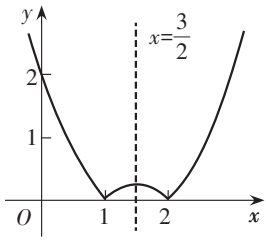


高一必修(第一册)答案页第2期

提示:令 $\sqrt{x+1}=\frac{4}{3}$,解得 $x=\frac{1}{9}$,故 $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1^2+3}{\frac{1}{9}-1}=-\frac{7}{2}$.

13. $(-\infty,1)$ 和 $\left(\frac{3}{2},2\right)$

提示:作 $y=x^2-3x+2$ 的图象并将 x 轴下方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴上方,得到 $f(x)=x^2-3x+2$ 的图象如图所示.由图可知, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1)$ 和 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.



(第13题图)

14.4;3(答案不唯一)
提示:当 $x\in[-1,1]$ 时, $x^2\in[0,1]$,则 $1-x^2\in[0,1]$, $\sqrt{1-x^2}\in[0,1]$,所以 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 $f(0)=1$.
当 $a=0$ 时,在 $x\in(1,3]$ 上, $f(x)=2|x-1|-2=2x-2$ 单调递增,所以 $f(x)$ 在 $(1,3]$ 上的最大值为 $f(3)=4$.
综上,当 $a=0$ 时, $f(x)$ 的最大值为4.
易知函数 $y=2|x-a|-2$ 图象的对称轴为直线 $x=a$,且 y 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.
当 $a\leq 1$ 时, $f(x)=2|x-a|-2$ 在 $(1,3]$ 上单调递增,则 $f(x)$ 存在最大值为 $\max\{f(0),f(3)\}$,不合题意;
当 $1<a<3$ 时, $f(x)=2|x-a|-2$ 在 $(1,3]$ 上先单调递减,再单调递增,

若 $f(x)$ 无最大值,则需 $\begin{cases} 2|1-a|-2>f(3)=2|3-a|-2, \\ 2|1-a|-2>f(0)=1, \\ 1<a<3, \end{cases}$

解得 $\frac{5}{2}<a<3$;

当 $a\geq 3$ 时, $f(x)=2|x-a|-2$ 在 $(1,3]$ 上单调递减,

若 $f(x)$ 无最大值,需 $\begin{cases} 2|1-a|-2>f(0)=1, \\ a\geq 3, \end{cases}$

解得 $a\geq 3$.

综上,当 $f(x)$ 无最大值时, $a>\frac{5}{2}$.

故实数 a 的一个取值为3(答案不唯一).

四、解答题

15.解:(1)要使函数 y 有意义,则 $\begin{cases} x-1\neq 0, \\ \frac{2}{x+1}\geq 0, \\ x+1\neq 0, \end{cases}$

解得 $x>-1$,且 $x\neq 1$.

所以函数 y 的定义域为 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2)要使函数 y 有意义,则 $\begin{cases} 2-x-x^2\geq 0, \\ x+1\geq 0, \\ \sqrt{x+1}-1\neq 0, \end{cases}$

解得 $-1\leq x\leq 1$,且 $x\neq 0$.

所以函数 y 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

16.解:(1)函数 $f(x)$ 是偶函数.证明如下:

函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $-x\in\mathbf{R}$,且 $f(-x)=-x+2+|-x-2|=-x-2+|x+2|=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 是偶函数.

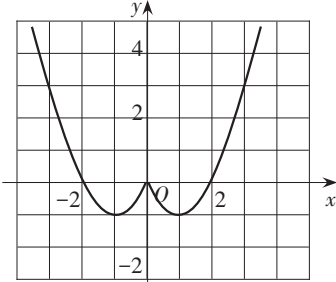
(2)由(1)知函数 $f(x)$ 是偶函数,

因为 $f(x^2-4x+1)=f(x-5)$,所以 $|x^2-4x+1|=|x-5|$,即 $x^2-4x+1=x-5$,或 $x^2-4x+1=5-x$,

解得 $x_1=2$ 或 $x_2=3$, $x_3=-1$ 或 $x_4=4$,

即该方程的解为 $x=-1,2,3,4$.

17.解:(1)因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数,所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.补充完整图象如图所示.



(第17题图)

因为当 $x\leq 0$ 时, $f(x)=x^2+2x$,所以当 $x>0$ 时, $-x<0$,

数学
北师大

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第5期

第3~4版同步周测参考答案
一、单项选择题

1.D

提示:由题意,令 $x^2=4$,则 $x=\pm 2$.故

集合 A 是 $\{2\}$,或 $\{-2\}$,或 $\{2,-2\}$.故选D.

