

高二选择性必修(第二册)答案页第3期

数学
北师大扫码免费下载
习题讲解 ppt

第9期

第2-3版综合测试(一)参考答案

一、单项选择题

1.A 提示:设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,因为 $a_1+a_5=2a_3=20$,所以 $a_3=10$.又 $a_3=12$,所以 $d=2$,所以 $a_5=a_3+3d=12+6=18$,故选A.

2.D 提示:因为 $f(x)=e^x+x^2-2x$,所以 $f'(x)=e^x+2x-2$,所以 $f'(0)=e^0+2\times 0-2=-1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率 $k=-1$,其倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$.故选D.

3.C 提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,则 $d\neq 0$,因为 $S_{15}=3(a_2+3a_5+a_8)$,

所以 $15a_1+\frac{15\times 14}{2}d=3[a_1+d+3a_1+24d+a_1+(k-1)d]$,

即 $15a_1+105d=15a_1+3(k+24)d$,

所以 $3(k+24)=105$,解得 $k=11$.故选C.

4.D 提示: $f'(x)=e^x-1$,令 $f'(x)>0$,得 $x>0$;令 $f'(x)<0$,得 $x<0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递减,在 $(0, 1)$ 内单调递增,又 $f(-1)=e^{-1}+1$, $f(1)=e-1$, $f(-1)-f(1)=\frac{1}{e}+2-e<\frac{1}{2}+2-e<0$,所以 $f(1)>f(-1)$.故所求的最大值为 $e-1$.故选D.

5.C 提示:由 $a_n=\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,得 $S_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{n}{n+1}=\frac{2023}{2024}$,则 $n=2023$.故选C.

6.D 提示:设大夫、不更、簪裹、上造、公士所出的钱数依次排成一列,构成等差数列 $\{a_n\}$.

设公差为 $d(d>0)$,前 n 项和为 S_n .由题意知, $a_2=16$, $S_5=100$,则 $S_5-5a_2=100$,解得 $a_2=20$,所以 $d=a_2-a_1=4$,所以公士出的钱数为 $a_5=a_2+3d=20+3\times 4=28$.故选D.

7.C 提示:由题意知, $f(1)=10$,且 $f'(1)=0$,又 $f'(x)=3x^2+2ax+b$,

所以 $\begin{cases} 1+a+b=10, \\ 3+2a+b=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-3, \\ b=4. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=4, \\ b=-3. \end{cases}$

而当 $a=-3, b=3$ 时, $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0$,函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无极值,故舍去.

所以 $f(x)=x^3+4x^2-11x+16$,所以 $f(2)=18$.故选C.

8.D 提示:设 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$,则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,因为当 $x>0$ 时, $xf'(x)-f(x)<0$,所以 $g'(x)<0$,所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.由 $f(x)$ 为奇函数,知 $g(x)$ 为偶函数,则 $g(-3)=g(3)$,又 $a=g(e), b=g(\ln 2), c=g(-3)=g(3)$,所以 $g(3)<g(e)<g(\ln 2)$,即 $\frac{f(-3)}{-3}<\frac{f(e)}{e}<\frac{f(\ln 2)}{\ln 2}$,故 $c<a<b$.故选D.

二、多项选择题

9.ABD 提示:由 $S_5=S_6+a_6>S_5$,得 $a_6>0$.由 $S_5=S_6+a_6=S_6$,得 $a_6=0$,故B正确; $d=a_6-a_5<0$,故A正确;由 $S_5=S_7+a_6<S_7$,得 $a_6<0$,则 $a_5<0$,又 $a_6+a_5=a_5+2a_5=0$,所以 $S_5>S_6$,故C错误;由 $a_7=0, a_6>0$,知 S_6, S_7 是 S_n 中的最大值,故D正确.故选ABD.

10. BC 提示:对于A,函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$ 的定义域为 \mathbf{R} ,又 $f(-x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2-x, -f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x$,则 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)$ 不是奇函数,故A错误;

对于B,C,因为 $f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$,所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,所以函数 $f(x)$ 不存在极值点,故B,C正确;

对于D,因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,且 $f(0)=0$,所以 $f(x)$ 仅有唯一零点0,故D错误.故选BC.

11. AB 提示:因为 $a_n-3a_{n+1}=2a_{a_{n+1}}$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}}+1=3(\frac{1}{a_n}+1)$,又 $\frac{1}{a_n}+1=2$,所以 $\{\frac{1}{a_n}+1\}$ 是以2为首项,3为公比的等比数列,故 $\frac{1}{a_n}+1=2\times 3^{n-1}$,即 $a_n=\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}$,所以 $\{a_n\}$ 为递减数列, $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和 $T_n=(2\times 3^0-1)+(2\times 3^1-1)+\cdots+(2\times 3^{n-1}-1)=2(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-n=3^n-n-1$.故选AB.

