

高二选择性必修(第二册)答案页第2期

数学
北师大

第5期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示： $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1} =$ 扫码免费下载 习题讲解 ppt $\frac{(1.1+3)-(1+3)}{0.1} = 2.1$ ，故选 D.2.C 提示：根据题意，由导数的定义，得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+2x)-f(2)}{x} = 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{f(2+2x)-f(2)}{2x} = 2f'(2) = 8$ ，故选 C.3.B 提示： $y' = 3t^2 + 6t - 1$ ，因为当 $t = t_0$ 时，该质点的瞬时速度大于 8m/s，所以 $3t_0^2 + 6t_0 - 1 > 8$ ，即 $t_0^2 + 2t_0 - 3 = (t_0 + 3)(t_0 - 1) > 0$ ，显然 t_0 不是负数，所以 $t_0 > 1$ ，故选 B.4.B 提示： $f(x) = e^x \sin x$ ，则 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$ ，故选 B.5.A 提示：由图可知，经过点 (2, f(2)) 和点 (4, f(4)) 的割线的斜率大于曲线 $y = f(x)$ 在点 (2, f(2)) 处的切线斜率，且小于曲线 $y = f(x)$ 在点 (4, f(4)) 处的切线斜率，所以 $f'(2) < \frac{f(4)-f(2)}{4-2} < f'(4)$ ，所以 $2f'(2) < f(4) - f(2) < 2f'(4)$ ，故选 A.6.C 提示：由 $y = \frac{e^x}{x+1}$ ，得 $y' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ ，故函数 y 在点 $(1, \frac{e}{2})$ 处的切线斜率为 $k = y'|_{x=1} = \frac{e}{4}$ ，切线方程为 $y - \frac{e}{2} = \frac{e}{4}(x-1)$ ，即 $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$ ，故选 C.7.B 提示：① $f(x) = \sin x + \cos x$ ，则 $f'(x) = \cos x - \sin x$ ，所以 $f''(x) = -\sin x - \cos x$ ，当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $\sin x > 0, \cos x > 0$ ，则 $-\sin x - \cos x < 0$ ，故①满足题意；
② $f(x) = -xe^x$ ，则 $f'(x) = -e^x + xe^x$ ，所以 $f''(x) = (2-x)e^x$ ，当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $2-x > 0$ ，即 $f''(x) > 0$ ，故②不满足题意；
③ $f(x) = \ln x - 2x$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$ ，所以 $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ，当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $f''(x) < 0$ ，故③满足题意；
④ $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ ，则 $f'(x) = -2x + 2$ ，所以 $f''(x) = -2$ ，当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $f''(x) < 0$ ，故④满足题意.综上，有 3 个函数满足题意，故选 B.
8.A 提示：对 $f(x) = e^x + a \cdot e^{-x}$ 求导，得 $f'(x) = e^x - ae^{-x}$ ，又 $f'(x)$ 是奇函数，故 $f'(0) = 1 - a = 0$ ，解得 $a = 1$ ，故有 $f'(x) = e^x - e^{-x}$ ，设切点为 (x_0, y_0) ，则 $f'(x_0) = e^{x_0} - e^{-x_0} = \frac{3}{2}$ ，得 $e^{x_0} = 2$ 或 $e^{x_0} = -\frac{1}{2}$ （舍去），得 $x_0 = \ln 2$ ，故选 A.