2.D

提示:由已知,得 $f(a)=a^2(a>0)$.对于A,B,C,函数 y 的定义域均为 \mathbf{R} ,与 $f(a)$ 的定义域不同,所以不是同一个函数,故A,B,C错误;对于D,函数 $y=\frac{(\sqrt{x})^6}{x}=\frac{x^3}{x}=x^2(x>0)$ 与 $f(a)=a^2(a>0)$ 的定义域相同,对应关系也相同,所以是同一个函数,故D正确.故选D.

3.A

提示:根据题中表格,因为 $1\in(0,2]$,所以 $f(1)=-2$,即 $m=-2$; $f(x)$ 的值域 $M=\{1,0,-2\}$.故选A.

4.C

提示:由 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-4,\frac{1}{4}\right)$,令 $-4< x^2<\frac{1}{4}$,解

得 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$,所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.故选C.

5.D

提示:对于A,设 $g(x)=f(x+2)+2=\frac{x+2}{x+4}+2=\frac{3x+10}{x+4}$,可知 $g(-x)\neq -g(x)$, $g(x)$ 不是奇函数;对于B,设 $g(x)=f(x+2)-2=\frac{x+2}{x+4}-2=\frac{-x-6}{x+4}$,可知 $g(-x)\neq -g(x)$, $g(x)$ 不是奇函数;对于C,设 $g(x)=f(x-2)+1=\frac{x-2}{x}+1=\frac{2x-2}{x}$,可知 $g(-x)\neq -g(x)$, $g(x)$ 不是奇函数;对于D,设 $g(x)=f(x-2)-1=\frac{x-2}{x}-1=-\frac{2}{x}$,则 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,关于原点对称,且 $g(-x)=-g(x)$,所以 $g(x)$ 为奇函数.故选D.

6.C

提示:根据题意,小明的体温先上升后下降,再上升,再下降.观察四个选项,只有C符合.故选C.

7.C

提示:因为 $f(x)$ 是定义在 $[a-1,2a]$ 上的偶函数,所以 $(a-1)+2a=0$,解得 $a=-\frac{1}{3}$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$,不等式 $f(x-1)>f(2x-3a)$ 化为 $f(|x-1|)>f(|2x-1|)$.

又 $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$ 时, $f(x)$ 单调递减,所以 $\begin{cases} |x-1|<|2x-1|, \\ -\frac{2}{3}\leq x-1\leq -\frac{2}{3}, \\ -\frac{2}{3}\leq 2x-1\leq \frac{2}{3}, \end{cases}$

解得 $\frac{2}{3}<x\leq\frac{5}{6}$.故选C.

8.B

提示:因为函数 $f(x)$ 满足对任意实数 $x_1\neq x_2$,都有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$ 成立,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $\begin{cases} |a^2-3|\leq 1, \\ -\frac{2}{3}+3\leq|4-a^2|, \end{cases}$ 解得 $-\sqrt{3}\leq a\leq\sqrt{3}$.故选B.

二、多项选择题

9.ABD

提示:对于A,集合 M 中的任意一个元素,在集合 N 中都有唯一的元素和它相对应,所以能构成从集合 M 到集合 N 的函数,故A正确;同理,知B,D正确;对于C,集合 $M=\{1,2,3\}$,当 $x=3$ 时, $f(3)=2\times 3+1=7\notin N=\{1,2,3\}$,所以不能构成从集合 M 到集合 N 的函数,故C错误.故选ABD.

10.BC

提示:因为幂函数 $f(x)=\left(a-\frac{3}{a}-1\right)x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调

递减,所以 $\begin{cases} a-\frac{3}{a}-1=1, \\ a<0, \end{cases}$ 解得 $a=-1$.

由 $y=x^2+(a+b)x-3=x^2+(b-1)x-3$ 在 $(-1,1)$ 内不单调,得 $-1<\frac{b-1}{2}<1$,解得 $-1<b<3$.

观察各选项,可知选BC.

11.AC

提示:对于A,由 $f(x+1)=-f(x)$,得 $f(x+2)=f((x+1)+1)=-f(x+1)=f(x)$,故A正确;对于B,令 $f(x)=1$,则 $f(x+2)=f(x)=f(x+1)=1$, $f(x+1)\neq -f(x)$,故B错误;对于C,由 $f(x+2)=f(-x)$,且 $f(x)$ 为奇函数,即 $f(-x)=-f(x)$,得 $f(x+2)=-f(x)$,所以 $f(x+4)=f((x+2)+2)=-f(x+2)=f(x)$,故C正确;对于D,令 $f(x)=1$,满足要求,但 $f(x)$ 不是奇函数,故D错误.故选AC.