12. AB 提示:对于A,B,因为 $\log_a a>\log_a b$,所以 $a>b>0$,所以 $2>2^2, a^2>b^2$,故A,B正确;

对于C,令 $f(x)=\frac{1}{x}+x, x>0, f'(x)=-\frac{1}{x^2}+1=\frac{x^2-1}{x^2}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-1$ (舍去),在 $(0, 1)$ 内 $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减,在 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增,

当 $a>b>1$ 时, $f(a)>f(b)$,即 $\frac{1}{a}+a>\frac{1}{b}+b$,当 $1>a>b>0$ 时, $f(a)<f(b)$,即 $\frac{1}{a}+a<\frac{1}{b}+b$,当 $a>1>b>0$ 时, $f(a)$ 与 $f(b)$ 大小无法确定,故C错误;

对于D,令 $g(x)=\frac{1}{x^2}+x, x>0, g'(x)=-\frac{2}{x^3}+1=\frac{x^3-2}{x^3}$,令 $g'(x)=0$,得 $x=\sqrt[3]{2}$ 或 $x=-\sqrt[3]{2}$ (舍去),在 $(0, \sqrt[3]{2})$ 内 $g'(x)<0, g(x)$ 单调递减,在 $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ 上 $g'(x)>0, g(x)$ 单调递增,故 $g(\sqrt[3]{2})$ 是 $g(x)$ 的最小值,即 $\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$,所以 $\frac{1}{x^2}+x\geq \sqrt[3]{2}$,故D正确.故选ABD.

13. 12. BC 提示:设 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的值为 $A, g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的值为 B ,则 $A\subseteq B$.

$g'(x)=(x+2)e^x$,当 $x\in[-1, 1]$ 时, $g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,所以 $B=[0, 2e]$.若 $A\subseteq B$,则 $f(x)_{\min}\geq 0$,令 $x(\ln x-a)\geq 0$ 对 $\forall x\in[1, e]$ 恒成立,则 $a\leq \ln x$ 恒成立,即 $a\leq (\ln x)_{\min}=0$;当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)=\ln x-a+1>0$ 在 $[1, e]$ 上恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(e)=e-(1-a)\leq 2e$,解得 $a\geq -1$.

综上, $-1\leq a\leq 0$.故选BC.

三、填空题

13. $\frac{1}{4}$ 提示: $y=\ln x+\frac{1}{x}$,则 $y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$,故 $y'|_{x=2}=\frac{1}{4}$,故该切线的斜率为 $\frac{1}{4}$,即 $\tan\alpha=\frac{1}{4}$.

14. $\frac{23}{35}$ 提示:因为 $\{a_n\}$ 是等差数列,所以 $A_{11}=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})=11a_6$,则 $a_6=\frac{1}{11}A_{11}$.

同理, $b_6=\frac{1}{11}B_{11}$,所以 $\frac{a_6}{b_6}=\frac{\frac{1}{11}A_{11}}{\frac{1}{11}B_{11}}=\frac{A_{11}}{B_{11}}=\frac{2\times 11+1}{3\times 11+2}=\frac{23}{35}$.

15. 0 提示:由 $a_1=1, a_{n+1}-a_n=\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$,可得 $a_2=a_1+\sin\pi=1, a_3=a_2+\sin\frac{3\pi}{2}=1-1=0, a_4=a_3+\sin 2\pi=0, a_5=a_4+\sin\frac{5\pi}{2}=0+1=1, \cdots$,所以数列 $\{a_n\}$ 的最小正周期为4,所以 $a_{2024}=a_4=0$.

16. $b>a>c$ 提示:对于 $g(x)=e^x\cdot x, g'(x)=e^x\cdot 1$,由“躺平点”定义可知 $g'(a)=g'(a)$,即可得 $e^a\cdot a=e^a\cdot 1$,解得 $a=1$.

对于 $h(x)=\ln x$,易知 $h'(x)=\frac{1}{x}$,所以 $h(b)=h'(b)$,即 $\ln b=\frac{1}{b}$,令 $f(b)=\ln b-\frac{1}{b}, b\in(0, +\infty)$,显然 $f(b)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,易知 $f(1)=\ln 1-1=-1<0, f(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}>0$,所以可得 $b\in(1, e)$,因此 $b>a$.

对于 $\varphi(x)=1024x+1024, \varphi'(x)=1024$,所以 $\varphi(c)=1024c+1024=\varphi'(c)=1024$,解得 $c=0$.

综上, $b>a>c$.

四、解答题

17. 解:(1)因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2+2n$,所以 $a_1=S_1=1+2=3$,当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-(n-1)^2+2-(n-1)=2n$,对于 $n=1$,也成立.

综上,可得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1+2n$.

