

## 第9期

## 第3~4版同步周测参考答案

## 一、单项选择题

1.B 提示: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$ .故选B.2.D 提示:向量 $a$ 在向量 $b$ 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b = \frac{2+8-8}{1+4+4} \cdot (1, 2, 2) = \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$ .

扫码免费下载

习题讲解ppt

故选D.

3.D 提示:由题意知, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ ,因为 $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=b, \overrightarrow{OC}=c$ ,所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(c-a-b)$ .故选D.4.D 提示:因为 $a, b, c$ 共面,且 $a, b$ 都不是零向量,所以存在实数 $m, n$ ,使得 $c=ma+nb$ ,又 $a=(1, -1, 4), b=(-2, 1, -2), c=(-3, 1, \lambda)$ ,即 $(-3, 1, \lambda)=(m, -m, 4m)+(-2n, n, -2n)$ ,所以 $\begin{cases} m-2n=-3, \\ 4m-2n=\lambda, \end{cases}$ 解得 $m=1, n=2, \lambda=0$ .故选D.5.C 提示:因为点 $B(-1, 1, 4), C(2, -1, 3)$ ,所以 $\overrightarrow{BC}=(3, -2, -1)$ ,因为 $\overrightarrow{AP}=(3\lambda, -2\lambda, -\lambda)$ ,所以可设 $\overrightarrow{AP}=(3\lambda, -2\lambda, -\lambda)$ ,因为 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{14}$ ,所以 $\sqrt{(3\lambda)^2+(-2\lambda)^2+(-\lambda)^2}=\sqrt{14}$ ,解得 $\lambda=\pm 1$ ,所以 $\overrightarrow{AP}=(3, -2, -1)$ 或 $\overrightarrow{AP}=(-3, 2, 1)$ .设点 $P$ 的坐标为 $(x, y, z)$ ,则 $\overrightarrow{AP}=(x-1, y, z-3)$ ,所以 $\begin{cases} x-1=3, \\ y=-2, \\ z-3=-1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1=-3, \\ y=2, \\ z-3=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=-2, \\ z=2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2, \\ y=2, \\ z=4, \end{cases}$ 故点 $P$ 的坐标为 $(4, -2, 2)$ 或 $(-2, 2, 4)$ .故选C.6.C 提示:连接 $AM, AN$ ,因为 $G$ 是 $MN$ 的中点,所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ .因为 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AA_1}+z\overrightarrow{AC}$ ,所以 $x+y+z=\frac{3}{2}$ .故选C.7.C 提示:因为向量 $a=(1, 2, 3), b=(-2, -4, -6)$ ,所以 $a+b=(-1, -2, -3)$ .设 $c=(x, y, z)$ ,由 $(a+b) \cdot c=7$ ,得 $(-1, -2, -3) \cdot (x, y, z)=-x-2y-3z=7$ ,所以 $x+2y+3z=-7$ ,即 $a \cdot c=-7$ .设 $a, c$ 的夹角等于 $\theta$ ,则 $\cos \theta = \frac{a \cdot c}{|a| \cdot |c|} = \frac{-7}{\sqrt{1+4+9} \times \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$ .再由 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ,可得 $\theta=120^\circ$ .故选C.8.B 提示:由题意得 $\overrightarrow{BA}=(2, 2, 4), \overrightarrow{BC}=(-2, -2, 4)$ ,故 $\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-2 \times 2 + 2 \times (-2) + 4 \times 4}{\sqrt{2^2+2^2+4^2} \times \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{1}{3}$ .故 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,所以 $BC$ 边上的高 $d=|\overrightarrow{BA}| \sin B=2\sqrt{6} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ .故选B.