三、填空题

12. $-\frac{7}{2}$

(2)证明: $f(x)-(2^{n+1}+2^{-n})=2\cdot 4^n+4^{-n}-(2^{n+1}+2^{-n})$

$=2(4^n-2^n)+(4^{-n}-2^{-n})=2^{n+1}(2^n-1)+\frac{1-2^n}{4^n}$

$=(2^n-1)\cdot\frac{2^{n+1}\cdot 4^n-1}{4^n}=(2^n-1)\cdot\frac{2^{3n+1}-1}{4^n}$.

因为 $x>0$,所以 $2^x>1$, $2^{3x+1}>1$, $4^x>1$.

所以 $f(x)-(2^{n+1}+2^{-n})>0$,即 $f(x)>2^{n+1}+2^{-n}$.

17.解:(1)因为 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数,

所以 $f(-x)=-f(x)$,

即 $\frac{a-2^{-x}}{1+2^{-x}}=-\frac{a-2^x}{1+2^x}\Rightarrow\frac{a\cdot 2^x-1}{1+2^x}=\frac{2^x-a}{1+2^x}\Rightarrow a\cdot 2^x-1=2^x-$

$a\Rightarrow a(2^x+1)=2^x+1$,所以 $a=1$.

(2) $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的减函数,证明如下:

由(1)知 $f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$, $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1-2^{x_1}}{1+2^{x_1}}-\frac{1-2^{x_2}}{1+2^{x_2}}=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}$.

由 $x_1<x_2$,得 $0<2^{x_1}<2^{x_2}$,

所以 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$, $1+2^{x_1}>0$, $1+2^{x_2}>0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的减函数.

(3)由(2)知, $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减,

所以 $f(2)\leq f(x)\leq f(0)$,即 $-\frac{3}{5}\leq f(x)\leq 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的值域为 $\left[-\frac{3}{5},0\right]$.

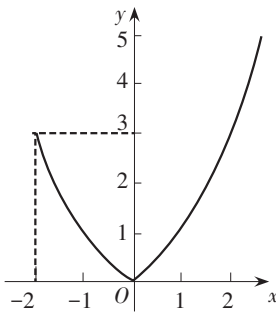
18.解:(1)当 $x<0$ 时, $-x>0$,则 $f(-x)=2^{-x}-1$,

又 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(x)=f(-x)=2^{-x}-1$.

故 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}-1, & x<0, \\ 2^x-1, & x\geq 0. \end{cases}$

(2)由(1)知 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}-1, & x<0, \\ 2^x-1, & x\geq 0, \end{cases}$

其在区间 $[-2,+\infty)$ 上的图象如图所示.



(第18题图)

当 $-2<a<0$ 时, $f(x)$ 在 $[-2,a]$ 上单调递减, $f(x)_{\max}=f(-2)=3$, $f(x)_{\min}=f(a)=2^{-a}-1$;

当 $0\leq a\leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减,在 $[0,a]$ 上单调递增, $f(x)_{\max}=f(-2)=3$, $f(x)_{\min}=f(0)=0$;

当 $a>2$ 时, $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减,在 $[0,a]$ 上单调递增, $f(x)_{\max}=f(a)=2^a-1$, $f(x)_{\min}=f(0)=0$.

综上,当 $-2<a<0$ 时, $f(x)$ 的最大值为3,最小值为 $2^{-a}-1$;

当 $0\leq a\leq 2$ 时, $f(x)$ 的最大值为3,最小值为0;

当 $a>2$ 时, $f(x)$ 的最大值为 2^a-1 ,最小值为0.

19.解:(1)因为 $y=2^{x+1}$ 与 $y=-2^{1-x}$ 在 \mathbf{R} 上均为增函数,所以 $f(x)=2^{x+1}-2^{1-x}$ 在 \mathbf{R} 上为增函数.

又 $f(1)=3$,所以原不等式等价于 $f(f(x)-2)>f(1)$,

所以 $f(x)-2>1$,即 $f(x)>3=f(1)$.

所以 $x>1$.所以原不等式的解集是 $(1,+\infty)$.