二、多项选择题

9.AD 提示：因为 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = 2$ ，故 A 正确；因为 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h} = \frac{1}{2} f'(x_0) = 1$ ，故 B 错误；因为 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h} = 2f'(x_0) = 4$ ，故 C 错误；因为 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h} = f'(x_0) = 2$ ，故 D 正确. 故选 AD.10.AC 提示：对于 A，若 $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$ ，则 $y' = 2x + \frac{1}{x^3}$ ，故 A 正确；对于 B，若 $y = x \sin x$ ，则 $y' = \sin x + x \cos x$ ，故 B 错误；对于 C，若 $y = \frac{2x}{e^x}$ ，则 $y' = \frac{2e^x - 2xe^x}{(e^x)^2} = \frac{2-2x}{e^x}$ ，故 C 正确；对于 D，若 $y = (2x+1)^4$ ，则 $y' = 8(2x+1)^3$ ，故 D 错误. 故选 AC.11.BCD 提示：对于 A，令 $f(x) = x, g(x) = x+1$ ，则 $f'(x) = g'(x) = 1$ ，但是 $f(x) = g(x)$ 不成立，故 A 错误；对于 B，若 $f(x) = g(x)$ ，则 $f'(x) = g'(x)$ ，故 B 正确；对于 C，由已知可得 $f(-x) = -f(x)$ ，两边同时求导得 $-f'(-x) = -f'(x)$ ，即 $f'(-x) = f'(x)$ ，故 $f'(x)$ 是偶函数，故 C 正确；对于 D，由已知可得 $g(-x) = g(x)$ ，两边同时求导得 $-g'(-x) = g'(x)$ ，所以 $g'(x)$ 是奇函数，故 D 正确. 故选 BCD.12.BC 提示：由图可知 $f(-1) = 2, f(-2) > 2$ ，又因为函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(1) = -2, f(2) < -2$ ，所以 $f(1) \cdot f(2) > 4$ ，所以 A 错误，B 正确；由 $f(x)$ 是奇函数，结合图象可知 $f'(1) < 0, f'(2) > 0$ ，所以 $f'(1) \cdot f'(2) < 0$ ，所以 C 正确，D 错误. 故选 BC.