## 二、多项选择题

9.AB 提示: $e_1=(t, 2t, 2), e_2=(2t-2, -t, -1)$ .对于A,若 $e_1 \perp e_2$ ,则 $e_1 \cdot e_2=t(2t-2)-2t^2-2=0$ ,解得 $t=-1$ .故A正确;对于B,显然, $t=0$ 不符合题意,因为 $e_1 // e_2$ ,所以 $\frac{2t-2}{t} = \frac{-t}{2t} = -\frac{1}{2}$ ,解得 $t=\frac{4}{5}$ ,故B正确;对于C,D,若 $e_1 \perp e_2$ ,则 $t^2+(2t)^2+4=\sqrt{5}t^2+4 \geq 2$ ,当 $t=0$ 时, $|e_1|$ 的最小值为2,故C,D错误.故选AB.10.BC 提示:若 $P_1$ 与A重合,则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PA}^2=1$ ;若 $P_1$ 与A'重合,则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP_1}) = \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{PA}^2=1$ ;同理,若点 $P_1$ 在底面 $A'B'C'D'E'F'$ 的某个顶点处(不与A'重合), $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PP_1}=1$ .综上所述, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PP_1}$ 的值可以是-1或1.故选BC.11.BC 提示:对于A,取 $a=(1, 1, 0), b=(-1, 1, 0), c=(1, 2, 1)$ ,则 $a \cdot b=-1+1+0=0, b \cdot c=-1+2+0=1$ ,此时 $(a \cdot b) \cdot c=0 \cdot c=0, a \cdot (b \cdot c)=a \cdot a=1$ ,等式 $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ 不成立,故A错误;对于B,点 $(x, y, z)$ 关于坐标平面 $yOz$ 的对称点是 $(-x, y, z)$ ,因此,点 $P(-1, 3, 5)$ 关于坐标平面 $yOz$ 的对称点是 $P'(-1, 3, 5)$ ,故B正确;对于C,若 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为空间向量的一组基, $a=e_1-2e_2+e_3, b=-e_1+3e_2+2e_3, c=-3e_1+7e_2$ ,所以点 $P$ 到直线 $l$ 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}\right)^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .故选A.7.C 提示:设球的半径为 $R(R>0)$ ,记四边形 $ABCD$ 中心为 $O$ ,因为四边形 $ABCD$ 为正方形,直线 $PQ$ 经过球心,且 $PQ \perp$ 平面 $ABCD$ ,所以 $PQ$ 过点 $O$ 且 $PQ$ 的中点为球心,设球心为 $G$ ,以 $O$ 为坐标原点, $OB, OC, OP$ 所在直线分别为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,设 $OA=OB=OC=OD=r(r>0), G(0, 0, t)(-R<t<R)$ ,则 $A(0, -r, 0), B(r, 0, 0), P(0, 0, R+t), Q(0, 0, R-t)$ ,所以 $\overrightarrow{PA}=(0, -r, -R-t), \overrightarrow{QB}=(r, 0, -R)$ ,所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}=-(t+R)(t-R)=R^2-t^2$ ,所以 $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{r^2+(R+t)^2}, |\overrightarrow{QB}|=\sqrt{r^2+(R-t)^2}$ ,又 $OG^2+OB^2=R^2$ ,所以 $t^2+r^2=R^2$ ,故点 $C$ 到直线 $AB$ 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2-d^2}=\sqrt{3}$ .14.  $\frac{\pi}{3}$  提示:以点 $A$ 为坐标原点, $AB, AC, AA_1$ 所在直线为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,设 $CN=b, BM=a$ ,则 $N(0, 1, b), M(1, 0, a), A(0, 0, 0), B(1, 0, 0)$ ,所以 $\overrightarrow{AM}=(1, 0, a), \overrightarrow{AN}=(0, 1, b)$ ,设平面 $AMN$ 的法向量为 $n=(x, y, z)$ ,则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AM} = x + az = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AN} = y + bz = 0, \end{cases}$ 令 $z=1$ ,则 $x=-a, y=-b, z=1$ ,又平面 $ABC$ 的一个法向量为 $m=(0, 0, 1)$ ,因为平面 $AMN$ 与平面 $ABC$ 所成锐二面角的平面角的大小为 $\frac{\pi}{6}$ ,所以 $|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| |n|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,化简得 $3a^2 + 3b^2 = 1$ ,当 $CN$ 最小时,则 $b=0, BM=a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,所以 $\tan \angle AMB = \frac{AB}{BM} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$ ,所以 $\angle AMB = \frac{\pi}{3}$ .

