

第9期

第3~4版同步周测参考答案
一、单项选择题

1.A 提示:因为椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的焦点在 x 轴上,所以 $a^2=3$, $b^2=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$,所以焦点坐标为 $(\pm\sqrt{2},0)$.故选A.

2.C 提示:由椭圆 $M:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$,可得 $a^2=16$,所以 $a=4$.因为 F_1,F_2 分别是椭圆 $M:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点, P 为 M 上一点,所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a=8$.又 $|PF_1|=3$,所以 $|PF_2|=5$.故选C.

3.C 提示:设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由题意可知, $\begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{3}, \\ 2c=2\sqrt{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ c=\sqrt{2}, \end{cases}$ 则 $b^2=9-2=7$,所以该椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$.故选C.

4.C 提示:因为椭圆 $E:x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$ 经过点 $(\frac{1}{2},\sqrt{3})$,

所以 $(\frac{1}{2})^2+\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2}=1$,解得 $a^2=4$,所以 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$,所以 E 的长轴长为 $2\times 2=4$.故选C.

5.D 提示:因为方程 $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{k-1}=1$ 表示的曲线为焦点在 y 轴上的椭圆,

所以 $k-1>4-k>0$,解得 $\frac{5}{2}<k<4$.故选D.

6.B 提示:由椭圆定义得 $|MF_1|+|MF_2|=2a=4$,由基本不等式,得 $|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{2}\right)^2=4$,当且仅当 $|MF_1|=|MF_2|=2$ 时,等号成立,故 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为4.故选B.

7.A 提示:由题意知, $\begin{cases} 2a=20, \\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=10, \\ b=8, \\ b^2+c^2=a^2, \end{cases}$ 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

因为 C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ,又 C 上的点 P 满足 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$,所以由椭圆定义得 $|PF_1|+|PF_2|=20$,所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=400$.①由余弦定理,得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2=4\times 36=144$,②

由①②,得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{256}{3}$,所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 $S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times\frac{256}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{64\sqrt{3}}{3}$.故选A.

8.C 提示:设切点为 M ,连接 PF_1 ,由已知 $|OP|=|OF_2|=|OF_1|$,所以 $PF_1\perp PF_2$.因为 $OM\perp PF_2$,所以 $OM\parallel PF_1$,又 O 是 F_1F_2 的中点,圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}b^2$ 的半径为 $\frac{1}{2}b$,所以 $|PF_1|=2|OM|=b$, $|PF_2|=2a-b$,所以 $b^2+(2a-b)^2=4c^2=4(a^2-b^2)$,即 $2a=3b$,得 $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$,

所以椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.故选C.

二、多项选择题

9.AB 提示:因为 $2c=6$,所以 $c=3$.当焦点在 x 轴上时,由椭圆的标准方程,知 $a^2=25$, $b^2=m^2$,所以 $25-m^2=9$,又 $m>0$,解得 $m=4$;当焦点在 y 轴上时,由椭圆的标准方程,知 $a^2=m^2$, $b^2=25$,所以 $m^2-25=9$,又 $m>0$,解得 $m=\sqrt{34}$.综上, $m=4$ 或 $\sqrt{34}$.故选AB.

第9期

第3~4版同步周测参考答案
一、单项选择题

1.A 提示:因为椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的焦点在 x 轴上,所以 $a^2=3$, $b^2=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$,所以焦点坐标为 $(\pm\sqrt{2},0)$.故选A.

2.C 提示:由椭圆 $M:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$,可得 $a^2=16$,所以 $a=4$.因为 F_1,F_2 分别是椭圆 $M:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点, P 为 M 上一点,所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a=8$.又 $|PF_1|=3$,所以 $|PF_2|=5$.故选C.

3.C 提示:设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由题意可知, $\begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{3}, \\ 2c=2\sqrt{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ c=\sqrt{2}, \end{cases}$ 则 $b^2=9-2=7$,所以该椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$.故选C.

4.C 提示:因为椭圆 $E:x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$ 经过点 $(\frac{1}{2},\sqrt{3})$,

所以 $(\frac{1}{2})^2+\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2}=1$,解得 $a^2=4$,所以 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$,所以 E 的长轴长为 $2\times 2=4$.故选C.

5.D 提示:因为方程 $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{k-1}=1$ 表示的曲线为焦点在 y 轴上的椭圆,

所以 $k-1>4-k>0$,解得 $\frac{5}{2}<k<4$.故选D.

6.B 提示:由椭圆定义得 $|MF_1|+|MF_2|=2a=4$,由基本不等式,得 $|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{2}\right)^2=4$,当且仅当 $|MF_1|=|MF_2|=2$ 时,等号成立,故 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为4.故选B.

7.A 提示:由题意知, $\begin{cases} 2a=20, \\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=10, \\ b=8, \\ b^2+c^2=a^2, \end{cases}$ 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

因为 C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ,又 C 上的点 P 满足 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$,所以由椭圆定义得 $|PF_1|+|PF_2|=20$,所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=400$.①由余弦定理,得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2=4\times 36=144$,②

由①②,得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{256}{3}$,所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 $S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times\frac{256}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{64\sqrt{3}}{3}$.故选A.