(2)设 $b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2n+1}$,则 $b_1=\frac{1}{3}, b_2=\frac{1}{5}, b_3=\frac{1}{7}$,因为

(2)证明: $f'(x)=e^x(x^2+x-1)$,令 $f'(x_0)=0$,解得 $x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (负值舍去),所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0, 1)$ 上单调递增,由(1)知, $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=e x-e$,所以在 $x\in(0, 1)$ 时, $f(x)$ 的图象恒在切线 $y=e x-e$ 上方,即 $f(x_2)>e(x_2-1)\Rightarrow b>e(x_2-1)\Rightarrow \frac{b}{e}+1>x_2$,

要证 $x_2-x_1<(\frac{1}{e}+1)b+1$,即证 $x_2-x_1<\frac{b}{e}+b+1$,因为 $x_2<\frac{b}{e}+1$,所以只要证明 $-x_1<b$,因为 $b=f(x_1)$,所以只要证明 $f(x_1)+x_1>0$ 即可,

因为 $x_1\in(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$,所以只需证 $(x_1-1)e^x+1>0$.

设 $h(x)=(x-1)e^x+1, x\in(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $h'(x)=xe^x$,当 $x\in(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 时, $h'(x)>0, h(x)$ 单调递增,所以 $h(x)>h(0)=0$,得证,所以可以证明 $x_2-x_1<(\frac{1}{e}+1)b+1$.

3. $\frac{1}{a_n}+1$,又 $\frac{1}{a_n}+1=2$,所以 $\{\frac{1}{a_n}+1\}$ 是以2为首项,3为公比的等比数列,故 $\frac{1}{a_n}+1=2\times 3^{n-1}$,即 $a_n=\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}$,所以 $\{a_n\}$ 为递减数列, $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和 $T_n=(2\times 3^0-1)+(2\times 3^1-1)+\cdots+(2\times 3^{n-1}-1)=2(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-n=3^n-n-1$.故选AB.

12. AB 提示:对于A,B,因为 $\log_a a>\log_a b$,所以 $a>b>0$,所以 $2>2^2, a^2>b^2$,故A,B正确;

对于C,令 $f(x)=\frac{1}{x}+x, x>0, f'(x)=-\frac{1}{x^2}+1=\frac{x^2-1}{x^2}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-1$ (舍去),在 $(0, 1)$ 内 $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减,在 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增,

当 $a>b>1$ 时, $f(a)>f(b)$,即 $\frac{1}{a}+a>\frac{1}{b}+b$,当 $1>a>b>0$ 时, $f(a)<f(b)$,即 $\frac{1}{a}+a<\frac{1}{b}+b$,当 $a>1>b>0$ 时, $f(a)$ 与 $f(b)$ 大小无法确定,故C错误;

对于D,令 $g(x)=\frac{1}{x^2}+x, x>0, g'(x)=-\frac{2}{x^3}+1=\frac{x^3-2}{x^3}$,令 $g'(x)=0$,得 $x=\sqrt[3]{2}$ 或 $x=-\sqrt[3]{2}$ (舍去),在 $(0, \sqrt[3]{2})$ 内 $g'(x)<0, g(x)$ 单调递减,在 $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ 上 $g'(x)>0, g(x)$ 单调递增,故 $g(\sqrt[3]{2})$ 是 $g(x)$ 的最小值,即 $\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$,所以 $\frac{1}{x^2}+x\geq \sqrt[3]{2}$,故D正确.故选ABD.

13. 12. BC 提示:设 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的值为 $A, g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的值为 B ,则 $A\subseteq B$.

$g'(x)=(x+2)e^x$,当 $x\in[-1, 1]$ 时, $g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,所以 $B=[0, 2e]$.若 $A\subseteq B$,则 $f(x)_{\min}\geq 0$,令 $x(\ln x-a)\geq 0$ 对 $\forall x\in[1, e]$ 恒成立,则 $a\leq \ln x$ 恒成立,即 $a\leq (\ln x)_{\min}=0$;当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)=\ln x-a+1>0$ 在 $[1, e]$ 上恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(e)=e-(1-a)\leq 2e$,解得 $a\geq -1$.

综上, $-1\leq a\leq 0$.故选BC.

三、填空题

13. $\frac{1}{4}$ 提示: $y=\ln x+\frac{1}{x}$,则 $y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$,故 $y'|_{x=2}=\frac{1}{4}$,故该切线的斜率为 $\frac{1}{4}$,即 $\tan\alpha=\frac{1}{4}$.

14. $\frac{23}{35}$ 提示:因为 $\{a_n\}$ 是等差数列,所以 $A_{11}=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})=11a_6$,则 $a_6=\frac{1}{11}A_{11}$.

同理, $b_6=\frac{1}{11}B_{11}$,所以 $\frac{a_6}{b_6}=\frac{\frac{1}{11}A_{11}}{\frac{1}{11}B_{11}}=\frac{A_{11}}{B_{11}}=\frac{2\times 11+1}{3\times 11+2}=\frac{23}{35}$.