四、解答题

15.(1)证明:根据题意,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,因为侧棱 $A_1A \perp$ 平面 $ABCD$ ,所以 $A_1A \perp AB, A_1A \perp AD$ ,又 $AB \perp AD$ ,则以 $A$ 为坐标原点, $AD, AA_1, AB$ 所在直线分别为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,设 $A(0, 0, 0), B(0, 0, 2), D(1, 0, 0), C(1, 0, 1), E(0, 1, 0), C_1(1, 2, 1)$ ,所以 $\overrightarrow{BC}=(-1, 0, -1), \overrightarrow{EC_1}=(1, 1, 1)$ ,所以 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EC_1}=1 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$ ,所以 $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{EC_1}$ ,故 $BC \perp EC_1$ .(2)解:由(1)知, $C(1, 0, 1), E(0, 1, 0)$ ,而 $M$ 为 $CE$ 的中点,则 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,所以 $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \overrightarrow{AD}=(1, 0, 0)$ , $\cos \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BM}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}} \times 1} = \frac{\sqrt{11}}{11}$ .所以异面直线 $BM$ 与 $AD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$ .16.(1)证明:设 $AC \cap BD=O$ ,连接 $FO$ ,因为底面 $ABCD$ 为正方形, $E \in AC$ ,且 $E$ 为 $\triangle BCD$ 的重心,所以 $EO=\frac{1}{3}OC=\frac{1}{3}OA$ ,因为 $A, F=\frac{1}{3}FA$ ,所以 $\frac{A_1F}{FA}=\frac{EO}{OA}=\frac{1}{3}$ ,所以 $A_1E \parallel FO$ ,因为 $A_1E \subset$ 平面 $BDF, FO \subset$ 平面 $BDF$ ,所以 $A_1E \parallel$ 平面 $BDF$ .(2)解:以 $A$ 为坐标原点,直线 $AB, AD, AA_1$ 为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,由已知得, $B(3, 0, 0), D(0, 3, 0), F(0, 0, 3)$ ,所以 $\overrightarrow{BD}=(-3, 3, 0), \overrightarrow{BF}=(-3, 0, 3)$ ,设平面 $BDF$ 的法向量为 $n=(x, y, z)$ ,所以 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -3x+3y=0, \\ -3x+3z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$ ,则 $y=1, z=1$ ,所以 $n=(1, 1, 1)$ .由题意知, $A_1F=1$ ,则 $D_1(0, 3, 4), E(2, 2, 0)$ ,所以 $\overrightarrow{ED_1}=(-2, 1, 4)$ ,所以 $\cos \langle n, \overrightarrow{ED_1} \rangle = \frac{n \cdot \overrightarrow{ED_1}}{|n| |\overrightarrow{ED_1}|} = \frac{3}{\sqrt{3} \times \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ .所以 $\sin \theta = |\cos \langle n, \overrightarrow{ED_1} \rangle| = \frac{\sqrt{7}}{7}$ ,所以 $ED_1$ 与平面 $BDF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$ .17.(1)证明:因为底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle ADC=120^\circ$ ,所以 $\angle DAB=60^\circ$ .又 $DA=4, AB=8$ ,由余弦定理,得 $DB^2=AB^2+AD^2-2AB \cdot AD \cos 60^\circ=48$ ,所以 $DB=4\sqrt{3}$ ,则 $DA^2+DB^2=AB^2$ ,所以 $DA \perp DB$ .因为侧棱 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD, DB \subset$ 平面 $ABCD$ ,所以 $DD_1 \perp DB$ ,又 $ADC$ 平面 $ADD_1A_1, DD_1 \subset$ 平面 $ADD_1A_1$ ,且 $AD \cap$  $DD_1=D$ ,所以 $DB \perp$ 平面 $ADD_1A_1$ ,又 $AA_1 \subset$ 平面 $ADD_1A_1$ ,所以 $BD \perp AA_1$ .(2)解:连接 $B_1D_1$ .易知 $A_1D_1=2, B_1D_1=2\sqrt{3}, B_1D_1 \perp A_1D_1$ ,因为四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ ,且 $V=\frac{1}{3}(S_{ABCD}+S_{A_1B_1C_1D_1}+\sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}}) \cdot DD_1$ ,所以 $\frac{28\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}DD_1(AD \cdot DB + A_1D_1 \cdot D_1B_1 + \sqrt{AD \cdot DB \cdot A_1D_1 \cdot D_1B_1})$ ,即 $\frac{28\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}DD_1 \cdot 28\sqrt{3}$ ,解得 $DD_1=1$ .以点 $D$ 为坐标原点, $DA, DB, DD_1$ 所在直线为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,则 $A(4, 0, 0), B(0, 4\sqrt{3}, 0), C(-4, 4\sqrt{3}, 0), B_1(0, 2\sqrt{3}, 1)$ ,所以 $\overrightarrow{BC}=(-4, 0, 0), \overrightarrow{BB_1}=(0, -2\sqrt{3}, 1)$ .设平面 $BCC_1B_1$ 的法向量为 $n=(x, y, z)$ ,则有 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BC} = -4x = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BB_1} = -2\sqrt{3}y + z = 0, \end{cases}$ 令 $y=1$ ,则 $x=0, z=2\sqrt{3}$ ,所以 $n=(0, 1, 2\sqrt{3})$ ,平面 $ADD_1A_1$ 的一个法向量为 $m=(0, 1, 0)$ .设平面 $ADD_1A_1$ 与平面 $BCC_1B_1$ 所成锐二面角的平面角为 $\theta$ ,所以 $\cos \theta = |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| |n|} = \frac{1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ .所以平面 $ADD_1A_1$ 与平面 $BCC_1B_1$ 所成锐二面角的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$ .18.(1)证明:由三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 知, $B_1C_1 \parallel$ 平面 $ABC$ ,因为 $B_1C_1 \subset$ 平面 $AB_1C_1$ ,且平面 $AB_1C_1 \cap$ 平面 $ABC=l$ ,所以 $B_1C_1 \parallel l$ ,又 $B_1C_1 \parallel BC$ ,所以 $BC \parallel l$ ,因为 $EF \perp l$ ,所以 $EF \perp BC$ ,又 $EF \perp BB_1, BC \cap BB_1=B$ ,所以 $EF \perp$ 平面 $BCC_1B_1$ .