(2)关于 x 的不等式 $f(x)>\frac{k}{2^{x-1}}+2$ 恒成立,

即 $2^{x+1}-2^{1-x}>\frac{k}{2^{x-1}}+2$ 恒成立,即 $k<2^{2x}-2^{x-1}$ 恒成立,

所以 $k<(2^{2x}-2^{x-1})_{\min}$.

因为 $y=2^{2x}-2^{x-1}=\left(2^x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$,

所以当 $2^x=\frac{1}{2}$,

即 $x=-1$ 时, y 取得最小值 $-\frac{5}{4}$.

所以 $k<-\frac{5}{4}$,即实数 k 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)$.

11.BC

提示: $f(x)=|a^x-1|$ 的图象是由 $y=a^x$ 的图象向下平移1个单位长度,再将 x 轴下方的图象翻折到 x 轴上方得到的,分 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况分别画出 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示.

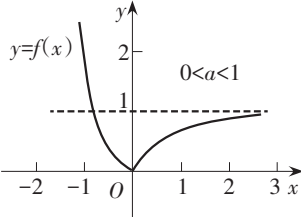


图1

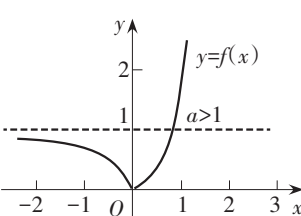


图2

(第11题图)

由图可得, $f(x)$ 恒过定点 $(0,0)$,值域为 $[0,+\infty)$,

且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,故A错误,B,C正确;若

直线 $y=2a$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有两个公共点,则 $0<a<1$,且 $0<2a<1$,解得 $0<a<\frac{1}{2}$,故D错误.故选BC.

三、填空题

12. $[-1,+\infty)$

提示:因为函数 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+m}-3$ 的图象不经过第一象限,所以 $g(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^m-3\leq 0$,即 $3^{-m}\leq 3$,解得 $m\geq -1$.

所以 m 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示:根据题意,得 $\begin{cases} 2m+1=0, \\ f(2)=a^{2m+1}+(n-3)a=1, \\ f(1)=a^{m+1}+(n-3)a=\sqrt{2}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m=-\frac{1}{2}, \\ n=3, \\ a=2. \end{cases}$ 所以 $f(x)=2^{\frac{1}{2}x+1}$.

故 $[f(m+n)]^2=\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right]^2=\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2=2^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14.(1,2)

提示:若 $f(x)>0$,则 $\frac{1}{a^{x+1}}-\frac{1}{2}>0$,得 $0<a^x<1$,

所以当 $0<a<1$ 时, $x>0$;当 $a>1$ 时, $x<0$.

又不等式 $f(ax^2+bx+c)>0$ 的解集为 $(1,2)$,

所以 $a>1$, $ax^2+bx+c<0$,且1和2是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

所以 $-\frac{b}{a}=1+2=3$,得 $a=-\frac{1}{3}b$.

因为 $b\in(-6,1)$,所以 $a\in\left(-\frac{1}{3},2\right)$.

又 $a>1$,所以 $a\in(1,2)$.

四、解答题

15.解:(1)设指数函数 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq 1)$.

由 $f(x)$ 的图象经过点 $P(3,27)$,得 $a^3=27$.

所以 $a=3$, $f(x)=3^x$.

因为函数 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,

所以 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

(2)由 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$,知 $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数.

所以由 $g(2x^2-3x+5)<g(x^2+4x-7)$,

得 $2x^2-3x+5>x^2+4x-7$,

即 $x^2-7x+12>0$,解得 $x<3$,或 $x>4$.

故 x 的取值范围为 $(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$.

16.(1)解:因为 $4^x>0$, $4^x>0$,

所以 $f(x)=2\cdot 4^x+4^{-x}\geq 2\sqrt{2\cdot 4^x\cdot 4^{-x}}=2\sqrt{2}$,

当且仅当 $2\cdot 4^x=4^{-x}$,即 $x=-\frac{1}{4}$ 时,等号成立.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

一、单项选择题

1.B

提示:函数 $y=x+2$ 的定义域和值域均为 \mathbf{R} ,对于A,函数的定义域为 $\{x|x\geq-2\}$,故不是同一函数,A错误;对于B,函数 $y=\sqrt[3]{x^3}+2=x+2$,与 $y=x+2$ 定义域相同,解析式相同,是同一函数,B正确;对于C,函数的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,故不是同一函数,C错误;对于D,函数的定义域为 \mathbf{R} ,但 $y=\sqrt{x^2+2}\neq x+2$,解析式不同,故不是同一函数,D错误.故选B.