8.C 提示:设切点为 M ,连接 PF_1 ,由已知 $|OP|=|OF_2|=|OF_1|$,所以 $PF_1\perp PF_2$.因为 $OM\perp PF_2$,所以 $OM\parallel PF_1$,又 O 是 F_1F_2 的中点,圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}b^2$ 的半径为 $\frac{1}{2}b$,所以 $|PF_1|=2|OM|=b$, $|PF_2|=2a-b$,所以 $b^2+(2a-b)^2=4c^2=4(a^2-b^2)$,即 $2a=3b$,得 $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$,

所以椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.故选C.

二、多项选择题

9.AB 提示:因为 $2c=6$,所以 $c=3$.当焦点在 x 轴上时,由椭圆的标准方程,知 $a^2=25$, $b^2=m^2$,所以 $25-m^2=9$,又 $m>0$,解得 $m=4$;当焦点在 y 轴上时,由椭圆的标准方程,知 $a^2=m^2$, $b^2=25$,所以 $m^2-25=9$,又 $m>0$,解得 $m=\sqrt{34}$.综上, $m=4$ 或 $\sqrt{34}$.故选AB.

简得 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$,所以动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)由(1)知,动点 M 的轨迹为双曲线且 $a=3$, $b=4$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$,所以 F_1 和 F_2 为双曲线两焦点, $|F_1F_2|=2c=10$,设 $|PF_1|=s$, $|PF_2|=t$,则有 $|s-t|=2a=6$,再由余弦定理,得 $(2c)^2=s^2+t^2-2st\cos 60^\circ$,所以 $(2c)^2=s^2+t^2-2st+st$,所以 $(2c)^2=(s-t)^2+st$,解得 $st=64$,

所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}st\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times 64\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$.16.解:(1)由题意可设双曲线方程为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$,将点 $(4,-\sqrt{10})$ 代入双曲线方程,得 $4^2-(-\sqrt{10})^2=\lambda$,即 $\lambda=6$,所以双曲线方程为 $x^2-y^2=6$.

(2)由(1)知 $F_1(-2\sqrt{3},0)$, $F_2(2\sqrt{3},0)$,因为 $M(3,m)$,所以 $\overrightarrow{MF_1}=(-2\sqrt{3}-3,-m)$, $\overrightarrow{MF_2}=(2\sqrt{3}-3,-m)$,又 $M(3,m)$ 在双曲线 $x^2-y^2=6$ 上,所以 $m^2=3$,所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=\left(-2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)+m^2=-12+9+3=0$.

17.(1)解:过点 $F(1,0)$,且斜率为2的直线 l 的方程为 $y=2(x-1)$,

设点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=2x-2, \end{cases}$ 得 $x^2-3x+1=0$,则 $x_1+x_2=3$,所以 $|AB|=x_1+x_2+p=3+2=5$.

(2)证明:设过点 $F(1,0)$ 的直线 $l:x=my+1$,联立 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x=my+1, \end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$,则 $y_1y_2=-4$,所以 $x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=1$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=1-4=-3$.故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 为定值-3.

18.解:(1)由题意知, $c=2\sqrt{2}$, $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,解得 $a=2\sqrt{3}$,又 $b^2=a^2-c^2=4$,所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=x+m$,点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ($x_1<x_2$),且 AB 中点为 $E(x_0,y_0)$,

由 $\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得 $4x^2+6mx+3m^2-12=0$,①则 $x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$,所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3m}{4}$, $y_0=x_0+m=\frac{m}{4}$.因为 AB 是等腰 $\triangle PAB$ 的底边,所以 $PE\perp AB$.

所以 PE 的斜率为 $k=-\frac{2-\frac{m}{4}}{-3+\frac{4}{4}}=-1$,解得 $m=2$,此时方程①为 $4x^2+12x=0$.

解得 $x_1=-3$, $x_2=0$,所以 $y_1=-1$, $y_2=2$,所以 $|AB|=3\sqrt{2}$,此时,点 $P(-3,2)$ 到直线 $AB:x-y+2=0$ 的距离 $d=\frac{|-3-2+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,所以 $\triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{9}{2}$.

19.解:(1)由题意得 $\begin{cases} a+c=3, \\ a-c=1, \end{cases}$ 解得 $a=2$, $c=1$,所以 $b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

(2)由椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,得 $A_2(2,0)$, $F(1,0)$, $A_1(-2,0)$,设 F 到直线 A_2P 的距离为 h ,则 A_1 到直线 A_2P 的距离为 $4h$,因为 $\triangle A_1PQ$ 的面积是 $\triangle A_2PF$ 面积的二倍,所以 $\frac{1}{2}\times|PQ|\times 4h=2\times\frac{1}{2}\times|A_2P|\times h$,

所以 $|A_2P|=2|PQ|$,所以 P 点横坐标为 $\frac{2}{3}$,代入椭圆方程,得 $P\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 或 $P\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.又 $A_2(2,0)$,

当 $P\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 时,可得 A_2P 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$;

当 $P\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 时,可得 A_2P 的方程为 $y=\frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$.