(2)解:以 $A$ 为坐标原点, $l$ 为 $x$ 轴,在底面 $ABC$ 内,过 $A$ 垂直于 $BC$ 的直线为 $y$ 轴, $AA_1$ 为 $z$ 轴,建立空间直角坐标系,设三棱台的高为 $h$ ,则 $B(2, 2\sqrt{3}, 0), B_1(1, \sqrt{3}, h), C(-2, 2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{CB}=(4, 0, 0), \overrightarrow{BB_1}=(-1, -\sqrt{3}, h)$ ,设平面 $BCC_1B_1$ 的法向量为 $n=(x, y, z)$ ,则 $\begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot n = 0, \\ \overrightarrow{BB_1} \cdot n = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4x = 0, \\ -x - \sqrt{3}y + zh = 0, \end{cases}$ 令 $z=\sqrt{3}$ ,可得 $n=(0, h, \sqrt{3})$ ,易得平面 $ABC$ 的一个法向量 $m=(0, 0, 1)$ ,设 $EF$ 与平面 $BCC_1B_1$ 所成的角为 $\theta$ ,所以 $\sin \theta = |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| |n|} = \frac{\sqrt{3}}{1 \times \sqrt{3+h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,解得 $h=\sqrt{6}$ ,所以该三棱台的高为 $\sqrt{6}$ .19.(1)证明:连接 $BC_1$ ,由四棱柱的性质知,平面 $AA_1D_1D \parallel$ 平面 $BCC_1B_1$ ,因为 $AD_1 \subset$ 平面 $AA_1D_1D$ ,所以 $AD_1 \parallel$ 平面 $BCC_1B_1$ ,又 $AD_1 \subset$ 平面 $AFED_1$ ,且平面 $AFED_1 \cap$ 平面 $BCC_1B_1=EF$ ,所以 $AD_1 \parallel EF$ ,又 $AD_1 \parallel BC_1$ ,所以 $EF \parallel BC_1$ ,因为 $E$ 是 $CC_1$ 的中点,所以点 $F$ 为线段 $BC$ 的中点.(2)解:选择①②.因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ,四边形 $ABCD$ 是正方形,所以四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为2的正方体,故以 $D$ 为坐标原点, $DA, DC, DD_1$ 所在直线为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,则 $D_1(0, 0, 2), A(2, 0, 0), F(1, 2, 0), B_1(2, 2, 2)$ ,所以 $\overrightarrow{AF}=(-1, 2, 0), \overrightarrow{AD_1}=(-2, 0, 2), \overrightarrow{AB_1}=(0, 2, 2)$ .(i)设平面 $D_1AF$ 的法向量为 $m=(x, y, z)$ ,则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AF} = -x+2y=0, \\ m \cdot \overrightarrow{AD_1} = -2x+2z=0, \end{cases}$ 取 $y=1$ ,则 $x=2, z=2$ ,所以 $m=(2, 1, 2)$ .由 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ,知平面 $ABF$ 的一个法向量为 $n=(0, 0, 1)$ ,所以 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{2}{3 \times 1} = \frac{2}{3}$ .由图知,二面角 $D_1-AF-B$ 的平面角为钝角,所以二面角 $D_1-AF-B$ 的平面角的余弦值为 $-\frac{2}{3}$ .(ii)由(i)知,平面 $AD_1EF$ 的一个法向量为 $m=(2, 1, 2)$ ,所以点 $B_1$ 到平面 $AD_1EF$ 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot m|}{|m|} = \frac{|2+4|}{3} = 2$ .选择①③.因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD, AD, CD \subset$ 平面 $ABCD$ ,所以 $DD_1 \perp AD, DD_1 \perp CD$ ,所以 $\angle ADC$ 是二面角 $A-DD_1-C$ 的平面角,所以 $\angle ADC=90^\circ$ ,所以 $DA, DC, DD_1$ 两两垂直,所以四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为2的正方体.下面的过程与选择①②时一样.选择②③.由于 $DD_1$ 与底面 $ABCD$ 的位置关系不确定,所以四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 不唯一.所以点 $P$ 到直线 $l$ 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}\right)^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .故选A.7.C 提示:设球的半径为 $R(R>0)$ ,记四边形 $ABCD$ 中心为 $O$ ,因为四边形 $ABCD$ 为正方形,直线 $PQ$ 经过球心,且 $PQ \perp$ 平面 $ABCD$ ,所以 $PQ$ 过点 $O$ 且 $PQ$ 的中点为球心,设球心为 $G$ ,以 $O$ 为坐标原点, $OB, OC, OP$ 所在直线分别为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,设 $OA=OB=OC=OD=r(r>0), G(0, 0, t)(-R<t<R)$ ,则 $A(0, -r, 0), B(r, 0, 0), P(0, 0, R+t), Q(0, 0, R-t)$ ,所以 $\overrightarrow{PA}=(0, -r, -R-t), \overrightarrow{QB}=(r, 0, -R)$ ,所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}=-(t+R)(t-R)=R^2-t^2$ ,所以 $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{r^2+(R+t)^2}, |\overrightarrow{QB}|=\sqrt{r^2+(R-t)^2}$ ,又 $OG^2+OB^2=R^2$ ,所以 $t^2+r^2=R^2$ ,故点 $C$ 到直线 $AB$ 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2-d^2}=\sqrt{3}$ .14.  $\frac{\pi}{3}$  提示:以点 $A$ 为坐标原点, $AB, AC, AA_1$ 所在直线为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,设 $CN=b, BM=a$ ,则 $N(0, 1, b), M(1, 0, a), A(0, 0, 0), B(1, 0, 0)$ ,所以 $\overrightarrow{AM}=(1, 0, a), \overrightarrow{AN}=(0, 1, b)$ ,设平面 $AMN$ 的法向量为 $n=(x, y, z)$ ,则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AM} = x + az = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AN} = y + bz = 0, \end{cases}$ 令 $z=1$ ,则 $x=-a, y=-b, z=1$ ,又平面 $ABC$ 的一个法向量为 $m=(0, 0, 1)$ ,因为平面 $AMN$ 与平面 $ABC$ 所成锐二面角的平面角的大小为 $\frac{\pi}{6}$ ,所以 $|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| |n|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,化简得 $3a^2 + 3b^2 = 1$ ,当 $CN$ 最小时,则 $b=0, BM=a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,所以 $\tan \angle AMB = \frac{AB}{BM} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$ ,所以 $\angle AMB = \frac{\pi}{3}$ .