三、填空题

13.e 提示：因为函数 $f(x) = f'(1)x^2 - e^x$ ，所以 $f'(x) = 2f'(1)x - e^x$ ，故 $f'(1) = 2f'(1) - e$ ，得 $f'(1) = e$.14.-1 提示：因为 $f(x) = e^x$ ，所以 $f'(x) = e^x$ ，设切点为 (x_0, e^{-x_0}) ，则 $f'(x_0) = e^{-x_0}$ ，又该切线过点 $(1, 0)$ ，所以 $\frac{e^{-x_0}-0}{x_0-1} = -e^{-x_0}$ ，解得 $x_0 = 0$ ，所以 $f'(0) = e^0 = 1$ ，即该切线的斜率为 1.当 $x \geq 7$ 时， $P(x) = 6x - (6x + \ln x + \frac{e^3}{x} - 11) = 2 - 9 - \ln x - \frac{e^3}{x}$ ，所以 $P(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x} - x + 8, & 0 < x < 7, \\ 9 - \ln x - \frac{e^3}{x}, & x \geq 7. \end{cases}$ (2) 当 $0 < x < 7$ 时， $P(x) = -\frac{4}{x} - x + 8 = -(\frac{4}{x} + x) + 8 \leq -2\sqrt{\frac{4}{x} \cdot x} + 8 = 4$ ，当且仅当 $x = 2$ 时，等号成立，此时 $P(x)$ 取得最大值 $P(2) = 4$ ；当 $x \geq 7$ 时， $P(x) = 9 - \ln x - \frac{e^3}{x}$ ，所以 $P'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{e^3}{x^2} = \frac{e^3 - x}{x^2}$ ，当 $7 \leq x < e^3$ 时， $P'(x) > 0$ ，函数 $P(x)$ 单调递增，当 $x > e^3$ 时， $P'(x) < 0$ ，函数 $P(x)$ 单调递减，所以当 $x = e^3$ 时， $P(x)$ 取得最大值，最大值为 $P(e^3) = 9 - \ln e^3 - 1 = 5$ （万元）.综上，当 $x = e^3 \approx 20$ 时， $P(x)$ 取得最大值 5 万元，故当年产量约为 20 万件时，该同学学的这一产品所获年利润最大，最大年利润为 5 万元.20.解：(1) 当 $a = 1$ 时， $f(x) = x - \frac{\sin x}{\cos x}$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，所以 $f'(x) = 1 - \frac{\cos x \cos x - 2 \cos x (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = 1 - \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x - 2}{\cos^2 x}$ ，令 $t = \cos x$ ，因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，所以 $t \in (0, 1)$ ，所以 $\cos^2 x + \cos^2 x - 2 = t^2 + t^2 - 2 = (t-1)(t^2 + 2t + 2) = (t-1) \cdot [(t+1)^2 + 1] < 0$ ，又 $\cos^2 x = t^2 > 0$ ，所以 $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x - 2}{\cos^2 x} = \frac{(t-1)(t^2 + 2t + 2)}{t^2} < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减.(2) $f(x) + \sin x < 0$ ，设 $g(x) = f(x) + \sin x = ax - \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $g'(x) < 0$ ，注意到 $g(0) = 0$ ，则 $g'(x) \leq 0$ ，因为 $g'(x) = a - \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} + \cos x$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，所以 $g'(0) = a - 1 + 1 \leq 0$ ，故 $a \leq 0$ 。当 $a \leq 0$ 时，证明 $g(x) < 0$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立。即证明 $-\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x < 0$ 成立，令 $m(x) = \sin x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ ，则 $m'(x) = \cos x - \frac{2 - \cos^2 x}{\cos^3 x} = \frac{\cos^3 x + \cos^2 x - 2}{\cos^3 x}$ $= \frac{(\cos^2 x - 1)(\cos^2 x + 2)}{\cos^3 x} < 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $m(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减， $m(x) < m(0) = 0$ 。综上， a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$ 。21.解：(1) 因为 $f(x) = e^x - a \sin x$ ，所以 $f'(x) = e^x - a \cos x$ ，所以 $f'(0) = 1 - a$ ，所以函数 $y = f(x)$ 在 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = (1-a) \cdot x + 1$ 。(2) 因为 $a = 0$ ，所以 $f(x) = e^x$ ，又 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 有公共点，所以方程 $f(x) = g(x)$ 有解，即 $e^x = b + \sqrt{x}$ 有解，显然 $x \neq 0$ ，所以 $b = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解。设 $h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$)，所以 $h'(x) = \frac{e^x(2x-1)}{2x\sqrt{x}}$ ，所以当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时， $h'(x) < 0$ ；当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ，所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{2}) = \sqrt{2e}$ ，且当 $x \rightarrow 0$ 时， $h(x) \rightarrow +\infty$ ；当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $h(x) \rightarrow +\infty$ ，所以 $h(x) \in [\sqrt{2e}, +\infty)$ ，所以 b 的取值范围为 $[\sqrt{2e}, +\infty)$ 。22.(1) 解：当 $a = 0$ 时， $f'(x) = e^{-1}$ ，当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ ，单调递增区间为 $(0, +\infty)$ ，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值，且极小值为 $f(0) = -1$ ， $f(x)$ 无极大值。(2) 证明：设 $g(x) = f'(x) = e^x - 3ax^2 - 1$ ，则 $g'(x) = e^x - 6ax$ ，令 $h(x) = g'(x) = e^x - 6ax$ ，则 $h'(x) = e^x - 6a$ ，当 $x \geq 0$ ，且 $a \leq \frac{1}{6}$ 时， $h'(x) = e^x - 6a \geq 0$ ，所以 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x) \geq g'(0) = 1$ ，当且仅当 $x = 0$ 时，等号成立，令函数 $F(x) = [f'(x) + f'(x_2)](x - x_2) - 2[f(x) - f(x_2)]$ ，则 $F'(x) = g'(x)(x - x_2) - f'(x) + f'(x_2)$ ，令 $m(x) = F'(x) = g'(x)(x - x_2) - f'(x) + f'(x_2)$ ，则 $m'(x) = h'(x)(x - x_2)$ ，当 $x > x_2 \geq 0$ 时， $m'(x) > 0$ ，所以 $F'(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增，则 $F'(x) > F'(x_2) = 0$ ，即 $[f'(x) + f'(x_2)](x - x_2) - 2[f(x) - f(x_2)] > 0$ ，因为 $x_1 > x_2$ ，所以 $[f'(x_1) + f'(x_2)](x_1 - x_2) - 2[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ，又 $x_1 - x_2 > 0$ ，所以 $\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ 。 $f(x_1) + x_1 > f(x_2) + x_2$ ，故 B 错误；对于 C，若 $0 < x_1 < x_2 < 1$ ，则 $f(x_1) > f(x_2)$ ，又 $-x_1 > -x_2$ ，所以 $f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2$ ，故 C 正确；对于 D，若 $1 < x_1 < x_2$ ，则 $f(x_1) < f(x_2)$ ，即 $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，又 $x_1 < x_2$ ，所以 $x_1 \cdot [f(x_1) - f(x_2)] > x_2 \cdot [f(x_1) - f(x_2)]$ ，整理得 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_2 f(x_1) + x_1 f(x_2)$ ，故 D 正确. 故选 CD.