综上,直线 A_2P 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$.

10.AC 提示:当 $6+m=3-m>0$,即 $m=-\frac{3}{2}$ 时,曲线 E :

$\frac{x^2}{6+m}+\frac{y^2}{3-m}=1$ 表示圆,故A正确;

当 $m=6$ 时, $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ 表示双曲线,其渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,故B错误;

若 E 表示双曲线,则 $(6+m)(3-m)<0$,解得 $m<-6$ 或 $m>3$,故C正确;

若 E 表示椭圆,则 $\begin{cases} 6+m>0, \\ 3-m>0, \\ 6+m\neq 3-m, \end{cases}$ 解得 $-6<m<3$ 且 $m\neq-\frac{3}{2}$,故D错误.故选AC.

11.BCD 提示:由椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,得 $a=5$, $b=4$, $c=3$.对于A,假设存在点 P 使得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,则 $PF_1\perp PF_2$,所以点 P 的轨迹是以原点 O 为圆心, F_1F_2 为直径的圆 O ,则 $r=\frac{1}{2}|F_1F_2|=3$,

因为椭圆 C 上的任一点到原点 O 的最小距离是短轴顶点与原点 O 的距离,即 $b=4$,由 $r<b$ 可知,圆 O 与椭圆 C 没有交点,所以假设不成立,即不存在点 P 使得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,故A错误;

对于B, $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=16$,故B正确;

对于C,当 P 为椭圆 C 短轴顶点时,点 P 到 F_1F_2 的距离最大,则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大,此时 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\cdot b=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$,故C正确;

对于D,因为 $F_2(3,0)$, $M(1,1)$,所以 $|MF_2|=\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$,所以 $|PM|+|PF_1|=|PM|+2a-|PF_2|=10+|PM|-|PF_2|\leqslant 10+|MF_2|=10+\sqrt{5}$,故D正确.故选BCD.

三、填空题

12.-6 提示:由双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的离心率为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$,所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{a^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$,解得 $a^2=5$,所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5+4}=3$,所以抛物线 $y^2=2mx$ 的焦点为 $(-3,0)$,所以抛物线开口向左,故 $\frac{m}{2}=-3$,即 $m=-6$.

13. $\frac{3}{2}$ 提示:因为 $|AB|=10$,所以 $|AF_2|=5$,又 $|AF_1|=13$,

所以 $|F_1F_2|=\sqrt{13^2-5^2}=12$,所以 $2a=|AF_1|-|AF_2|=13-5=8$, $2c=12$,所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

14. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$ 提示:因为 $|AF_2|=2|BF_2|$,所以 $|AB|=3|BF_2|$,又 $|AB|=|BF_1|$,所以 $|BF_1|=3|BF_2|$,

又 $|BF_1|+|BF_2|=2a$,所以 $|BF_2|=\frac{a}{2}$, $|AF_2|=a$, $|BF_1|=3a$.

又 $|AF_2|+|AF_1|=2a$,所以 $|AF_1|=a$,所以 $|AF_2|=|AF_1|$,所以 A 在 y 轴上(为椭圆的顶点).

在 $\triangle BF_1F_2$ 中,由余弦定理,得 $\cos\angle BF_2F_1=\frac{16+(\frac{a}{2})^2-(\frac{3a}{2})^2}{2\times 4\times\frac{a}{2}}=\frac{8-a^2}{2a}$,

由 $\cos\angle AF_2O+\cos\angle BF_2F_1=0$,可得 $\frac{2}{a}+\frac{8-a^2}{2a}=0$,解得 $a^2=12$,

所以 $b^2=a^2-c^2=12-4=8$,

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$.

四、解答题

15.解:(1)设 $M(x,y)$,由题意得, $\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\frac{9}{5}\right|}=\frac{5}{3}$,化

第12期
第2~3版章节测试参考答案
一、单项选择题

1.A 提示:由题意得 $2p=4$, $p=2$,故焦点到准线的距离为2.

2.A 提示:因为抛物线 $x^2=-4\sqrt{5}y$ 的焦点为 $(0,-\sqrt{5})$,所以双曲线的一个焦点也是 $(0,-\sqrt{5})$,

所以 $-a+4=5$,解得 $a=-1$,即双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$,其渐近线的方程为 $y=\pm 2x$.故选A.

3.C 提示:由题意可得,圆心 $C(3,0)$,半径 $r=4$.因为 M 是线段 PA 的垂直平分线上的点,所以 $|MA|=|MP|$,则 $||MA|-|MC||=||MP|-|MC||=|CP|=4$.因为 $|AC|=6>|CP|$,所以点 M 的轨迹是以 A,C 为焦点的双曲线.故选C.

4.C 提示:因为直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 过点 $(a,0)$, $(0,b)$,而 $(a,0)$, $(0,b)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点和上顶点,

所以直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交.故选C.

5.A 提示:设点 $M(x,y)$, $P(x_0,y_0)$ ($y>0$, $y_0>0$),则 $P'(x_0,0)$,且 $x_0=x$, $y_0=2y$,

又点 P 在曲线 C 上,所以 $x_0^2+y_0^2=16$,

所以 $x^2+4y^2=16$,即 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ($y>0$).故选A.