2.B

提示:(1)中图象的定义域为 $[0,2]$ 的子集,不符合题意;(2)中图象的值域为 $[0,2]$ 的子集,不符合题意;(3)中图象出现一对多的对应,不是函数,不符合题意;(4)中图象符合题意.故选B.

3.B

提示:要使 $f(x)$ 有意义,则 $\begin{cases} 4-x^2\geq 0, \\ 2-x\neq 0, \end{cases}$ 解得 $-2\leq x<2$.所以 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2)$.故选B.

4.A

提示:当 $x>0$ 时, $y=f(x)\cdot g(x)=-(2x+3)<-3$;当 $x=0$ 时, $y=f(x)\cdot g(x)=0$;当 $x<0$ 时, $y=f(x)\cdot g(x)=2x+3<3$.综上,函数 y 的值域为 $(-\infty,3)$.故选A.

5.B

提示:由 $f(x+1)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$,得 $f(x)=x^2+2$.故选B.

6.B

提示:因为幂函数 $f(x)=x^{3m-5}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $3m-5<0$,得 $m<\frac{5}{3}$.又 $m\in\mathbf{N}$,所以 $m=0$ 或1.当 $m=0$ 时, $f(x)=x^{-5}$,不满足 $f(-x)=f(x)$,应舍去;当 $m=1$ 时, $f(x)=x^{-2}$,满足 $f(-x)=f(x)$,故 $m=1$.故选B.

7.A

提示:由题图3知,所求函数为偶函数,排除B,D;当 $x\leq 0$ 时, $y=f(-x)=f(x)$, $y=f(|x|)=f(-x)$,排除C,故选A.

8.A

提示:由 $F(-2)=af(-2)+bg(-2)+2=5$,得 $af(-2)+bg(-2)=3$.因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数,所以 $af(-2)+bg(-2)=-af(2)-bg(2)=3$,得 $af(2)+bg(2)=-3$.所以 $F(2)=af(2)+bg(2)+2=-3+2=-1$.故选A.

二、多项选择题

9.ACD

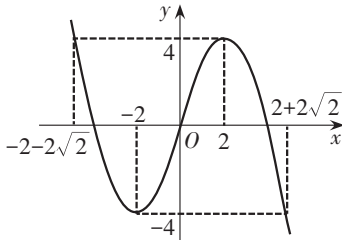
提示:对于 $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $y\in(0,+\infty)$,故A正确;对于 $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $y\in[0,+\infty)$,故B错误;对于 $y=\frac{3}{x}$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $y\in(0,+\infty)$,故C正确;对于 $y=x^3$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $y\in(0,+\infty)$,故D正确.故选ACD.

10.AC

提示:由 $f(x)f(y)=f(xy)+|x|+|y|$,令 $x=y=0$,得 $[f(0)]^2=f(0)$,解得 $f(0)=0$,或 $f(0)=1$;令 $y=0$,得 $f(x)f(0)=f(0)+|x|$,变形可得 $f(0)[f(x)-1]=|x|$.若 $f(0)=0$,上式不恒成立.则必有 $f(0)=1$,所以 $f(x)-1=|x|$,得 $f(x)=|x|+1$,所以 $f(1)=2$,故A正确,B错误; $f(-x)=|-x|+1=|x|+1=f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数,故C正确,D错误.故选AC.

11.BCD

提示:当 $x<0$ 时, $f(x)=-x(-x-4)=x^2+4x=(x+2)^2-4\geq-4$;当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=-x(x-4)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4\leq 4$.作出 $f(x)$ 的图象,如图所示.



(第11题图)

当 $x<0$ 时,由 $f(x)=x^2+4x=4$,解得 $x=-2-2\sqrt{2}$ (舍正);当 $x\geq 0$ 时,由 $f(x)=-x^2+4x=-4$,解得 $x=2+2\sqrt{2}$ (舍负).根据 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为4,最小值为 $b-10$,对 b 作如下讨论:
若 $b\leq 2$,则 $a=-2-2\sqrt{2}$,但 $b-10\leq -8<-4$,不合题意;
若 $2<b\leq 2+2\sqrt{2}$,则 $-2-2\sqrt{2}\leq a\leq 2$,但 $b-10\leq 2\sqrt{2}-8<-4$,不合题意;
若 $b>2+2\sqrt{2}$,则 $-2-2\sqrt{2}\leq a\leq 2,2\sqrt{2}-8<b-10<-4$,令 $-b^2+4b=b-10$,解得 $b=-2$ (舍去),或 $b=5$.