四、解答题

15.(1)证明:根据题意,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,因为侧棱 $A_1A \perp$ 平面 $ABCD$ ,所以 $A_1A \perp AB, A_1A \perp AD$ ,又 $AB \perp AD$ ,则以 $A$ 为坐标原点, $AD, AA_1, AB$ 所在直线分别为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,设 $A(0, 0, 0), B(0, 0, 2), D(1, 0, 0), C(1, 0, 1), E(0, 1, 0), C_1(1, 2, 1)$ ,所以 $\overrightarrow{BC}=(-1, 0, -1), \overrightarrow{EC_1}=(1, 1, 1)$ ,所以 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EC_1}=1 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$ ,所以 $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{EC_1}$ ,故 $BC \perp EC_1$ .(2)解:由(1)知, $C(1, 0, 1), E(0, 1, 0)$ ,而 $M$ 为 $CE$ 的中点,则 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,所以 $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \overrightarrow{AD}=(1, 0, 0)$ , $\cos \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BM}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}} \times 1} = \frac{\sqrt{11}}{11}$ .所以异面直线 $BM$ 与 $AD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$ .16.(1)证明:设 $AC \cap BD=O$ ,连接 $FO$ ,因为底面 $ABCD$ 为正方形, $E \in AC$ ,且 $E$ 为 $\triangle BCD$ 的重心,所以 $EO=\frac{1}{3}OC=\frac{1}{3}OA$ ,因为 $A, F=\frac{1}{3}FA$ ,所以 $\frac{A_1F}{FA}=\frac{EO}{OA}=\frac{1}{3}$ ,所以 $A_1E \parallel FO$ ,因为 $A_1E \subset$ 平面 $BDF, FO \subset$ 平面 $BDF$ ,所以 $A_1E \parallel$ 平面 $BDF$ .(2)解:以 $A$ 为坐标原点,直线 $AB, AD, AA_1$ 为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,由已知得, $B(3, 0, 0), D(0, 3, 0), F(0, 0, 3)$ ,所以 $\overrightarrow{BD}=(-3, 3, 0), \overrightarrow{BF}=(-3, 0, 3)$ ,设平面 $BDF$ 的法向量为 $n=(x, y, z)$ ,所以 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -3x+3y=0, \\ -3x+3z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$ ,则 $y=1, z=1$ ,所以 $n=(1, 1, 1)$ .由题意知, $A_1F=1$ ,则 $D_1(0, 3$



3.7.A 提示:在三棱锥 $P-ABC$ 中, $CP,CA,CB$ 两两互相垂直, $AC=CB=1,PC=2$ ,

由题意知, $P(0,0,2),A(1,0,0),B(0,1,0)$ ,则 $\overrightarrow{PA}= (1,0,-2),\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ ,

设平面 $PAB$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ ,由 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} x-2z=0, \\ -x+y=0, \end{cases} \text{令 } z=1, \text{得 } \boldsymbol{n}=(2,2,1),$$

又 $\left(1,1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{n}$ ,所以平面 $PAB$ 的一个法向量为 $\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$ ,故选A.

8.D 提示:以 $D$ 为坐标原点,分别以 $DA,DC,DD_1$ 所在直线为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,

设 $P(a,b,1),CM=t\in[0,1]$ ,则 $M(0,1,t),A(1,0,0),B(1,1,0),D_1(0,0,1)$ ,

所以 $\overrightarrow{AP}=(a-1,b,1),\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1),\overrightarrow{MD_1}=(0,-1,1-t)$ ,因为 $AP\perp$ 平面 $MBD_1$ ,

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD_1}=1-a-b+1=0, \\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MD_1}=-b+1-t=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1+t, \\ b=1-t, \end{cases}$

所以 $P(1+t,1-t,1)$ ,

$$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(1+t-1)^2+(1-t)^2+1^2}=\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}.$$

又因为 $t\in[0,1]$ ,结合二次函数性质可得 $|\overrightarrow{AP}|$ 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$ ,故选D.

#### 二、多项选择题

9.AD 提示:若 $l\parallel\alpha$ ,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ ,所以 $-\boldsymbol{2m}+\boldsymbol{n}+3=0$ ,即 $2m-\boldsymbol{n}=3$ ,故A正确,C错误;

若 $l\perp\alpha$ ,则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ ,所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ ,可得 $-2=\lambda m,\boldsymbol{n}=\lambda,1=3\lambda$ ,

解得 $\lambda=\frac{1}{3},m=-6,\boldsymbol{n}=\frac{1}{3}$ ,则 $m\boldsymbol{n}+2=-2+2=0$ ,故B错误,D正确.

故选AD.