6.A 提示:若双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$,则当双曲线 C 的焦点在 x 轴上时,有 $\begin{cases} a^2=m>0, \\ b^2=m+2>0, \end{cases}$ 解得 $m>0$,

当双曲线 C 的焦点在 y 轴上时,有 $\begin{cases} a^2=-(m+2)>0, \\ b^2=-m>0, \end{cases}$ 解得 $m<-2$,所以 $e=\sqrt{1+\frac{-m}{-(m+2)}}=\sqrt{3}$,解得 $m=-4$.

综上所述, m 的取值范围为 $[-4,2]$.显然 $|2|$ 是 $[-4,2]$ 的真子集,所以“ $m=2$ ”是“双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$ ”的充分不必要条件.故选A.

7.C 提示:不妨设 C 的一条渐近线方程为 $l:bx-ay=0$.

由题意知, $|PF_2|=\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$,由 C 的离心率为 $\sqrt{3}$,

得 $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$,即 $c=\sqrt{3}a$,所以 $b=\sqrt{2}a$.

在 $\text{Rt}\triangle PF_2O$ 中, $\cos\angle PF_2F_1=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $|PF_1|^2=b^2+4c^2-4bc\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=6a^2$,

所以 $|PF_1|=\sqrt{6}a$,所以 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{(\sqrt{6}a)^2+4c^2-b^2}{2\cdot\sqrt{6}a\cdot 2c}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.故选C.

8.D 提示:设 $P(x_0,y_0)$,则 $y_0^2=2x_0$,圆 C 的圆心 $C(4,0)$,半径 $r=1$.由 PA,PB 切圆 C 于点 A,B ,得 $PC\perp AB$, $PA\perp AC$,则 $|AB|\cdot|PC|=2S_{PACB}=4S_{\triangle PAC}=2|PA|\cdot|AC|=2\sqrt{|PC|^2-1}=2\sqrt{(x_0-4)^2+y_0^2-1}=2\sqrt{x_0^2-6x_0+15}=2\sqrt{(x_0-3)^2+6}\geqslant 2\sqrt{6}$,当且仅当 $x_0=3$

1.D 提示:双曲线的方程为 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$,可得 $a=\sqrt{5}$,
 $b=2$,所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=3$,
所以双曲线的焦距为 $2c=6$,故选D.
2.A 提示:由题意得, $c=\sqrt{9+16}=5$.由双曲线定义,
可得 $|PF_1|-|PF_2|=2a=6$,又 $|PF_1|=7$,
所以 $|PF_2|=13$ 或 $|PF_2|=1$,又因为在双曲线中 $|PF_2|>c-a=2$,所以 $|PF_2|=13$.故选A.
3.C 提示:在双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 中 $c=\sqrt{1+3}=2$,且焦点在 x 轴上,因为椭圆和双曲线的相同焦点为 F_1,F_2 ,它们在第一象限的交点为 P ,所以椭圆中 $\sqrt{a-12}=2$,得 $a=16$.

因为 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{a}=8$, $|PF_1|-|PF_2|=2$,
所以 $|PF_1|=5$, $|PF_2|=3$.因为 $|F_1F_2|=2c=4$,
所以由余弦定理,得
$$\cos \angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{5^2+3^2-4^2}{2\times 5\times 3}=-\frac{3}{5}$$
.

故选C.
4.D 提示:因为双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$,所以 $c^2=a^2+b^2=$

$4+3=7$.因为 $|OP|=|OF_1|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$,所以 $PF_1\perp PF_2$,
所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=28$.
由双曲线的定义,知 $|PF_1|-|PF_2|=2a=4$,两边同时平方,得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=16$,
所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=6$,故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=3$.
故选D.

5.B 提示:由题意知,该双曲线的焦点在 x 轴上,实轴长为4,点 $A(4,3)$ 在该双曲线上.设该双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则 $\begin{cases} \frac{4^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1, \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1. \end{cases}$ 解得 $a=2,b=\sqrt{3}$,故该双曲线的方程是 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.故选B.

6.B 提示:设点 $M(x,y)$,则 $x\leq-2$ 或 $x\geq 2$,且由 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$,可得 $y^2=\frac{x^2}{4}-1$.
又 $\overrightarrow{AM}=(x-3,y),\overrightarrow{OM}=(x,y)$,
所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}=x(x-3)+y^2=x^2-3x+\frac{x^2}{4}-1=\frac{5x^2}{4}-3x-1$.
令 $f(x)=\frac{5x^2}{4}-3x-1$,其中 $x\leq-2$ 或 $x\geq 2$,可知二次函数 $f(x)$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=\frac{6}{5}$.

当 $x\leq-2$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减,此时 $f(x)\geq f(-2)=10$;
当 $x\geq 2$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,此时 $f(x)\geq f(2)=-2$.
综上所述,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ 上的值域为 $[-2,+\infty)$.因此 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}$ 的最小值是-2.故选B.

