线的两条直线可能平行、相交或异面,故B错误;空间中,两组对边分别相等的四边形可能是空间四边形,也可能是平行四边形,故C错误;两个不重合的平面最多可将空间分成四个部分,故D错误.故选A.

2.C 提示:对于A,直线 m,l 可能平行、相交或异面,故A错误;对于B,平面 α,β 可能相交或平行,故B错误;对于C,由直线与平面平行的性质,可得C正确;对于D,平面 $\alpha//\beta$,故D错误.故选C.

3.B 提示:设正四棱台的斜高为 h ,高为 H ,则表面

即 $\frac{b_n}{n-1}=b_2+\left(\frac{b_3}{2}-\frac{b_2}{1}\right)+\left(\frac{b_4}{3}-\frac{b_3}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{b_n}{n-1}-\frac{b_{n-1}}{n-2}\right)=b_2+(-2)\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)\right]=b_2-2\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$,则 $b_n=b_2(n-1)-2(n-2)=(b_2-2)n+4-b_2$,当 $n=1,n=2$ 时,上式也成立,所以数列 $\{b_n\}$ 是公差为 b_2-2 的等差数列,故C正确;若 $b_2=3$,由C选项,可得 $b_n=n+1$,则 $\frac{1}{b_n\log_2a_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{b_n\log_2a_n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$,故D错误.故选BC.

三、填空题

12.30 提示:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,由 $S_2=6$,且 a_2 与 a_3 的等差中项为6,得 $a_1+a_2q=6,a_2+a_3=a_1q+a_1q^2=12$,解得 $a_1=q=2$,所以 $S_4=\frac{2\times(1-2^4)}{1-2}=30$.

13. $\begin{cases} 9,n=1, \\ 2n+3, n\geq2 \end{cases}$ 提示:因为 $a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=(n+2)^2$,当 $n\geq2$ 时, $a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=(n+1)^2$,两式相减,得 $(2n-1)a_n=2n+3$,所以 $a_n=\frac{2n+3}{2n-1}(n\geq2)$,当 $n=1$ 时, $a_1=9$,上式不成立,所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$a_n=\begin{cases} 9,n=1, \\ 2n+3, n\geq2. \end{cases}$

14. $\frac{3}{32}$ 提示:因为 $2S_n=n^2+n$,当 $n=1$ 时, $2a_1=2S_1=2$,即 $a_1=1$,当 $n\geq2$ 时, $2a_n=2S_n-2S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$,则 $a_n=n(n\geq2)$,当 $n=1$ 时,上式也成立,所以 $a_n=n(n\in\mathbf{N}_+)$,则 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2^n}$,所以 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}\cdot\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$,两式相减,得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$,则 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$,所以 $n|T_{n+1}-2|-t=n\cdot\frac{n+3}{2^{n+1}}-t\leq\frac{7n}{2^{n+1}}$,即 $t\geq\frac{n^2-4n}{2^{n+1}}$ 恒成立.令 $f(n)=\frac{n^2-4n}{2^{n+1}}$,则

$f(n+1)-f(n)=\frac{(n+1)^2-4(n+1)}{2^{n+2}}-\frac{n^2-4n}{2^{n+1}}=\frac{6-(n-3)^2}{2^{n+2}}$,所以当 $1\leq n\leq5$ 时, $f(n+1)>f(n)$, $f(n)$ 单调递增,当 $n\geq6$ 时, $f(n+1)<f(n)$, $f(n)$ 单调递减,所以 $f(n)_{\max}=f(6)=\frac{3}{32}$,所以 $t\geq\frac{3}{32}$,则实数 t 的最小值为 $\frac{3}{32}$.

四、解答题

15.解:(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,因为 $a_3=b_2,b_2=a_2+1$,所以 $a_3=a_2+1$,即 $d=1$.又 $a_1=1$,所以 $a_n=1+(n-1)=n$,所以 $b_2=a_3=3$,又 $b_1=1$,则 $q=\frac{b_2}{b_1}=3$,所以 $b_n=3^{n-1}$.

(2)因为 $c_n=a_n+b_n=n+3^{n-1}$,所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=(1+2+3+\cdots+n)+(1+3+9+\cdots+3^{n-1})=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n+n^2n-1}{2}$.