综上, $b=5,-2-2\sqrt{2}\leq a\leq 2$,得 $3\leq b-a\leq 7+2\sqrt{2}$.结合选项,可知选BCD.

三、填空题

12.[0,2]

提示: $y=(-x^2+4x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-x^2+4x}$.由 $-x^2+4x\geq 0$,得 $0\leq x\leq 4$,所以函数 y 的定义域为 $[0,4]$.

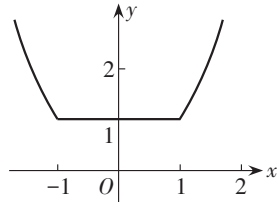
令 $t=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$,则函数 t 在 $[0,2]$ 上单调递增,在 $(2,4]$ 上单调递减.

又 $y=\sqrt{t}$ 在定义域上单调递增,所以函数 y 的单调递增区间是 $[0,2]$.

13.1, $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

提示:由已知,得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,所以 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=1$.

作出函数 $y=f(x)$ 的图象,如图所示.



(第13题图)

可知当 $x<0$ 时, $2x<0$ 且 $2x<x$,由 $f(x)\leq f(2x)$,可得 $2x<-1$,解得 $x<-\frac{1}{2}$;

当 $x>0$ 时, $2x>0$ 且 $2x>x$,由 $f(x)\leq f(2x)$,可得 $2x>1$,解得 $x>\frac{1}{2}$.

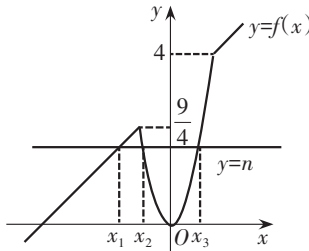
所以原不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

14. $\frac{9}{16}$

提示:令 $4x^2\leq x+3$,即 $4x^2-x-3\leq 0$,解得 $-\frac{3}{4}\leq x\leq 1$,所以

$$\text{以}f(x)=\min\left\{4x^2,x+3\right\}=\begin{cases} x+3, & x\leq-\frac{3}{4}\text{或}x>1, \\ 4x^2, & -\frac{3}{4}\leq x\leq 1. \end{cases}$$

又因为动直线 $y=n$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点,且三个交点的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3 ,不妨设 $x_1<x_2<x_3$,在同一平面直角坐标系中作出直线 $y=n$ 与函数 $y=f(x)$ 的大致图象,如图所示.



(第14题图)

可知 $0<n<\frac{9}{4}$, x_1 是方程 $x+3=n$ 的根, x_2,x_3 是方程 $4x^2-n=0$ 的两根,

所以 $x_1=n-3,x_2x_3=-\frac{n}{4}$.

所以 $x_1x_2x_3=-\frac{n}{4}(n-3)=-\frac{n^2}{4}+\frac{3n}{4}=-\frac{1}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{16}$,其中

$0<n<\frac{9}{4}$.

由二次函数的性质可知,当 $n=\frac{3}{2}$ 时, $x_1x_2x_3$ 取得最大值,且最大值为 $\frac{9}{16}$.

四、解答题

15.(1)解:因为 $f(x)=x^a$ 的图象经过点 $A\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$,所以

以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^a=\sqrt{2}$,即 $2^{-a}=2^{\frac{1}{2}}$,解得 $a=-\frac{1}{2}$.

(2)证明:由(1)可得 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{\sqrt{x_1}}$

$$\frac{1}{\sqrt{x_2}}-\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}\cdot(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}.$$

由 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,得 $\sqrt{x_1x_2}>0,\sqrt{x_2}>0,\sqrt{x_2}>0$,即 $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$;

由 $x_1<x_2$,得 $x_2-x_1>0$.所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$.所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

16.解:(1)由已知,得 $h(x)=\frac{x^2-3x}{\sqrt{2x+1}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}}{x-3}=x$,其中

$\begin{cases} x-3\neq 0, \\ 2x+1>0, \end{cases}$ 即 $x>-\frac{1}{2}$,且 $x\neq 3$,所以 $y=h(x)$ 与 $y=H(x)$ 的定义域不相同,二者不是同一函数.

(2)由(1)知 $h(x)=x$,其中 $x>-\frac{1}{2}$,且 $x\neq 3$,所以 $G(x)=$

$h(x)-\sqrt{2h(x)+1}=x-\sqrt{2x+1}$,其中 $x>-\frac{1}{2}$,且 $x\neq 3$.