7.B 提示:设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>0,b_1>0)$,
 $c_1^2=a_1^2+b_1^2$,则长轴长为 $2a_1$,焦距为 $2c_1$.
 P 为双曲线右支上的动点(非顶点), F_1,F_2 为双曲线的两个焦点.设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与 PF_1,PF_2,F_1F_2 分别切于 M,N,Q .
则根据双曲线的定义及圆的性质,可知 $|PF_1|-|PF_2|=|F_1M|-|F_2N|=|F_1Q|-|F_2Q|=2a_1$,
又 $|F_1Q|+|F_2Q|=2c_1$,得 $|F_1Q|=c_1+a_1,|F_2Q|=c_1-a_1$,
故 Q 为双曲线的右顶点,此时双曲线实轴长为 $2\sqrt{a}$,右顶点坐标 $Q(\sqrt{a},0)$.

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆恒过定点 $(\sqrt{a},0)$.故选B.
8.B 提示:由右焦点 F 作一条渐近线的垂线,可设垂线方程为 $y=-\frac{a}{b}(x-c)$.

$$\begin{cases} y=-\frac{a}{b}(x-c), \\ y=\frac{b}{a}x, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x=\frac{a^2}{c}, \\ y=\frac{ab}{c}, \end{cases}$$

即点 A 坐标为 $\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$.再设点 $B(x_0,y_0)$,则由 $\overrightarrow{FB}=4\overrightarrow{FA}$,可得 $(x_0-c,y_0)=4\left(\frac{a^2}{c}-c,\frac{ab}{c}\right)$,
即 $x_0=\frac{4a^2}{c}-3c,y_0=\frac{4ab}{c}$,

将其代入双曲线方程,得 $\frac{\left(\frac{4a^2}{c}-3c\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{4ab}{c}\right)^2}{b^2}=1$,
化简得 $\left(\frac{4a}{c}-\frac{3c}{a}\right)^2-\left(\frac{4a}{c}\right)^2=1$,由双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}$,可得 $\left(\frac{4}{e}-3e\right)^2-\left(\frac{4}{e}\right)^2=1$,解得 $e^2=\frac{25}{9}$,因为双曲线的离心率 $e>1$,所以 $e=\frac{5}{3}$.故选B.

二、多项选择题
9.ACD 提示:对于双曲线 $\Gamma,a=2,b=1$,则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.
对于A,双曲线 Γ 的顶点坐标为 $(\pm 2,0)$,A正确;
对于B,双曲线 Γ 的焦点坐标为 $(\pm\sqrt{5},0)$,B错误;
对于C,双曲线 Γ 的实轴长为 $2a=4$,C正确;
对于D,双曲线 Γ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,即 $x\pm 2y=0$,D正确.故选ACD.
10.BCD 提示:对于A,若 Γ 是等轴双曲线,则 $1-m+3+m=0$,显然不成立,故A错误;
对于B,因为 Γ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,所以 $3+m>1-m>0$,解得 $-1<m<1$,故B正确;
对于C,若 Γ 是圆,则 $3+m=1-m>0$,解得 $m=-1$,此时圆的半径为 $\sqrt{2}$,故C正确;

对于D,若 Γ 表示焦点在 x 轴上的双曲线,则 $\begin{cases} 1-m>0, \\ 3+m<0, \end{cases}$
解得 $m<-3$,故D正确.故选BCD.
11.AD 提示:连接 BF_1 ,由双曲线定义,可知 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,由题意得, A,B 关于原点对称,故 $|AF_1|=|BF_2|$ 且 $AF_1\parallel BF_2$,即四边形 BF_1AF_2 为平行四边形.因为 $|BF_2|-|AF_2|=|AF_1|-|AF_2|=2a$,又 $|BF_2|=3|AF_2|$,所以 $|BF_2|=3a,|AF_2|=a$.

因为 $\angle F_1AF_2=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\angle AF_2B=\frac{\pi}{3}$,
由 $\overrightarrow{F_2O}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{F_2A}+\overrightarrow{F_2B})$,得 $\left|\overrightarrow{F_2O}\right|^2=\frac{1}{4}(\left|\overrightarrow{F_2A}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_2B}\right|^2+2\left|\overrightarrow{F_2A}\right|\left|\overrightarrow{F_2B}\right|\cos \angle AF_2B)$,
即 $e^2=\frac{1}{4}\left[a^2+(3a)^2+2\times a\times 3a\times \frac{1}{2}\right]=\frac{13}{4}a^2$,所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{13}{4}$.

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$,故A正确;
又 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}-1=\frac{9}{4}$,所以 $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$,
所以渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x,2b=3a$,故B,C错误;
设点 $P(x_0,y_0),A(x_1,y_1)$,因为 A,B 是直线 $y=kx$ 与双曲线的交点,根据对称性可得 $B(-x_1,-y_1)$,
所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{-y_1-y_0}{-x_1-x_0}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}$.

又点 P,A 在双曲线 C 上,代入可得 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1, \\ \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1, \end{cases}$
两式相减,得 $\frac{y_1^2-y_0^2}{b^2}=\frac{x_1^2-x_0^2}{a^2}$,
所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{4}$,故D正确.故选AD.