10.AC 提示:因为点 $P$ 是平行四边形 $ABCD$ 所在的平面外一点, $\overrightarrow{AB}=(2,-1,-4),\overrightarrow{AD}=(4,2,0),\overrightarrow{AP}=(-1,2,-1)$ ,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=-2-2+4=0$ ,所以 $AP\perp AB$ ,故A正确; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=8-2+0=6\neq0$ ,所以 $AB,AD$ 不垂直,故B错误;

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=-4+4+0=0$ ,所以 $AP\perp AD$ ,又 $AP\perp AB,AB\cap AD=A$ ,所以 $AP\perp$ 平面 $ABCD$ ,故C正确; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(2,3,4)$ ,所以 $AP$ 与 $BD$ 不平行,故D错误.故选AC.

11.BCD 提示:由空间直角坐标系 $D_{xyz}$ ,得 $D(0,0,0),A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,2,0),A_1(2,0,2),B_1(2,2,2),C_1(0,2,2),D_1(0,0,2)$ ,

因为 $E$ 为 $BB_1$ 的中点, $F$ 为 $A_1D_1$ 的中点,所以 $E(2,2,1),F(1,0,2)$ .

对于A, $|\overrightarrow{DB_1}|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$ ,故A错误;

对于B,因为 $\overrightarrow{AE}=(0,2,1),\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)$ ,所以 $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{5},|\overrightarrow{AC_1}|=2\sqrt{3}$ ,

$$\text{故 } \cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{4+2}{\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}, \text{故 B 正确;}$$

对于C,设平面 $AEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ ,因为 $\overrightarrow{AE}=(0,2,1),\overrightarrow{AF}=(-1,0,2)$ ,

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2y+z=0, \\ -x+2z=0, \end{cases}$ 令 $x=4$ ,则 $\boldsymbol{n}=(4,-1,2)$ ,故C正确;

对于D,由于 $\overrightarrow{A_1D}=(2,0,-2),\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$ ,故 $\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BD_1}=4+0-4=0$ ,故 $A_1D\perp BD_1$ ,故D正确.故选BCD.

#### 三、填空题

12. $\perp\alpha$  提示:因为 $\boldsymbol{m}=\left(2,\frac{1}{2},-1\right),\boldsymbol{n}=(-4,-1,2)$ ,所以 $\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{m}$ ,所以 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$ ,所以 $\perp\alpha$ .

13.6 提示:因为 $\alpha\perp\beta$ ,

所以 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=-6+y+z=0$ ,所以 $y+z=6$ .

14.1 提示:以 $A$ 为原点, $AB,AD,AP$ 所在直线分别为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,设正方形 $ABCD$ 的边长为1, $PA=a$ ,则 $B(1,0,0),E\left(\frac{1}{2},1,0\right),P(0,0,a)$ ,设

$F(0,y,0)$ ,则 $\overrightarrow{BF}=(-1,y,0),\overrightarrow{PE}=\left(\frac{1}{2},1,-a\right)$ .

因为 $BF\perp PE$ ,所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{PE}=-\frac{1}{2}+y=0$ ,得 $y=\frac{1}{2}$ ,即

$F\left(0,\frac{1}{2},0\right)$ 是 $AD$ 的中点,故 $\frac{AF}{FD}=1$ .

#### 四、解答题

15.解:以 $\left\{\frac{1}{3}\overrightarrow{DA},\frac{1}{4}\overrightarrow{DC},\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}\right\}$ 为空间的一组标准正交基,建立空间直角坐标系 $D_{xyz}$ ,

则 $A(3,0,0),B(3,4,0),D_1(0,0,2)$ ,

得 $\overrightarrow{AB}=(0,4,0),\overrightarrow{AD_1}=(-3,0,2)$ ,

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 $ABD_1$ 的法向量,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=4y=0, \\ \overrightarrow{AD_1}\cdot\boldsymbol{n}=-3x+2z=0, \end{cases}$ 取 $x=2$ ,得 $\boldsymbol{n}=(2,0,3)$ ,

所以平面 $ABD_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,0,3)$ .

16.证明:(1)以 $D$ 为原点, $DA,DC,DD_1$ 所在直线分别为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,不妨设该正方体的棱长为2,

则 $D(0,0,0),A_1(2,0,2),E(2,2,1),F(1,1,2),C(0,2,0)$ ,所以 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0),\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$ ,

因为 $DC\perp$ 平面 $BCC_1B_1$ ,所以 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$ 为平面 $BCC_1B_1$ 的一个法向量,

又 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$ ,所以 $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{DA_1}$ ,又 $A_1D\not\subset$ 平面 $BCC_1B_1$ ,所以 $A_1D\parallel$ 平面 $BCC_1B_1$ .

(2)由(1)知 $\overrightarrow{EF}=(-1,-1,1)$ ,所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=-1\times2+(-1)\times0+1\times2=0$ ,所以 $EF\perp A_1D$ .

17.证明:(1)以 $D$ 为坐标原点, $DA,DC,DD_1$ 所在直线分别为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,

则 $A(1,0,0),E(0,1,0),D_1(0,0,1)$ ,

$B_1(1,2,1),F(1,1,1),B(1,2,0)$ ,

所以 $\overrightarrow{ED_1}=(0,-1,1),\overrightarrow{BF}=(0,-1,1)$ ,所以 $\overrightarrow{ED_1}=\overrightarrow{BF}$ ,

又 $B,F,D_1,E$ 四点不共线,所以四边形 $BFD_1E$ 为平行四边形.