三、填空题

13. $y = 8x - 72$ 提示：因为 $f(0) = 81 + m = 0$ ，所以 $m = -81$ ， $f(-1) = 1 + m = -80$ ， $f'(x) = 8(2x+3)^3$ ，所以 $f'(-1) = 8$ ，所以所求切线方程为 $y - 80 = 8(x+1)$ ，即 $y = 8x - 72$ 。14. $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1]$ 提示：因为函数 $f(x) = a^x + (1+a)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x) = a^x \ln a + (1+a)^x \ln(1+a) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，即 $(1+a)^x \ln(1+a) \geq -a^x \ln a$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，化简可得 $(\frac{1+a}{a})^x \geq -\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，而在 $(0, +\infty)$ 上 $(\frac{1+a}{a})^x > 1$ ，故有 $1 \geq -\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$ ，由 $a \in (0, 1)$ ，化简得 $\ln(1+a) \geq \ln \frac{1}{a}$ ，即 $1+a \geq \frac{1}{a}$ ， $a^2 + a - 1 \geq 0$ ，解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq a < 1$ ，故 a 的取值范围是 $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1]$ 。15. $(-\infty, 2e]$ 提示： $f'(x) = \ln x - 1$ ，当 $x \in (0, e)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，所以当 $x = e$ 时，函数取得最小值 $f(e) = e \ln e - 2e + m = m - e$ ，所以 $f(x) \in [m - e, +\infty)$ ，若 $f(x) \in [m - e, +\infty)$ ，函数 $y = f(f(x))$ 与 $y = f(x)$ 有相同的值域，只需 $m - e \leq e$ ，即 $m \leq 2e$ 。16. $(0, \frac{3}{4})$ 提示：因为 $f'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x}$ ，所以 $g(x) = f'(x) - \frac{1}{3} = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$ ($x > 0$)，由 $g(x) = 0$ ，得 $a = -\frac{1}{3}x^2 + x$ ($x > 0$)，在同一坐标系中分别作出 $y = -\frac{1}{3}x^2 + x$ ($x > 0$) 和 $y = a$ 的图象如下图所示，由图可知当 $0 < a < \frac{3}{4}$ 时，两函数图象有两个不同的交点，即函数 $g(x)$ 有两个零点，所以实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{3}{4})$ 。

四、解答题

17.解：(1) 由 $f(x) = e^x \sin x - x$ ，得 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 1$ ，所以 $f'(0) = 0$ ，又 $f(0) = 0$ ，所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 0$ 。(2) 由 $f(x) = e^x \sin x - x$ ，得 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 1$ ， $f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x$ ，因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，所以 $f''(x) \geq 0$ ，则 $f'(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，又 $f'(0) = 0$ ，所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上成立，即 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}$ 。18.解：(1) 当 $a = b = 2$ 时， $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$ ， $f'(x) = 6x^2 - 12x$ ($x \in \mathbb{R}$)，令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = 0$ 或 $x = 2$ ，当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以当 $x = 0$ 时， $f(x)$ 有极大值，极大值为 $f(0) = 2$ ，当 $x = 2$ 时， $f(x)$ 有极小值，极小值为 $f(2) = 2 \times 2^3 - 6 \times 2^2 + 2 = -6$ 。(2) $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + b$ ，则 $f'(x) = 3ax^2 - 6ax$ ，令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = 0$ 或 $x = 2$ ，因为 $a > 0$ ，所以 $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ； $x \in (0, 2)$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ ， $(2, +\infty)$ 上单调递增， $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减，故当 $x \in [1, 4]$ 时， $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减，在 $(2, 4)$ 上单调递增，则 $[f(x)]_{\min} = f(2) = b - 4a$ ，而 $f(1) = 2a + b$ ， $f(4) = 16a + b$ ，因为 $a > 0$ ，所以 $f(4) > f(1)$ ，所以 $[f(x)]_{\min} = f(2) = b - 4a$ ，所以 $b - 4a = 13$ ，解得 $a = 2$ ， $16a + b = 53$ ，解得 $b = 21$ 。19.解：(1) 因为每件商品售价为 6 元，所以 x 万件商品销售收入为 $6x$ 万元。依题意得当 $0 < x < 7$ 时， $P(x) = 6x - (\frac{4}{x} + 7x - 10) = 2 - \frac{4}{x} - x + 8$ ，令 $f'(x) < 0$ ，解得 $2 < x < 3$ ，故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(2, 3)$ ，故选 B.5.D 提示：因为 $f(x) = x^3 - 3ax + 2, x \in \mathbb{R}$ ，所以 $f'(x) = 3x^2 - 3a$ ，又因为 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，所以 $f'(1) = 3 - 3a = 0$ ，解得 $a = 1$ ，所以 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ， $f'(x) = 3x^2 - 3$ ，令 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ ，得 $x_1 = -$