15. 0 提示:由 $a_1=1, a_{n+1}-a_n=\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$,可得 $a_2=a_1+\sin\pi=1, a_3=a_2+\sin\frac{3\pi}{2}=1-1=0, a_4=a_3+\sin 2\pi=0, a_5=a_4+\sin\frac{5\pi}{2}=0+1=1, \cdots$,所以数列 $\{a_n\}$ 的最小正周期为4,所以 $a_{2024}=a_4=0$.

16. $b>a>c$ 提示:对于 $g(x)=e^x\cdot x, g'(x)=e^x\cdot 1$,由“躺平点”定义可知 $g'(a)=g'(a)$,即可得 $e^a\cdot a=e^a\cdot 1$,解得 $a=1$.

对于 $h(x)=\ln x$,易知 $h'(x)=\frac{1}{x}$,所以 $h(b)=h'(b)$,即 $\ln b=\frac{1}{b}$,令 $f(b)=\ln b-\frac{1}{b}, b\in(0, +\infty)$,显然 $f(b)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,易知 $f(1)=\ln 1-1=-1<0, f(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}>0$,所以可得 $b\in(1, e)$,因此 $b>a$.

对于 $\varphi(x)=1024x+1024, \varphi'(x)=1024$,所以 $\varphi(c)=1024c+1024=\varphi'(c)=1024$,解得 $c=0$.

综上, $b>a>c$.

四、解答题

17. 解:(1)因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2+2n$,所以 $a_1=S_1=1+2=3$,当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-(n-1)^2+2-(n-1)=2n$,对于 $n=1$,也成立.

综上,可得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1+2n$.

(2)设 $b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2n+1}$,则 $b_1=\frac{1}{3}, b_2=\frac{1}{5}, b_3=\frac{1}{7}$,因为

(2)证明: $f'(x)=e^x(x^2+x-1)$,令 $f'(x_0)=0$,解得 $x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (负值舍去),所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0, 1)$ 上单调递增,由(1)知, $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=e x-e$,所以在 $x\in(0, 1)$ 时, $f(x)$ 的图象恒在切线 $y=e x-e$ 上方,即 $f(x_2)>e(x_2-1)\Rightarrow b>e(x_2-1)\Rightarrow \frac{b}{e}+1>x_2$,

要证 $x_2-x_1<(\frac{1}{e}+1)b+1$,即证 $x_2-x_1<\frac{b}{e}+b+1$,因为 $x_2<\frac{b}{e}+1$,所以只要证明 $-x_1<b$,因为 $b=f(x_1)$,所以只要证明 $f(x_1)+x_1>0$ 即可,

因为 $x_1\in(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$,所以只需证 $(x_1-1)e^x+1>0$.

设 $h(x)=(x-1)e^x+1, x\in(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $h'(x)=xe^x$,当 $x\in(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 时, $h'(x)>0, h(x)$ 单调递增,所以 $h(x)>h(0)=0$,得证,所以可以证明 $x_2-x_1<(\frac{1}{e}+1)b+1$.

3. $\frac{1}{a_n}+1$,又 $\frac{1}{a_n}+1=2$,所以 $\{\frac{1}{a_n}+1\}$ 是以2为首项,3为公比的等比数列,故 $\frac{1}{a_n}+1=2\times 3^{n-1}$,即 $a_n=\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}$,所以 $\{a_n\}$ 为递减数列, $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和 $T_n=(2\times 3^0-1)+(2\times 3^1-1)+\cdots+(2\times 3^{n-1}-1)=2(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-n=3^n-n-1$.故选AB.

12. AB 提示:对于A,B,因为 $\log_a a>\log_a b$,所以 $a>b>0$,所以 $2>2^2, a^2>b^2$,故A,B正确;

对于C,令 $f(x)=\frac{1}{x}+x, x>0, f'(x)=-\frac{1}{x^2}+1=\frac{x^2-1}{x^2}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-1$ (舍去),在 $(0, 1)$ 内 $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减,在 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增,

当 $a>b>1$ 时, $f(a)>f(b)$,即 $\frac{1}{a}+a>\frac{1}{b}+b$,当 $1>a>b>0$ 时, $f(a)<f(b)$,即 $\frac{1}{a}+a<\frac{1}{b}+b$,当 $a>1>b>0$ 时, $f(a)$ 与 $f(b)$ 大小无法确定,故C错误;

对于D,令 $g(x)=\frac{1}{x^2}+x, x>0, g'(x)=-\frac{2}{x^3}+1=\frac{x^3-2}{x^3}$,令 $g'(x)=0$,得 $x=\sqrt[3]{2}$ 或 $x=-\sqrt[3]{2}$ (舍去),在 $(0, \sqrt[3]{2})$ 内 $g'(x)<0, g(x)$ 单调递减,在 $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ 上 $g'(x)>0, g(x)$ 单调递增,故 $g(\sqrt[3]{2})$ 是 $g(x)$ 的最小值,即 $\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$,所以 $\frac{1}{x^2}+x\geq \sqrt[3]{2}$,故D正确.故选ABD.