16.(1)解:因为 $S_n=2a_n-2$,所以当 $n=1$ 时, $S_1=2a_1-2=a_1$,解得 $a_1=2$,当 $n\geq2$ 时, $S_{n-1}=2a_{n-1}-2$,两式相减,得 $a_n=2a_{n-1}$,则 $a_n=2a_{n-1}(n\geq2)$,又 $a_1=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 为以2为首项,2为公比的等比数列,所以 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$.

(2)证明:由(1)知, $a_{2n-1}=2^{2n-1}$,所以 $b_n=\log_2a_{2n-1}=2n-1$,则 $b_{n+1}=2n+1$,所以 $c_n=\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}<\frac{1}{2}$.

17.解:(1)若选①,因为 a_n 是2与 S_n 的等差中项,所以 $2a_n=2+S_n$,所以当 $n\geq2$ 时, $2a_{n-1}=2+S_{n-1}$,两式相减,得 $2a_n-2a_{n-1}=a_n$,即 $a_n=2a_{n-1}(n\geq2)$,在 $2a_n=2+S_n$ 中,令 $n=1$,得 $2a_1=2+S_1=2+a_1$,则 $a_1=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为2,公比为2的等比数列,所以 $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$.

若选②,由 $S_{n+1}=a_1(S_n+1)$,得 $S_{n+1}=2(S_n+1)$,所以当 $n\geq2$ 时, $S_n=2(S_{n-1}+1)$,两式相减,得 $a_{n+1}=2a_n(n\geq2)$,又 $a_1=2$,所以当 $n=1$ 时, $S_1=a_1(S_1+1)$,即 $2+a_1=6$,得 $a_1=4$,所以当 $n=1$ 时, $a_2=2a_1$,上式也成立,所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为2,公比为2的等比数列,所以 $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$.

若选③,在 $S_n=2^{n+1}-2$ 中,令 $n=1$,得 $a_1=2^2-2=2$,当 $n\geq2$ 时, $S_n=2^{n+1}-2$,两式相减,得 $a_{n+1}=2a_n(n\geq2)$,又 $a_1=2$,所以 $a_n=2^n$,所以 $b_n=\frac{a_n}{n-1}=\frac{2^n}{n-2}=\frac{2}{(n-1)(n-2)}=-2\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$,所以 $b_1=\frac{2}{n-1}=\frac{1}{2}$,得 $a_1=b_1+1$,得当 $n=1$ 时, $b_1=T_1=\frac{1}{2}b_1+1$,解得 $b_1=2$,则 $a_1\neq3b_1$,故A错误;当 $n\geq2$ 时, $b_n=T_n-T_{n-1}=\frac{1}{2}nb_n+n-1$,化简得 $(n-2)b_n-(n-1)b_{n-1}+2=0$,当 $n\geq3$ 时,所以 $\frac{b_n}{n-1}-\frac{b_{n-1}}{n-2}=\frac{2}{(n-1)(n-2)}=-2\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$,所以 $\frac{b_n}{n-1}=\frac{b_{n-1}}{n-2}+\frac{2}{(n-1)(n-2)}$,所以 $b_n=b_{n-1}+\frac{2}{n-1}$,所以 $b_n=b_1+\frac{2}{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{n-1}=\frac{n+3}{2n-1}$,所以 $a_n=b_n+1=\frac{n+3}{2n-1}+1=\frac{3n+5}{2n-1}$,所以 $a_n\neq3b_n$,故B错误;对于C,因为 $a_n=\frac{n+3}{2n-1}$,所以 $a_{n+1}=\frac{n+4}{2n+1}$,所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{n+4}{2n+1}-\frac{n+3}{2n-1}=\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}$,所以 $a_{n+1}-a_n\neq0$,故C错误;对于D,因为 $a_n=\frac{n+3}{2n-1}$,所以 $a_{n+1}=\frac{n+4}{2n+1}$,所以 $a_{n+1}a_n=\frac{(n+3)(n+4)}{(2n-1)(2n+1)}$,所以 $a_{n+1}a_n\neq1$,故D错误.故选B.