二、多项选择题

9.BCD 提示:函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$,

由题意知, 方程 $f'(x) = 0$, 即 $ax^2 - bx - 2c = 0$ 有两个正根, 设为 x_1, x_2 ,

则有 $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0, x_1 x_2 = -\frac{2c}{a} > 0, \Delta = b^2 + 8ac > 0$, 所以 $ab > 0, ac < 0$. 所以 $ab \cdot ac = a^2 bc < 0$, 即 $bc < 0$. 故选 BCD.

10.ABD 提示: 由图可知, 当 $0 < x < 3$ 时, $f(x) > 0$. 当 $x > 3$ 时, $f(x) < 0$. 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$. 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 故要使得 $f(x) \cdot f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 异号, 故当 $x > 0$ 时, 仅需满足 $1 < x < 3$ 即可. 又 $f(x)$ 为奇函数, 故当 $-3 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$. 当 $x < -3$ 时, $f(x) > 0$. 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$. 当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$. 故要使得 $f(x) \cdot f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 异号, 故当 $x < 0$ 时, 需满足 $x < -3$ 或 $-1 < x < 0$. 故选 ABD.

11.AD 提示: $f(x) = x \sin x, f'(x) = \sin x + x \cos x$, 令 $g(x) = \sin x + x \cos x, g'(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$.

对于 A, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上连续, $f(0) = f(\pi) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上不单调, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $g'(x) = 2 \cos x - x \sin x$, 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,

因为 $g(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0, g(\pi) = f'(\pi) = -\pi < 0$,

所以存在唯一 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

随着 x 的变化, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下:

x	$(\frac{\pi}{2}, x_0)$	x_0	(x_0, π)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内有且只有一个极值点, 故 B 错误;

对于 C, 令 $f(x) = x \sin x = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 5 个零点, 故 C 错误;

对于 D, 由选项 B 可知, $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, x_0)$ 内单调递增, 在 (x_0, π) 内单调递减,

又因为 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0, f(\pi) = 0$, 所以当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $\ln \frac{\pi}{2} < \ln x \leq \ln \pi$, 所以 $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x} \geq \frac{1}{\ln \pi}$, 当且仅

当 $x = \pi$ 时取等号, 所以 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的最小值为 $\frac{1}{\ln \pi}$, 故 D 正确. 故选 AD.

12.ABC 提示: 对于 A, 令 $f(x) = e^x - (x+1), f'(x) = e^x - 1$, 所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增. 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x) \geq f(0) = 0$, 所以 $e^x \geq x+1$, 所以 $e^{-x} \geq x+3$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $f(x) = x^2 - \ln x, f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$, 所以在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 上, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x) \geq f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{e} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, 所以 $x^2 > \ln x$, 所以 $(x+1) > \ln(x+1) (x > 1)$, 故 B 正确;

对于 C, 令 $f(x) = \ln x - (x-1), f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x) \leq f(1) = 0$, 所以 $\ln x - (x-1) \leq 0$, 所以 $\ln x \leq x-1$, 所以 $\ln(x+2) \leq x+1 (x > -2)$, 故 C 正确;

对于 D, 取 $x = -\pi$, 得 $e^{-\pi} = \frac{1}{e^\pi} < \frac{1}{8} = \sin(-\pi) + \frac{1}{8}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

三、填空题

13.1 提示: $f'(x) = \frac{1-x}{e^x} + x-1 = \frac{(x-1)(e^x-1)}{e^x}$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$ 或 $x < 0$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(0) = 1$.