(2)由(1)知 $\overrightarrow{EB_1}=(1,1,1),\overrightarrow{EA}=(1,-1,0)$ ,

所以 $\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{ED_1}=1\times0+1\times(-1)+1\times1=0,\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{EA}=1\times1+1\times(-1)+1\times0=0$ ,

所以 $\overrightarrow{EB_1}\perp\overrightarrow{ED_1},\overrightarrow{EB_1}\perp\overrightarrow{EA}$ ,

即 $EB_1\perp ED_1,EB_1\perp EA$ ,

又因为 $ED_1\cap EA=E,ED_1,EA\subset$ 平面 $AED_1$ ,

所以 $B_1E\perp$ 平面 $AED_1$ .

18.证明:(1)取 $BC$ 的中点 $O$ ,连接 $PO$ ,因为 $\triangle PBC$ 为等边三角形,所以 $PO\perp BC$ .

因为平面 $PBC\perp$ 底面 $ABCD,BC$ 为交线, $PO\subset$ 平面 $PBC$ ,所以 $PO\perp$ 底面 $ABCD$ .

以 $BC$ 的中点 $O$ 为坐标原点,以 $BC$ 所在直线为 $x$ 轴,过点 $O$ 与 $AB$ 平行的直线为 $y$ 轴, $OP$ 所在直线为 $z$ 轴,建立空间直角坐标系,

不妨设 $CD=1$ ,则 $AB=BC=2,PO=\sqrt{3}$ ,所以 $A(1,-2,0),B(1,0,0),D(-1,-1,0),P(0,0,\sqrt{3})$ ,

所以 $\overrightarrow{BD}=(-2,-1,0),\overrightarrow{PA}=(1,-2,-\sqrt{3})$ .

因为 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PA}=-2+2+0=0$ ,

所以 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BD}$ ,所以 $PA\perp BD$ .

(2)取 $PA$ 的中点 $M$ ,连接 $DM$ ,

则 $M\left(\frac{1}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 因为 $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{3})$ ,所以 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{3}{2}+0-\frac{3}{2}=0$ ,

所以 $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PB}$ ,即 $DM\perp PB$ .因为 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}+0-\frac{3}{2}=0$ ,

所以 $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PA}$ ,即 $DM\perp PA$ .因为 $PA\cap PB=P,PA,PB\subset$ 平面 $PAB$ ,所以 $DM\perp$ 平面 $PAB$ .

因为 $DM\subset$ 平面 $PAD$ ,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $PAB$ .

19.证明:(1)以 $D$ 为原点, $DA,DC,DD_1$ 所在直线分别为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2,则 $A(2,0,2),B(2,2,0),B_1(2,2,2),C(0,2,0),D(0,0,0),D_1(0,0,2)$ ,故 $\overrightarrow{DA}=(2,0,2),\overrightarrow{DB}=(2,2,0),\overrightarrow{B_1C}=(-2,0,-2),\overrightarrow{B_1D_1}=(-2,-2,0)$ .

设平面 $A_1BD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ ,则 $\begin{cases} \overrightarrow{DA_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=0, \\ \overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}_1=0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2x_1+2z_1=0, \\ 2x_1+2y_1=0, \end{cases}$ 令 $x_1=1$ ,则 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,-1)$ .

设平面 $B_1CD_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ ,则 $\begin{cases} \overrightarrow{B_1C}\cdot\boldsymbol{n}_2=0, \\ \overrightarrow{B_1D_1}\cdot\boldsymbol{n}_2=0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} -2x_2-2z_2=0, \\ -2x_2-2y_2=0, \end{cases}$ 令 $x_2=1$ ,则 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,-1)$ ,所以 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2$ ,即

$\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$ ,故平面 $A_1BD\parallel$ 平面 $B_1CD_1$ .

(2)因为 $M,N$ 分别是线段 $AB,B_1C$ 的中点, $A(2,0,0)$ ,所以 $M(2,1,0),N(1,2,1)$ ,所以 $\overrightarrow{MN}=(-1,1,1)$ ,则 $\overrightarrow{MN}\parallel\boldsymbol{n}_1$ ,所以 $MN\perp$ 平面 $A_1BD$ .

#### 第11期

第3~4版同步周测参考答案

#### 一、单项选择题

1.B 提示:对于A,若 $\boldsymbol{b}=(-1,1,0)$ ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$ ,不满足条件;

对于B,若 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$ ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$ ,不满足条件;

对于C,若 $\boldsymbol{b}=(0,-1,1)$ ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$ ,不满足条件;

$\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$ ,不满足条件;

对于D,若 $\boldsymbol{b}=(1,0,1)$ ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$ ,不满足条件.故选B.

2.B 提示:点 $M(1,1,0),N(2,-1,-2),P(-1,1,2)$ ,则 $\overrightarrow{MP}=(-2,0,2),\overrightarrow{MN}=(1,-2,-2)$ ,故 $\frac{\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{-6}{3}=-2,|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ,

故点 $P$ 到直线 $MN$ 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{MP}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}\right)^2}=2$ .