三、填空题

12. $y=\pm x$ 提示:因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线互相垂直,又双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,所以 $\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$,即 $b=a$,所以渐近线方程为 $y=\pm x$.
13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 提示:由题意知, $\angle BOF=30^\circ$,则双曲线的

一条渐近线的斜率为 $\tan 30^\circ$,即 $\frac{b}{a}=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

14.12 提示:设双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 的实半轴长为 a ,则 $a=3$,
设双曲线 C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,MN 的中点为 P ,连接 PF_1,PF_2 .
因为 F_1 是 MA 的中点, P 是 MN 的中点,所以 F_1P 是 $\triangle MAN$ 的中位线,
则 $|PF_1|=\frac{1}{2}|AN|$,同理 $|PF_2|=\frac{1}{2}|BN|$,所以 $|AN|-|BN|=2(|PF_1|-|PF_2|)$.
因为 P 在双曲线的右支上,由双曲线的定义,知 $|PF_1|-|PF_2|=2a=6$,所以 $|AN|-|BN|=12$.

四、解答题
15.解:(1)设所求双曲线的实半轴长为 a ,虚半轴长为 b ,半焦距为 c .由过点 $(2,0)$,可知所求双曲线的焦点在 x 轴上,且 $a=2$,
因为所求双曲线与双曲线 $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{16}=1$ 的离心率相等,
所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{64+16}}{8}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,解得 $c=\sqrt{5}$,
所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=1$,所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.
(2)与双曲线 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$ 具有相同的渐近线,且过点 $M(3,-2)$,
则可设所求双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=k(k\neq 0)$,把点 $M(3,-2)$ 代入上述方程,得 $\frac{4}{4}-\frac{9}{3}=k$,解得 $k=-2$.

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=1$.

16.解:(1)由题意知, $a=1$,且 $\frac{b}{a}=1$,所以 $b=1$,
所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$,
所以双曲线 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.
(2)由(1)知双曲线 E 的方程为 $x^2-y^2=1$,
将 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$,即 $x=2y+1$ 代入 $x^2-y^2=1$,得 $3y^2+4y=0$,
解得 $y=0$ 或 $y=-\frac{4}{3}$.
不妨设 $y_P=0,y_Q=-\frac{4}{3}$,所以 $|PQ|=\sqrt{1+2^2}\cdot|y_P-y_Q|=\frac{4}{3}\sqrt{5}$.

17.(1)证明:由已知可得 $a=\sqrt{5},b=1$,所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}x$.
因为点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=\frac{1}{\sqrt{5}}x$,即直线 $x-\sqrt{5}y=0$ 的距离 $d_1=\frac{|x_0-\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}}$,
点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=-\frac{1}{\sqrt{5}}x$,即直线 $x+\sqrt{5}y=0$ 的距离 $d_2=\frac{|x_0+\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}}$,
所以点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积为 $\frac{|x_0-\sqrt{5}y_0|\cdot|x_0+\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{|x_0^2-5y_0^2|}{6}$,
又 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 C 上,所以 $\frac{x_0^2}{5}-y_0^2=1$,所以 $x_0^2-5y_0^2=5$,所以 $d_1d_2=\frac{5}{6}$ 是一个常数.

(2)解:因为 $\frac{x_0^2}{5}-y_0^2=1$,所以 $y_0^2=\frac{x_0^2}{5}-1\geq 0$,
解得 $x_0\leq-\sqrt{5}$,或 $x_0\geq\sqrt{5}$,
所以 $|PA|^2=(x_0-4)^2+y_0^2=(x_0-4)^2+\frac{x_0^2}{5}-1=\frac{6}{5}x_0^2-8x_0+15=\frac{6}{5}\left(x_0-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$,
当 $x_0=\frac{10}{3}$ 时, $|PA|^2$ 的最小值为 $\frac{5}{3}$,所以 $|PA|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

18.解:(1)椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的焦点为 $(\pm 2,0)$,因为双曲线 C 的焦点与椭圆的焦点重合,所以 $a^2+b^2=4$,
由双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$,得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 $b=1,a=\sqrt{3}$,
所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.
(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),AB$ 的中点为 M ,因为 M 在直线 $l:y=\frac{1}{3}x$ 上,故 $y_M=\frac{1}{3}x_M$.
而 $\frac{x_1}{3}-y_1^2=1,\frac{x_2}{3}-y_2^2=1$,
两式相减,得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{3}-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$,
故 $\frac{(x_1-x_2)x_M}{3}-(y_1-y_2)y_M=0$,
因为 A,B 两点不关于 x 轴对称,所以 $y_M\neq 0,x_1\neq x_2$,
所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_M}{3y_M}=1$,故直线 AB 的斜率为1.