13. 12. BC 提示:设 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的值为 $A, g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的值为 B ,则 $A\subseteq B$.

$g'(x)=(x+2)e^x$,当 $x\in[-1, 1]$ 时, $g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,所以 $B=[0, 2e]$.若 $A\subseteq B$,则 $f(x)_{\min}\geq 0$,令 $x(\ln x-a)\geq 0$ 对 $\forall x\in[1, e]$ 恒成立,则 $a\leq \ln x$ 恒成立,即 $a\leq (\ln x)_{\min}=0$;当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)=\ln x-a+1>0$ 在 $[1, e]$ 上恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(e)=e-(1-a)\leq 2e$,解得 $a\geq -1$.

综上, $-1\leq a\leq 0$.故选BC.

三、填空题

13. $\frac{1}{4}$ 提示: $y=\ln x+\frac{1}{x}$,则 $y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$,故 $y'|_{x=2}=\frac{1}{4}$,故该切线的斜率为 $\frac{1}{4}$,即 $\tan\alpha=\frac{1}{4}$.

14. $\frac{23}{35}$ 提示:

③					
	x	(-∞,-1)	-1	(-1,1)	1
	f'(x)	-	0	+	0
	f(x)	↘	极小值	↗	极大值

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=-1$, $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=3$,故选D.

3.C 提示:因为 $a_{n+1}=a_n+n+1$,所以 $a_{n+1}-a_n=n+1$,所以 $a_2-a_1=2,a_3-a_2=3,\cdots,a_n-a_{n-1}=n$,累加可得, $a_n-a_1=2+3+\cdots+n$,又 $a_1=1$,所以 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,所以 $a_{10}=\frac{10\times11}{2}=55$,故选C.

4.B 提示:因为 $y'=4x^3-3$,所以 $y'|_{x=1}$ 设切线的倾斜角为 α ,则 $\tan\alpha=1$,因为 $\alpha\in(0,\pi)$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

故选B.

5.A 提示:充分性:当-1,a,b,2为等比数列时,可得 $ab=-1\times2=-2$,故充分性成立.

必要性:当 $ab=-2$ 时,不妨设 $a=1,b=-2$,此时-1,a,b,2为-1,1,-2,2,不是等比数列,故必要性不成立.所以“-1,a,b,2为等比数列”是“ $ab=-2$ ”的充分而不必要条件,故选A.

6.B 提示:设数列的首项为a,公比为q,共n项,则前三项分别为 a_1,a_1q,a_1q^2 ,后三项分别为 $a_1q^{n-3},a_1q^{n-2},a_1q^{n-1}$.

由题意得 $a_1q^3=2,a_1q^{3n-6}=4$,两式相乘得 $a_1^2q^{3(n-1)}=8$,即 $a_1^2q^{n-1}=2$.

又因为 $a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2\cdots\cdot a_1q^{n-1}=64$,所以 $a_1^na_1q^{\frac{n(n-1)}{2}}=64$,即 $(a_1^2q^{n-1})=64^{\frac{1}{n}}$,解得 $n=12$,故选B.

7.B 提示:根据等差数列的性质和前n项和公式,

有 $\frac{a_5}{b_5}=\frac{2a_5}{2b_5}=\frac{2}{\frac{9(b_1+b_9)}{2}}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{3\times9+2}{9+1}=\frac{29}{10}$,故选B.

8.C 提示:∵ $f'(x)=3ax^2+4x+a$,因为 $f(x)=ax^3+2x^2+ax+1$ 在 $(-1,+\infty)$ 上存在极大值 $f(x_1)$ 和极小值 $f(x_2)$,且 $x_1<x_2$,所以 $f'(x)=3ax^2+4x+a=0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有两个根 x_1,x_2 , $x_1<x_2$,且在 $(-1,x_1)$ 内 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,在 (x_1,x_2) 内 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,在 $(x_2,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $\begin{cases} \Delta=4^2-4\times3a\times a=16-12a^2>0,\\ f'(-\frac{2}{3a})=3a(-\frac{2}{3a})^2+4\times(-\frac{2}{3a})+a<0,\\ f'(-1)=3ax(-1)^2+4\times(-1)+a>0,\\ -\frac{2}{3a}>-1, \end{cases}$

解得 $1< a<\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以a的取值范围为 $(1,\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

故选C.

二、多项选择题

9.AB 提示:由 $f'(x)$ 图象可得,当 $x<-2$ 时, $f'(x)<0$;当 $-2<x<-\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)>0$;当 $-\frac{1}{2}<x<2$ 时, $f'(x)<0$;当 $x>2$ 时, $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(\frac{1}{2},2)$ 上单调递减,

在 $(-2,-\frac{1}{2})$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 和 $x=2$ 处取得极小值,在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极大值,故选AB.