令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $t>0$ 且 $t\neq\sqrt{7}$,

所以 $y=G(x)=\frac{t^2-1}{2}-t=\frac{1}{2}(t-1)^2-1\geq-1$,且 $y\neq 3-\sqrt{7}$.

所以 $G(x)$ 的值域为 $[-1,3-\sqrt{7})\cup(3-\sqrt{7},+\infty)$.

17.解:(1)因为 $a=-2$,所以当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=x^2+(a+1)x=x^2-x$.

当 $x<0$ 时, $-x>0$,得 $f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$,又 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数,所以 $f(x)=-f(-x)=-x^2-x$.

因此,当 $a=-2$ 时, $f(x)=\begin{cases} -x^2-x, & x<0, \\ x^2-x, & x\geq 0. \end{cases}$

(2)①当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=x^2+(a+1)x$,图象的开口向上,对称轴为直线 $x=-\frac{a+1}{2}$,

要使 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,则 $-\frac{a+1}{2}\leq 0$,解得 $a\geq-1$.所以实数 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

②根据 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数,由 $f(2t+x^2)+f(t^2-5x+5)<0$,得 $f(2t+x^2)<-f(t^2-5x+5)=f(-t^2+5x-5)$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数,所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,所以 $2t+x^2<-t^2+5x-5$,即 $\exists t\in\mathbf{R}$,使 $t^2+2t+x^2-5x+5<0$ 成立,所以 $\Delta=4-4(x^2-5x+5)>0$,即 $x^2-5x+4<0$,解得 $1<x<4$.所以实数 x 的取值范围为 $(1,4)$.

18.解:(1) $f(x)=\frac{x}{x^2+a}=\frac{1}{x+\frac{a}{x}}$.

因为 $x>0$, $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减,所以 $y=x+\frac{a}{x}$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

又 $a>0$,所以由函数性质,可知 $\sqrt{a}\leq 2$,解得 $0<a\leq 4$.所以实数 a 的取值范围为 $(0,4]$.

(2)当 $a=1$ 时, $f(x)=\frac{x}{x^2+1},f(x^2)=\frac{x^2}{x^4+1}$,

所以 $g(x)=\frac{1}{f(x^2)}+\frac{m}{f(x)}=x^2+\frac{1}{x^2}+m\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+$

$m\left(x+\frac{1}{x}\right)-2$.

令 $t=x+\frac{1}{x}$,则 $t\geq 2$ (当且仅当 $x=1$ 时,等号成立),

$h(t)=t^2+mt-2$.

由题意,得 $h(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上的最小值为-3,

当 $-\frac{m}{2}>2$,即 $m<-4$ 时, $h(t)$ 在 $\left[2,-\frac{m}{2}\right)$ 上单调递减,在

$\left(-\frac{m}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,

则 $h(t)_{\min}=h\left(-\frac{m}{2}\right)=\frac{m^2}{4}-\frac{m^2}{2}-2=-3$,解得 $m=\pm 2$,不足 $m<-4$;

当 $-\frac{m}{2}\leq 2$,即 $m\geq-4$ 时, $h(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,则

$h(t)_{\min}=h(2)=2+2m=-3$,解得 $m=-\frac{5}{2}$.

综上,实数 m 的值为 $-\frac{5}{2}$.

19.解:(1)设 $g(x)=y=x^3-3x^2+4x+1$,且 $g(x)$ 图象的对称中心为 (t,s) ,则 $g(x+t)-s$ 必为奇函数.

又 $g(x+t)-s=(x+t)^3-3(x+t)^2+4(x+t)+1-s=x^3+(3t-3)\cdot x^2+(3t^2-6t+4)x+t^3-3t^2+4t+1-s$,

所以 $\begin{cases} 3t-3=0, \\ t^3-3t^2+4t+1-s=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t=1, \\ s=3. \end{cases}$ 所以三次函数

$y=x^3-3x^2+4x+1$ 图象的对称中心为 $(1,3)$.

(2)设函数 $f(x)=x^4+4x^3+cx^2+4x+1$ 的图象关于直线 $x=t$ 对称,则 $f(x+t)$ 必为偶函数.

又 $f(x+t)=(x+t)^4+4(x+t)^3+c(x+t)^2+4(x+t)+1=x^4+(4t+4)x^3+(6t^2+12t+c)x^2+(4t^3+12t^2+2ct+4)x+t^4+4t^3+ct^2+4t+1$,

所以 $\begin{cases} 4t+4=0, \\ 4t^3+12t^2+2ct+4=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t=-1, \\ c=6. \end{cases}$

所以 c 的值为6.