故选B.

3.D 提示:平面 $\alpha$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,-2,1)$ ,点 $A(-1,3,0),P(-2,1,4)$ ,

则 $\overrightarrow{AP}=(-1,-2,4)$ ,又点 $A(-1,3,0)$ 在平面 $\alpha$ 内,则点 $P(-2,1,4)$ 到 $\alpha$ 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{10}{3}$ .故选D.

4.D 提示:以 $D$ 为坐标原点, $DA$ 所在直线为 $x$ 轴, $DC$ 所在直线为 $y$ 轴, $DD_1$ 所在直线为 $z$ 轴,建立空间直角坐标系 $D_{xyz}$ .

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2,因为 $M,N$ 分别为棱 $BC$ 和棱 $CC_1$ 的中点,所以 $M(1,2,0),N(0,2,1),A(2,0,0),C(0,2,0),\overrightarrow{MN}=(-1,0,1),\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$ .

设异面直线 $AC$ 和 $MN$ 所成的角为 $\theta$ ,

则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ ,

所以 $\theta=60^\circ$ ,即异面直线 $AC$ 和 $MN$ 所成的角为 $60^\circ$ .故选D.

5.B 提示:取 $AB$ 中点 $O$ ,连接 $OE$ ,则 $OE\perp AB$ ,以 $O$ 为原点, $OE,OB$ 所在直线为 $x$ 轴, $y$ 轴,在平面 $ABCD$ 内,过 $O$ 垂直于 $AB$ 的直线为 $z$ 轴,建立空间直角坐标系,则 $A(0,-1,0),E(1,0,0),D(0,-1,2),C(0,1,2),\overrightarrow{AD}=(0,0,2),\overrightarrow{AE}=(1,1,0),\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$ .设平面 $ACE$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ ,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+y=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2y+2z=0, \end{cases}$ 令 $y=1$ ,则 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$ .

故点 $D$ 到平面 $ACE$ 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .故选B.

6.A 提示:因为 $BC\perp$ 平面 $PAB,AD\parallel BC$ ,所以 $AD\perp$ 平面 $PAB$ ,所以 $AB\perp AD,PA\perp AD$ ,又 $PA\perp AB$ ,且 $AD\cap AB=A$ ,所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$ .以点 $A$ 为坐标原点,分别以 $AD,AB,AP$ 所在直线为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系.

则 $A(0,0,0),C(2,1,0),P(0,0,2),B(0,1,0),M\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ ,

$\overrightarrow{AC}=(2,1,0),\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ ,设平面 $AMC$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ ,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x+y=0, \\ \frac{1}{2}y+z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$ ,则 $y=-2,z=1$ ,

可得平面 $AMC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-2,1)$ ,又平面 $ABC$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$ ,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AP}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AP}|}=\frac{2}{\sqrt{1+4+1}\times2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ .

所以二面角 $B-AC-M$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ .故选A.

7.D 提示:因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD,ABC\subset$ 平面 $ABCD$ ,所以 $AA_1\perp AB$ ,

由题意知,以点 $A$ 为原点, $AB$ 所在直线为 $y$ 轴, $AA_1$ 所在直线为 $z$ 轴,平面 $ABCD$ 内垂直于 $AB$ 的直线为 $x$ 轴,建立空间直角坐标系,

则 $C(0,3,0),D(0,1,0),B_1(0,4,3)$ ,又因为 $E$ 为 $\widehat{A_1B_1}$ 的中点,则 $E(2,2,3)$ ,

则 $\overrightarrow{B_1E}=(2,-2,0),\overrightarrow{B_1D}=(0,-3,-3),\overrightarrow{CE}=(2,-1,3)$ ,设平面 $DEB_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ ,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{B_1E}\cdot\boldsymbol{n}=2x-2y=0, \\ \overrightarrow{B_1D}\cdot\boldsymbol{n}=-3y-3z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$ ,则 $y=1,z=-1$ ,则 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$ ,设直线 $CE$ 与平面 $DEB_1$ 所成角为 $\theta$ ,则 $\sin\theta=$

$|\cos\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CE}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{14}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{42}}{21}$ .故选D.

8.A 提示:在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $O$ 是 $AC$ 中点,点 $P$ 在线段 $B_1D_1$ 上(含端点),

直线 $OP$ 与平面 $B_1AD_1$ 所成的角为 $\theta$ ,以 $D$ 为坐标原点, $DA,DC,DD_1$ 所在直线为 $x$ 轴, $y$ 轴, $z$ 轴,建立空间直角坐标系,

设 $AB=2$ ,则 $O(1,1,0),A(2,0,0),B_1(2,2,2),D_1(0,0,2)$ ,

设 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B_1},0\leq\lambda\leq1$ ,则 $P(2\lambda,2\lambda,2)$ ,

$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2),\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2),\overrightarrow{OP}=(2\lambda-1,2\lambda-1,2)$ ,设平面 $AB_1D_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ ,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2y+2z=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-2x+2z=0, \end{cases}$ 取 $x=1$ ,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$ ,所以

$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OP}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{OP}|}=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2(2\lambda-1)^2+4}}$ .

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, $(\sin\theta)_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

当 $\lambda=0$ 或<