10.ABD 提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为d,由 $a_k=a_k+3d=8$,可得 $\begin{cases} d=-2\\ a_1+11d=-8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} d=-2\\ a_1=14, \end{cases}$ 所以 $a_k=a_1+7d=14-7\times2=0$,故A,B正确; $S_{15}=15\times14+\frac{15\times14}{2}\times(-2)=0$,故C正确;

错误; $\frac{S_7}{7}=\frac{7\times14+\frac{7\times6}{2}\times(-2)}{7}=-8,\frac{S_8}{8}=\frac{8\times14+\frac{8\times7}{2}\times(-2)}{8}=7$,

所以 $\frac{S_7}{7}>\frac{S_8}{8}$,故D正确,故选ABD.

11.AC 提示:设数列 $\{a_n\}$ 的公比为q,对于A,因为 $a_3=a_1q^2>0$,则 $a_1>0$,所以 $a_{2023}=a_1q^{2022}>0$,故A正确;

对于C,当 $q=1$ 时, $S_{2023}=2023a_1>0$,当 $q>1$ 时,则 $q^2>1$,所以 $S_{2023}=\frac{a_1(q^{2023}-1)}{q-1}>0$,

当 $0<q<1$ 时,则 $0<q^2<1$,所以 $S_{2023}=\frac{a_1(q^{2023}-1)}{q-1}>0$,

当 $q<0$ 时, $q^{2023}<0$,所以 $S_{2023}=\frac{a_1(q^{2023}-1)}{q-1}>0$,故C正确;

对于B, $a_1=a_1q^2>0$,则 a_1 和 q 同号,当 $a_1<0,q<0$ 时,则 $a_{2023}=a_1q^{2022}<0$,当 $a_1>0,q>0$ 时,则 $a_{2023}=a_1q^{2022}>0$,故B错误;

对于D, $a_2=a_1q^2>0$,则 a_1 和 $1q$ 同号,当 $a_1<0,q<0$ 时, $q-1<0,q^{2023}<0$,则 $S_{2023}=\frac{a_1(q^{2023}-1)}{q-1}<0$,故D错误,故选AC.

12.BCD 提示:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,设 $F(x)=f(x)-\ln x$,则 $F'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}$,

因为 $f'(x)<\frac{1}{x}$,所以 $F'(x)<0$,所以函数 $F(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数,因为 $f(1)=1$,所以 $F(1)=f(1)-\ln1=1$.对于A, $F(1)>F(e)=f(e)-1$,可得 $f(e)<2$,所以A错误;

对于B, $F(\frac{1}{e})=f(\frac{1}{e})+1>F(1)$,所以 $f(\frac{1}{e})>0$,故B正确;

对于C,当 $x\in(1,e)$ 时, $F(x)<F(1)$,则 $f(x)-\ln x<1$,所以 $f(x)<\ln x+1$,因为 $x\in(1,e)$,所以 $\ln x\in(0,1)$,所以 $\ln x+1\in(1,2)$,所以 $f(x)<2$,故C正确;

对于D, $\forall x\in(\frac{1}{e},1)$, $\ln x\in(-1,0)$,可知 $x<\frac{1}{x}$,

所以 $F(x)>F(\frac{1}{x})$, $f(x)-\ln x>f(\frac{1}{x})-\ln\frac{1}{x}$,所以 $f(x)-f(\frac{1}{x})+2>2\ln x+2>0$,故D正确,故选BCD.

三、填空题

13.92 提示:根据题意,记第n个图形的点数为 a_n ,则 $a_1=1,a_2-a_1=2\times3-2,a_3-a_2=3\times3-2,a_4-a_3=4\times3-2,\cdots,a_9-a_8=8\times3-2$,累加得 $a_9=1+3\times(2+3+\cdots+8)-2\times7=92$.

14.30;23 000 提示:由题意知,利润等于销售额减去成本,

即 $L(M)=MN-20N=(8300-170M-M^2)(M-20)=-M^3-150M^2+11700M-166000$.

所以 $L'(M)=-3M^2-300M+11700$.令 $L'(M)=0$,解得 $M=30$ 或 $M=-130$ (舍去).此时, $L(30)=23000$.

因为当 $0<M<30$ 时, $L'(M)>0$.当 $M>30$ 时, $L'(M)<0$,所以 $L(30)$ 是极大值,也是最大值,最大值为23 000.故该批材料零售价定为30元时,利润最大为23 000元.

15.- $\frac{1}{2}$ 提示:由 $f(x)=aln x+\frac{b}{x}$,可得 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$, $f(1)=b=-2$,

又因为 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点,所以 $f'(1)=a-b=0$,所以 $a=b=-2$,所以 $f'(x)=\frac{-2}{x}-\frac{-2}{x^2}=-\frac{1}{2}$.16. $(-\infty,3]$ 提示:因为 $f(x)=(x-b)\ln x+x^2$ 在区间 $[1,e]$ 上单调递增,所以 $f'(x)=\ln x+\frac{x-b}{x}+2x=\ln x-\frac{b}{x}+1+2x\geq0$ 在 $[1,e]$ 上恒成立.