19.(1)解:因为 $e=\frac{c}{a}=2$,所以 $c=2a,b^2=c^2-a^2=3a^2$.
所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$,即 $3x^2-y^2=3a^2$.
因为点 $M(\sqrt{5},\sqrt{3})$ 在双曲线 C 上,所以 $15-3=3a^2$,所以 $a^2=4$.
所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.
(2)证明:由题意可得直线 OP 的斜率存在,可设直线 OP 的方程为 $y=kx(k\neq 0)$,则直线 OQ 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$,
由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1, \\ y=kx, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x^2=\frac{12}{3-k^2}, \\ y^2=\frac{12k^2}{3-k^2}, \end{cases}$
所以 $|OP|^2=x^2+y^2=\frac{12(k^2+1)}{3-k^2}$.
同理,可得 $|OQ|^2=\frac{12\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{3-\frac{1}{k^2}}=\frac{12(k^2+1)}{3k^2-1}$,
所以 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{3-k^2+(3k^2-1)}{12(k^2+1)}=\frac{2+2k^2}{12(k^2+1)}=\frac{1}{6}$.

数学人教A

第11期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C 提示:由 $y=x^2$,得 $x^2=y=2py$,所以 $p=\frac{1}{2}$,所以抛物线 $y=x^2$ 的焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$,故选C.

2.D 提示:因为抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,0)$,准线方程为 $x=-2$,
又点 M 在 C 上,所以 M 到准线 $x=-2$ 的距离等于 $|MF|$,故 $|MF|=4$.故选D.

3.C 提示:直线 l 的方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{p}{2}$,设点 A,B 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,
由 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{p}{2}, \\ y^2=2px, \end{cases}$ 消去 x ,得 $y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}py-p^2=0$.
则 $y_1+y_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}p,y_1y_2=-p^2$,
又 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以 $|OF|=\frac{p}{2}$,
故 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\cdot|OF|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}\cdot|OF|=\frac{\sqrt{3}}{3}p^2=\sqrt{3}$,所以 $p=\sqrt{3}$.故选C.

4.D 提示:设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,不妨设 $y_1>0$,设直线 l 的方程为 $x=ty+1$,
由 $\begin{cases} x=ty+1, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 x ,得 $y^2-4ty-4=0$,
则 $y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4$.
由 $|AF|=3|BF|$,可得 $y_1=-3y_2$.
由以上三式,解得 $t=\frac{\sqrt{3}}{3},y_1=2\sqrt{3},y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,
由抛物线定义,可知 $|AB|=x_1+x_2+2=\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}+2=\frac{16}{3}$.
故选D.

5.D 提示:由题意可知,点 F 的坐标为 $(2,0)$,设点 A,B,C 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$,又 F 为 $\triangle ABC$ 的重心,
所以 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2$,即 $x_1+x_2+x_3=6$,
由抛物线方程,可得 $2p=8$,所以 $p=4$,
所以由抛物线的定义,可知 $|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{BF}|+|\overrightarrow{CF}|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}+x_3+\frac{p}{2}=6+\frac{3}{2}p=12$.故选D.

6.D 提示:过点 B 作准线的垂线,垂足为 D ,设 $|BF|=a$,则 $|BC|=2|BF|=2a$,
由抛物线的定义,得 $|BD|=|BF|=a$.
在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,可得 $\sin \angle BCD=\frac{|BD|}{|BC|}=\frac{1}{2}$,所以 $\angle BCD=30^\circ$,
在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中,因为 $|AE|=3$,所以 $|AC|=3+3a$,
因为 $\sin \angle ACE=\frac{|AE|}{|AC|}=\frac{1}{2}$,所以 $|AC|=2|AE|$,所以 $3+3a=6$,解得 $a=1$.
因为 $BD\parallel FG$,所以 $\frac{|BD|}{|FG|}=\frac{|BC|}{|FC|}$,即 $\frac{1}{p}=\frac{2}{3}$,解得 $p=\frac{3}{2}$,
所以抛物线方程为 $y^2=3x$.故选D.

7.C 提示:设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,把 l 与抛物线 C 的方程联立,
得 $\begin{cases} y=-x+\frac{p}{2}, \\ y^2=2px, \end{cases}$ 消去 y ,得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$,
则 $x_1+x_2=3p$,又 l 经过 C 的焦点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$,
所以 $|AB|=x_1+x_2+p=3p+p=16$,所以 $p=4$,所以 C 的方程为 $y^2=8x$.故选C.

8.C 提示:过点 N 作 C 的准线的垂线,垂足为 H ,由抛物线定义,可知 $|MN|+|NF|=|MN|+|NH|$,
当 M,N,H 共线,即 MN 与抛物线 C 的准线垂直时, $|MN|+|NF|$ 取得最小值,此时点 N 纵坐标为4,代入抛物线方程,可得 $4^2=6x$,得 $x=\frac{8}{3}$,所以 $N\left(\frac{8}{3},4\right)$,则 $\triangle MNF$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\left(6-\frac{8}{3}\right)\times 4=\frac{20}{3}$.故选C.