11.BC 提示:由 $2S_n=3^{n+1}-3$,得 $a_1=S_1=3$,当 $n\geq2$ 时, $2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3^{n+1}-3-(3^n-3)=2\times3^n$,即 $a_n=3^n$,当 $n=1$ 时,上式也成立,所以数列 $\{a_n\}$ 是首项和公比均为3的等比数列,故B正确;由 $\frac{T_n}{n}=\frac{b_n}{2}b_n+1$,得当 $n=1$ 时, $b_1=T_1=\frac{1}{2}b_1+1$,解得 $b_1=2$,则 $a_1\neq3b_1$,故A错误;当 $n\geq2$ 时, $b_n=T_n-T_{n-1}=\frac{1}{2}nb_n+n-1$,化简得 $(n-2)b_n-(n-1)b_{n-1}+2=0$,当 $n\geq3$ 时,所以 $\frac{b_n}{n-1}-\frac{b_{n-1}}{n-2}=\frac{2}{(n-1)(n-2)}=-2\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$,所以 $\frac{b_n}{n-1}=\frac{b_{n-1}}{n-2}+\frac{2}{(n-1)(n-2)}$,所以 $b_n=b_{n-1}+\frac{2}{n-1}$,所以 $b_n=b_1+\frac{2}{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{n-1}=\frac{n+3}{2n-1}$,所以 $a_n=b_n+1=\frac{n+3}{2n-1}+1=\frac{3n+5}{2n-1}$,所以 $a_n\neq3b_n$,故B错误;对于C,因为 $a_n=\frac{n+3}{2n-1}$,所以 $a_{n+1}=\frac{n+4}{2n+1}$,所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{n+4}{2n+1}-\frac{n+3}{2n-1}=\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}$,所以 $a_{n+1}-a_n\neq0$,故C错误;对于D,因为 $a_n=\frac{n+3}{2n-1}$,所以 $a_{n+1}=\frac{n+4}{2n+1}$,所以 $a_{n+1}a_n=\frac{(n+3)(n+4)}{(2n-1)(2n+1)}$,所以 $a_{n+1}a_n\neq1$,故D错误.故选B.

12.30 提示:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,由 $S_2=6$,且 a_2 与 a_3 的等差中项为6,得 $a_1+a_2q=6,a_2+a_3=a_1q+a_1q^2=12$,解得 $a_1=q=2$,所以 $S_4=\frac{2\times(1-2^4)}{1-2}=30$.

18.解:(1)因为 a_n 是2与 S_n 的等差中项,所以 $2a_n=2+S_n$,所以当 $n\geq2$ 时, $2a_{n-1}=2+S_{n-1}$,两式相减,得 $2a_n-2a_{n-1}=a_n$,即 $a_n=2a_{n-1}(n\geq2)$,在 $2a_n=2+S_n$ 中,令 $n=1$,得 $2a_1=2+S_1=2+a_1$,则 $a_1=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为2,公比为2的等比数列,所以 $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$.

若选③,在 $S_n=2^{n+1}-2$ 中,令 $n=1$,得 $a_1=2^2-2=2$,当 $n\geq2$ 时, $S_n=2^{n+1}-2$,两式相减,得 $a_{n+1}=2a_n(n\geq2)$,又 $a_1=2$,所以 $a_n=2^n$,所以 $b_n=\frac{a_n}{n-1}=\frac{2^n}{n-2}=\frac{2}{(n-1)(n-2)}=-2\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$,所以 $b_1=\frac{2}{n-1}=\frac{1}{2}$,得 $a_1=b_1+1$,得当 $n=1$ 时, $b_1=T_1=\frac{1}{2}b_1+1$,解得 $b_1=2$,则 $a_1\neq3b_1$,故A错误;当 $n\geq2$ 时, $b_n=T_n-T_{n-1}=\frac{1}{2}nb_n+n-1$,化简得 $(n-2)b_n-(n-1)b_{n-1}+2=0$,当 $n\geq3$ 时,所以 $\frac{b_n}{n-1}-\frac{b_{n-1}}{n-2}=\frac{2}{(n-1)(n-2)}=-2\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$,所以 $\frac{b_n}{n-1}=\frac{b_{n-1}}{n-2}+\frac{2}{(n-1)(n-2)}$,所以 $b_n=b_{n-1}+\frac{2}{n-1}$,所以 $b_n=b_1+\frac{2}{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{n-1}=\frac{n+3}{2n-1}$,所以 $a_n=b_n+1=\frac{n+3}{2n-1}+1=\frac{3n+5}{2n-1}$,所以 $a_n\neq3b_n$,故B错误;对于C,因为