若 $b\leq0$,因为 $x\in[1,e]$,则 $\ln x>0,2x>0,-\frac{b}{x}>0$,所以 $f'(x)\geq0$ 恒成立,符合题意;

若 $b>0$,设 $g(x)=\ln x-\frac{b}{x}+1+2x,x\in[1,e]$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{b}{x^2}+2>0$,所以 $g(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增,即 $f'(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增,要使得 $f'(x)\geq0$,只需 $f'(1)\geq0$,所以 $-b+1+2\geq0$,所以 $0<b\leq3$.

综上所述,实数b的取值范围为 $(-\infty,3]$.

四、解答题

17.解:(1)由 $y=x^3+x-2$,得 $y'=3x^2+1$.令 $3x^2+1=4$,解得 $x=\pm1$.当 $x=1$ 时, $y=0$;当 $x=-1$ 时, $y=-4$.又点 P_0 在第三象限,所以切点 P_0 的坐标为 $(-1,-4)$.

(2)因为直线 $l\perp l_1$, l 的斜率为4,所以直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{4}$.因为直线 l 过切点 P_0 ,点 P_0 的坐标为 $(-1,-4)$,所以直线 l 的方程为 $y+4=-\frac{1}{4}(x+1)$,即 $x+4y+17=0$.18.解:(1)由已知 $b_1=1,b_3=a_1b_2+b_1=b_2$,得 $a_1=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 是以2为首项,3为公差的等差数列,所以 $a_n=2+3(n-1)=3n-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)知, $(3n-1)b_n+b_1=nb_{n+1}$,即 $b_{n+1}=3b_n$,所以数列 $\{b_n\}$ 是以1为首项,3为公比的等比数列,

记 $\{b_n\}$ 的前n项和为 S_n ,则 $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{1-3}=\frac{3^{n+1}-1}{2}$.19.(1)证明:∵ $f(x)=e^x+\sin x-ax-1(a\in\mathbf{R})$,函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,可得 $f'(x)=e^x+\cos x-a$,若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,此时 $f'(0)=2-a=0$,解得 $a=2$.

当 $a=2$ 时,不妨设 $g(x)=e^x+\cos x-2(x>0)$,可得 $g'(x)=e^x-\sin x$,易知当 $x>0$ 时, $g'(x)>1-\sin x\geq0$,所以函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,此时 $f'(x)>f'(0)=0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;当 $x<0$ 时, $f'(x)=e^x+\cos x-2<\cos x-1\leq0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,故 $f(x)\geq f(0)=0$.

(2)解:易知 $f(0)=0$,若 $f(x)\geq0$,即 $f(x)\geq f(0)$ 恒成立,所以 0 为 $f(x)$ 的一个极小值点,也是最小值点,可得 $f'(0)=2-a=0$,解得 $a=2$.经验验,当 $a=2$ 时,由(1)知 $f(x)\geq0$ 成立,故 $a=2$.

20.(1)证明:显然 $a_n\neq0$,将 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$ 两边同时取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2$,

即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$,所以数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是公差为2的等差数列,所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-3)\times2=2n$,所以 $a_n=\frac{1}{2n}$.

(2)解:选①.

由已知得 $b_n=\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$,那么数列 $\{b_n\}$ 的前n项和 $T_n=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+$

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{n}{4n+4}$.

由已知得 $b_n=(-1)^{n+1}2^n$.

那么数列 $\{b_n\}$ 的前n项和 $T_n=-2+4-6+8-\cdots+(-1)^n2n$,

当n为偶数时, $T_n=2\times\frac{n}{2}=n$;

当n为奇数时, $T_n=-2+(-2)\times\frac{n-1}{2}=-n-1$.

故 $T_n=\begin{cases} n,n=2k,\\ -n-1,n=2k-1 \end{cases}(k\in\mathbf{N}_+)$,选③.

由已知得 $b_n=2n+(\frac{1}{3})^{2n}=2n+(\frac{1}{9})^n$,

那么数列 $\{b_n\}$ 的前n项和 $T_n=(2+4+\cdots+2n)+[\frac{1}{9}+(\frac{1}{9})^2+\cdots+(\frac{1}{9})^n]$
$$=\frac{(2+2n)n}{2}+\frac{1}{9}(1-\frac{1}{9^n})=n^2+n+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{9^n}).$$

21.解:(1)由题意,设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为d,等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为q,则 $q>0$.因为 $b_1=2$,故 $b_2+b_3=2q+2q^2=12$,解得 $q=2$,或 $q=-3$ (舍去),则 $b_3=b_1q^2=2\times2^2=8$, $b_4=b_1q^3=2\times2^3=16$.