14.3(答案不唯一) 提示: 由题意得, $f'(x) = 2 - \frac{x}{e^x}$, 在 $[1, 2]$ 上有变号零点, 故 $a = 2x^2$ 在 $(1, 2)$ 上有解, 所以 $2 < a < 8$. 故可填 3(答案不唯一).

15. $(-\infty, 2e]$ 提示: $f(x) \leq 1$ 等价于 $e^{ax+4} + (-x+\ln x) \leq 1$, 令 $t = -x + \ln x$, 则 $t' = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x} (x > 0)$, 所以在 $(0, 1)$ 上, $t' > 0, t(x)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上, $t' < 0, t(x)$ 单调递减, 所以 $t \leq t(1) = -1$, 所以 $f(x) \leq 1$ 转化为 $ae^{t+1} \leq 1$, 即 $a \leq \frac{1-t}{e^t}$ 在 $[-1, +\infty)$ 上恒成立.

令 $g(t) = \frac{1-t}{e^t}, t \leq -1$, 则 $g'(t) = \frac{-e^t + e^t(t-1)}{(e^t)^2} = \frac{t-2}{e^t} < 0$,

又 $f(1) = a-1 < 0$, 故此时函数 $f(x)$ 无零点;

③当 $0 < a < 1$ 时, 易知函数 $f(x)$ 在 $(0, 1), (\frac{1}{a}, +\infty)$

上单调递增, 在 $(1, \frac{1}{a})$ 单调递减,

且 $f(1) = a-1 < 0, f(\frac{1}{a}) < f(1) < 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点;

④当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = 0$, 故此时函数 $f(x)$ 有唯一零点;

⑤当 $a > 1$ 时, 易知函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a}), (1, +\infty)$ 上

单调递增, 且 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递减, 且 $f(1) = a-1 > 0, f(\frac{1}{a}) > f(1) > 0, x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

第 7 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C 提示: 由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 2$, 所以函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, 2)$. 故选 C.

2.A 提示: $f'(x) = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, 故原函数单调递增, $f(x)$ 无极值点. 故选 A.

3.D 提示: 令 $f(x) = \ln(1+x) - \sqrt{x} (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x+1)} \leq 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $f(e) < f(0) = 0$, 即 $\ln(1+e) - \sqrt{e} < 0$, 故 $a < 0$.

令 $g(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{3} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3} = \frac{3-4\sqrt{x}}{6\sqrt{x}}$, 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x > \frac{9}{16}$, 故 $g(x)$ 在 $(\frac{9}{16}, +\infty)$ 上

单调递减, 故 $g(e) < g(\frac{9}{4}) = 0$, 故 $\sqrt{e} < \frac{2}{3}e$, 即 $b < c$. 故 $a < b < c$. 故选 D.

4.B 提示: 由题意得, $f'(x) = \cos x - a \sin x \leq 0$ 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 所以 $a \geq \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$ 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 因为当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时, $0 < \frac{1}{\tan x} < 1$, 所以 $a \geq 1$. 故选 B.

5.A 提示: 设 $g(x) = f(x) - 2 \ln x - 1$, 所以 $g'(x) = f'(x) - \frac{2}{x} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $f(e) = 3$, 所以 $g(e) = f(e) - 2 \ln e - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$, 所以不等式 $f(x) > 2 \ln x + 1$ 等价于 $g(x) > 0 = g(e)$, 所以 $x > e$, 即不等式的解集为 $(e, +\infty)$. 故选 A.

6.B 提示: 由 $y = \ln x - x - \frac{12}{x} + 9 (0 < x < 10)$, 得 $y' = \frac{1}{x} - 1 + \frac{12}{x^2} = \frac{-x^2 + x + 12}{x^2} = \frac{-(x-4)(x+3)}{x^2}$, 令 $y' > 0$, 解得 $0 < x < 4$, 令 $y' < 0$, 解得 $4 < x < 10$, 所以在 $(0, 4)$ 内单调递增, 在 $(4, 10)$ 内单调递减, 所以当 $x = 4$ 时, y 取得最大值. 故选 B.