二、多项选择题
9.AB 提示:由题设知,抛物线方程可化为 $x^2=-\frac{1}{8}y$,
所以开口向下,焦点为 $\left(0,-\frac{1}{32}\right)$,准线方程为 $y=\frac{1}{32}$,所以A,B正确,C,D错误.故选AB.
10.AC 提示:对于A,直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴的交点为 $(1,0)$,所以抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$,
所以 $\frac{p}{2}=1,p=2$,故A正确,且抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$;

高二选择性必修(第一册)答案页第3期

对于B,设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases} y=-\sqrt{3}(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 y ,得 $3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)=0$,
解得 $x_1=3,x_2=\frac{1}{3}$,所以 $|MN|=|x_1+x_2+p|=3+\frac{1}{3}+2=\frac{16}{3}$,
故B错误;
对于C,设 MN 的中点为 A,M,N 到直线 l 的距离分别为 d_1,d_2 ,因为 $d=\frac{1}{2}(d_1+d_2)=\frac{1}{2}(|MF|+|NF|)=\frac{1}{2}|MN|$,
即 A 到直线 l 的距离等于 MN 的一半,所以以 MN 为直径的圆与直线 l 相切,故C正确;
对于D,由上述分析,可知 $y_1=-\sqrt{3}\times(3-1)=-2\sqrt{3},y_2=-\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,
所以 $M\left(3,-2\sqrt{3}\right),N\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,
所以 $|OM|=\sqrt{3^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{21}$,
 $|ON|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$,
 $|MN|=\sqrt{\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{16}{3}$,
所以 $\triangle OMN$ 不是等腰三角形,故D错误.故选AC.

11.BD 提示:对于A,因为点 $\left(\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$ 在抛物线 C 上,所以 $(\sqrt{2})^2=2p\times\frac{1}{2}$,得 $p=2$,故A错误;
对于B,因为抛物线 $C:x^2=4y$,所以 $F(0,1)$,因为 $AB\perp y$ 轴,所以 $l_{AB}:y=1$,由 $\begin{cases} x^2=4y, \\ y=1, \end{cases}$ 消去 y ,得 $x^2=4$,解得 $x=\pm 2$,所以 $|AB|=4$,故B正确;
对于C,设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$,点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,
由 $\begin{cases} x^2=4y, \\ y=kx+1, \end{cases}$ 消去 y ,得 $x^2-4kx-4=0$,
则 $x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4$,
所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2,y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=1$,
由抛物线定义,知 $|AF|=y_1+1,|BF|=y_2+1$,
所以 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}=\frac{2+y_1+y_2}{1+(y_1+y_2)+y_1y_2}=\frac{4k^2+4}{4k^2+2+1+1}$,故C错误;

对于D,由选项C,知 $\overrightarrow{AF}=(-x_1,1-y_1),\overrightarrow{FB}=(x_2,y_2-1)$,又 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,所以 $-x_1=2x_2$,
由 $\begin{cases} x_1+x_2=4k, \\ x_1x_2=-4, \end{cases}$ 消去 x_1,x_2 ,得 $8k^2=1$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$,故 $2kx_2=-x_1$,
D正确.故选BD.
三、填空题
12.4 提示:抛物线 $y^2=8x$ 的准线为 $x=-2$,设点 P 的横坐标为 x_0 ,由抛物线 $y^2=8x$ 上的点 P 到准线的距离为6,可得 $6=x_0+2$,解得 $x_0=4$.
13.3 提示:过点 Q 作 $QQ'\perp l$,垂足为 Q' ,由抛物线定义,知 $|QF|=|QQ'|$.
设准线 l 交 x 轴于点 M ,因为 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$,所以 $|QQ'|:|FM|=|PQ|:|PF|=3:4$,又焦点 F 到准线 l 的距离为4,所以 $|QQ'|=3$,
所以 $|QF|=|QQ'|=3$.

14. $\frac{3}{4}$ 提示:点 P 在曲线 $x^2=4y$ 上,设 $P\left(t,\frac{t^2}{4}\right)$,则点 P 到直线 l 的距离为 $d=\frac{\left|3t+t^2+6\right|}{5}=\frac{\left|\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right|}{5}$,
当 $t=-\frac{3}{2}$ 时, $d_{\min}=\frac{3}{4}$.

四、解答题
15.解:(1)准线方程为 $2y+4=0$,即 $y=-2$,则抛物线的焦点坐标为 $(0,2)$,所以所求抛物线的标准方程为 $x^2=8y$.
(2)设所求抛物线的标准方程为 $y^2=mx(m\neq 0)$ 或 $x^2=ny(n\neq 0)$.
当抛物线的标准方程为 $y^2=mx(m\neq 0)$ 时, $(-4)^2=3m$,解得 $m=\frac{16}{3}$,所以 $y^2=\frac{16}{3}x$;
当抛物线的标准方程为 $x^2=ny(n\neq 0)$ 时, $3^2=-4n$,解得 $n=-\frac{9}{4}$,所以 $x^2=-\frac{9}{4}y$.

综上,所求抛物线的标准方程为 $y^2=\frac{16}{3}x$ 或 $x^2=-\frac{9}{4}y$.
(3)直线 $x+3y+15=0$ 交 y 轴于点 $(0,-5)$,
则以 $(0,-5)$ 为焦点的抛物线标准方程为 $x^2=-20y$;
直线 $x+3y+15=0$ 交 x 轴于点 $(-15,0)$,
则以 $(-15,0)$ 为焦点的抛物线标准方程为 $y^2=-60x$.
所以所求抛物线的标准方程为 $x^2=-20y$ 或 $y^2=-60x$.