(3)由已知式,得 $(x+2y+3z)^3-3(x+2y+3z)^2+4(x+2y+3z)+1+(3x+2y+z)^3-3(3x+2y+z)^2+4(3x+2y+z)+1=6$,

结合(1),知 $g(x)=x^3-3x^2+4x+1$ 图象的对称中心为 $(1,3)$,且上式即 $g(x+2y+3z)+g(3x+2y+z)=6$.

所以 $(x+2y+3z)+(3x+2y+z)=2$,得 $x+y+z=\frac{1}{2}$.

数学
北师大

第7期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

2.C

提示:原式= $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=5$.故选A.

3.C

提示:因为 $m-2n=1$,所以 $\frac{4^n}{\sqrt[3]{8^m}}=\frac{2^{2n}}{2^{\frac{3m}{3}}}=2^{2n-m}=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

故选C.

3.C

提示:原式= $\frac{3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}}\times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}+\left(\frac{1}{10}\right)^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}+2-\sqrt{3}$

$=3^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}+2-\sqrt{3}=\sqrt{3}+10+2-\sqrt{3}=12$.

故选C.

4.A

提示:由已知,得 $\begin{cases} a-1=1, \\ f(-1)=(a-1)b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=2. \end{cases}$

所以 $\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{a}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选A.

5.A

提示:令 $u=x-1$,可知该函数的单调递减区间为 $(-\infty,1]$,单调递增区间为 $[1,+\infty)$,又函数 $y=3^u$ 为增函数,所以函数 $f(x)=3^{x-1}$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1]$.故选A.

6.A

提示:因为 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数,所以 $f(0)=0$.

当 $x>0$ 时, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\in(0,1)$.

当 $x<0$ 时, $-x>0$,则 $f(-x)\in(0,1)$,

所以 $f(x)=-f(-x)\in(-1,0)$.

综上, $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$.

故选A.

7.A

提示:令 $x-3=0$,得 $x=3$,此时 $y=1$,故 $A(3,1)$,即 $x_0=3$,

$y_0=1$.

所以 $mx_0+ny_0=1$ 化为 $3m+n=1$.

所以 $\frac{3}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{3}{m}+\frac{1}{n}\right)(3m+n)=10+\frac{3n}{m}+\frac{3m}{n}\geq 10+$

$2\sqrt{\frac{3n}{m}\cdot\frac{3m}{n}}=16$,当且仅当 $\frac{3n}{m}=\frac{3m}{n}$,即 $m=n=\frac{1}{4}$ 时,等号

成立.所以 $\frac{3}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值是16.故选A.

8.D

提示:根据题意可知, $\exists x\in[1,2]$,使得 $a\geq 2^x$,即 $a\geq (2^x+x)_{\min}$,其中 $x\in[1,2]$.因为 $y=2^x$ 与 $y=x$ 均在 $[1,2]$ 上单调递增,所以 $y=2^x+x$ 在 $[1,2]$ 上单调递增.所以当 $x\in[1,2]$ 时, $(2^x+x)_{\min}=2^1+1=3$.所以 $a\geq 3$,即实数 a 的取值范围为 $[3,+\infty)$.故选D.

二、多项选择题

9.AC

提示:因为 $a+\frac{1}{a}=4$,所以 $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=16-2=14$,

故A正确; $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2-1+\frac{1}{a^2}\right)=4\times(14-1)=52$,故B错误; $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2}=\sqrt{a+\frac{1}{a}+2}=\sqrt{6}$,故C正

确;因为 $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2=14-2=12$,所以 $a-\frac{1}{a}=\pm 2\sqrt{3}$,故D错误.故选AC.

10.ACD

提示: $b=4^{0.4}=2^{0.8}$.因为指数函数 $y=2^x$ 是 \mathbf{R} 上的增函数,所以 $0<2^{0.6}<2^{0.8}$,即 $0<a<b$,故A正确;

高一必修(第一册)答案页第2期

因为幂函数 $y=x^{0.8}$ 是定义域上的增函数,所以 $0<2^{0.8}<$

$3^{0.8}$,即 $0<b<c$,故B错误;

因为 $0<a<c,0<b<c$,所以 $ab<c^2$,故C正确;

因为 $3^4=81>32=2^5$,所以 $3^{\frac{4}{5}}>2$,即 $3^{0.8}>2$,所以 $ac=2^{0.6}\times 3^{0.8}>2^{0.6}\times 2^{1.6}=4^{0.8}=b^2$,即 $b^2<ac$,故D正确.

故选ACD.

11.BCD