7.D 提示: 因为 $f(x) + f(-x) = 0$, 可得 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $x \in \mathbf{R}$ 上是减函数, 由 $f(a \cdot e^x) + f(1-2x) \leq 0$,

即 $f(a \cdot e^x) \leq -f(1-2x) = f(2x-1)$, 即 $a \geq \frac{2x-1}{e^x}$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 令 $h(x) = \frac{2x-1}{e^x}$,

由 $h'(x) = \frac{3-2x}{e^x}$, 令 $h'(x) > 0$, 解得 $x < \frac{3}{2}$, 令 $h'(x) < 0$, 解得 $x > \frac{3}{2}$, 故 $h(x)$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 单调递增, 在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 单调递减, 故 $h(x)$ 的最大值为 $h(\frac{3}{2}) = \frac{2}{\sqrt{e}}$, 可得 $a \geq \frac{2}{\sqrt{e}}$. 故选 D.

8.B 提示: 由 $f'(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x = 0$, 得到 $a = \frac{2e^x + x}{e^{2x} + e^x}$, 令 $g(x) = \frac{2e^x + x}{e^{2x} + e^x}$, 则问题等价于直线 $y = a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有两个交点, $g'(x) = \frac{e^x(2e^x+1)(-e^x-x+1)}{(e^{2x}+e^x)^2}$,

其中 $e^x > 0, 2e^x + 1 > 0, -e^x - x + 1$ 是单调递减的, 并且 $x = 0$ 时, $-e^x - x + 1 = 0$,

因此函数 $g'(x) = \frac{e^x(2e^x+1)(-e^x-x+1)}{(e^{2x}+e^x)^2}$ 存在唯一零点 $x = 0$, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, 且此时 $g(x) > 0$; 当 $x < 0$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, 且 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 又 $g(0) = 1$, 所以 $g(x)$ 的图象如图所示.

显然, 当 $0 < a < 1$ 时, $y = a$ 与 $g(x)$ 有两个交点, 故选 B.

$+\infty)$, 无单调递减区间;

③当 $1-a > -1$, 即 $a < 2$ 时, $f(x)$ 单调递减区间为 $(-1, 1-a)$, 单调递增区间为 $(-\infty, -1), (1-a, +\infty)$.

综上所述, 当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1-a, -1)$, 单调递增区间为 $(-\infty, 1-a), (-1, +\infty)$; 当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无单调递减区间; 当 $a < 2$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 1-a)$, 单调递增区间为 $(-\infty, -1), (1-a, +\infty)$.

18.解: (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = e^x - 2x - 1$, 所以 $f'(x) = e^x - 2$. 令 $f'(x) > 0$, 即 $e^x - 2 > 0$, 解得 $x > \ln 2$; 令 $f'(x) < 0$, 即 $e^x - 2 < 0$, 解得 $x < \ln 2$.

所以当 $a = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\ln 2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln 2)$.

(2) 因为 $f(x) = e^x - ax - 1$, 所以 $f'(x) = e^x - a$. 因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $f'(x) = e^x - a \geq 0$ 恒成立, 即 $a \leq e^x$ 恒成立.

因为 $x \in \mathbf{R}$ 时, $e^x \in (0, +\infty)$, 所以 $a \leq 0$, 即 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

19.解: (1) 由题意知, $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{a}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = \frac{-x^2 + ax - a}{x^2}$, 令 $g(x) = -x^2 + ax - a$, 则 $g(x) = 0$ 有两个不等实根 x_1, x_2 ,

所以 $\begin{cases} \Delta = a^2 - 4a > 0, \\ x_1 + x_2 = a > 0, \end{cases}$ 解得 $a > 4$, 所以实数 a 的取值范围为 $(4, +\infty)$.

(2) 由 (1) 知, $a > 4, x_1, x_2$ 是 $g(x) = 0$ 的两根, 则 $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = a$, 所以 $f(x_1) + f(x_2) - 3a = \frac{a}{x_1} - x_1 + \ln x_1 + \frac{a}{x_2} - x_2 + \ln x_2 - 3a = \frac{a(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} - (x_1 + x_2) + \ln(x_1 x_2) - 3a = \ln a - a - 3a$.

令 $h(a) = \ln a - a - 3a (a > 4)$, 则 $h'(a) = \ln a - 2$, 所以当 $a \in (4, e^2)$ 时, $h'(a) < 0$; 当 $a \in (e^2, +\infty)$ 时, $h'(a) > 0$.

所以 $h(a)$ 在 $(4, e^2)$ 上单调递减, 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(a)_{\min} = h(e^2) = 2e^2 - 3e^2 = -e^2$, 即 $f(x_1) + f(x_2) - 3a$ 的最小值为 $-e^2$.

20.解: (1) $F(x) = xG(x) - 50 - 7x = x(-\frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x} + \frac{80}{x} + 4) - 50 - 7x = -\frac{2}{x} + \ln x - 3x + 30 (x > 0)$.

(2) 由 (1) 得 $F(x) = -\frac{2}{x} + \ln x - 3x + 30 (x > 0)$, 则 $F'(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 3 = -\frac{(3x+2)(x-1)}{x^2} (x > 0)$,

令 $F'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{2}{3}$ (舍去), 所以在 $(0, 1)$ 内, $F'(x) > 0, F(x)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上, $F'(x) < 0, F(x)$ 单调递减, 所以 $F(x)_{\max} = F(1) = -2 + \ln 1 - 3 + 30 = 25$.

答: 当 2023 年的年产量为 1 百件时, 该企业在这种茶文化旅游生产品中获利最大, 且最大利润为 25 万元.

21.(1) 解: $f(x) = a(e^x + a) - x$, 则 $f'(x) = ae^x - 1$. ①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln \frac{1}{a}$, 当 $x \in (-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 证明: 由 (1) 可知, 当 $a > 0$ 时, $f(x)_{\min} = f(\ln \frac{1}{a}) = a(\frac{1}{a} + a) - \ln \frac{1}{a} = 1 + a^2 + \ln a$.

要证 $f(x) > 2 \ln a + \frac{3}{2}$, 只需证 $1 + a^2 + \ln a > 2 \ln a + \frac{3}{2}$, 只需证 $a^2 - \ln a - \frac{1}{2} > 0$.

设 $g(a) = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}, a > 0$, 则 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$, 令 $g'(a) = 0$, 得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当 $a \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递减, 当 $a \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时, $g'(a) > 0, g(a)$ 单调递增, 所以 $g(a) \geq g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, 即 $g(a) > 0$, 所以 $a^2 - \ln a - \frac{1}{2} > 0$ 得证, 即 $f(x) > 2 \ln a + \frac{3}{2}$ 得证.

22.解: (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 同时也是最大值, 所以函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = -1$.

(2) $f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{(x-1)(ax-1)}{x^2}$, ①当 $a = 0$ 时, 由 (1) 可知, 函数 $f(x)$ 无零点;

②当 $a < 0$ 时, 易知函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

③关于 x 的方程 $ae^{2x} + ce^x - b = 0$ 有两不等实根 x_1, x_2 , 令 $t = e^x, t > 0$, 则关于 t 的方程 $at^2 + ct - b = 0$ 有两个不

等正实根 t_1, t_2 , 其中 $t_1 = e^{x_1}, t_2 = e^{x_2}$, 则 $t_1 t_2 = -\frac{c}{a} > 0, t_1 t_2 = -\frac{b}{a} > 0$,

故 $\begin{cases} bc > 0, \\ ab < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc > 0, \\ ab + ac < 0, \end{cases}$ 故选 ACD.

12.AC 提示: $f'(x) = e^x(x^2 - x - 1) + e^x(2x - 1) = e^x \cdot (x^2 + x - 2) = e^x(x+2)(x-1)$, 所以在 $(-\infty, -2), (1, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, 在 $(-2, 1)$ 上, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 极大值为 $f(-2) = e^{-2} \cdot (-2)^2 - (-2) - 1 = 5e^{-2}$, $f(x)$ 极小值为 $f(1) = e(1-1-1) = -e$, 故 A 正确; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 有两个零点, 故 B 不正确; $f(-2) = 5e^{-2}, f(2) = e^2(4-2-1) = e^2$, 所以 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 e^2 , 故 C 正确; 由上可知, $f(x)$ 的图象如图所示.