由题意得 $\begin{cases} a_1+3d-2a_1=8,\\ 11a_1+\frac{11\times10}{2}d=11\times16, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=1,\\ d=3, \end{cases}$

所以 $a_n=1+3(n-1)=3n-2$, $b_n=2\times2^{n-1}=2^n$.

(2)由(1)得 $a_n=3n-2$, $b_n=2^n$,则 $a_n\cdot b_n=(3n-2)\cdot2^n$,设 $\{a_nb_n\}$ 的前n项和为 T_n ,

则 $T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\times2+4\times2^2+\cdots+(3n-2)\cdot2^n$.① $2T_n=1\times2^2+4\times2^3+\cdots+(3n-5)\cdot2^n+(3n-2)\cdot2^{n+1}$,②

由①-②得 $-T_n=1\times2+3\times2^2+3\times2^3+\cdots+3\cdot2^n-(3n-2)\cdot2^{n+1}$
$$=2+12\times(1+2+\cdots+2^{n-2})-(3n-2)\cdot2^{n+1}$$
$$=2+12\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-(3n-2)\cdot2^{n+1}=(5-3n)\cdot2^{n+1}-10,$$

所以 $T_n=10+(3n-5)\cdot2^{n+1}$.

22.(1)解:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=1-\frac{m}{x}$,

当 $m\leq0$ 时, $f'(x)>0$ 恒成立,此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $m>0$ 时,由 $f'(x)=1-\frac{m}{x}>0$,解得 $x>m$,由 $f'(x)<0$,解得 $0<x<m$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 内单调递减,在 $(m,+\infty)$ 上单调递增.

综上,当 $m\leq0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;当 $m>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 内单调递减,在 $(m,+\infty)$ 上单调递增.

(2)证明:由(1)可知,当 $m\leq0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 无最小值;

当 $m>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 内单调递减,在 $(m,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(m)=-m\ln m$,即 $g(m)=-m\ln m$,则 $g'(m)=-1-\ln m$,

由 $g'(m)>0$,得 $0<m<\frac{1}{e}$,由 $g'(m)<0$,得 $m>\frac{1}{e}$,

所以 $g(m)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 内单调递增,在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(m)\leq g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$,即 $g(m)\leq\frac{1}{e}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

第 11 期

第 2-3 版综合测试(三)参考答案

一、单项选择题

1.C 提示:因为 $S_3=15,a_5=5$,所以 $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=15,\\ a_1q^4=5, \end{cases}$

解得 $q=1$ 或 $-\frac{1}{2}$,故选C.

2.C 提示:直线 $x+2y+1=0$ 的斜率为 $k=-\frac{1}{2}$.由题设知, $y=e^{2m}$ 在 $(0,1)$ 处的切线的斜率为2,而 $y'=2a\cdot e^{2m}$,所以 $y'|_{x=0}=2a=2$,解得 $a=1$,故选C.

3.B 提示:在等差数列 $\{a_n\}$ 中,由 $a_3=2,a_{11}=6$,得 $d=\frac{a_{11}-a_3}{11-3}=\frac{6-2}{8}=\frac{1}{2}$,则 $a_1=a_3-2d=2-2\times\frac{1}{2}=1$,所以 $S_{10}=13a_1+\frac{13\times12}{2}\times d=13\times1+\frac{13\times12}{2}\times\frac{1}{2}=52$,故选B.

4.A 提示:由 $1+(\frac{a'}{a})^n=a^n\ln a$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\sin\frac{\pi}{8})' =0$, $(x^3)'=5x^4$,故选A.

5.B 提示:数列 $\{a_n\}$ 是递增数列 $\Rightarrow a_1<a_3<a_5$,反之不成立,例如 $a_n=(-1)^{n+1}2^n$, $a_1=2,a_3=8,a_5=32$.

虽然 $a_1<a_3<a_5$,但是该数列显然不是递增数列,所以“ $a_1<a_3<a_5$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的必要不充分条件,故选B.

6.B 提示:由 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\ln n+\gamma$,取 $n=5$,则 $\ln 5\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=(-0.577\,215\,664\,901\cdots)\approx1.706$,

而 $\ln 5=\ln 10-\ln 2\approx2.303-0.693=1.610$,所以用上式估算出的 $\ln 5$ 与实际的 $\ln 5$ 的误差绝对值近似为 $1.706-1.610=0.096$,故选B.

7.C 提示:函数 $f(x)=2ax-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$, $f'(x)=2a-\frac{1}{x+1}$,

所以 $f'(0)=2a-1$.因为函数 $f(x)$ 的图象在原点处的切线方程为 $2x-y=0$,所以 $2a-1=2$,解得 $a=\frac{3}{2}$.所以 $f(x)=3x-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$,所以 $f'(x)=3-\frac{1}{x+1}$,所以 $f'(x)<0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立,所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)>f(1)=3-\ln 2>0$,故函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒大于0,故A正确;因为 $f'(x)=3-\frac{1}{x+1}$,所以 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故B错误;因为 $f'(x)=3-\frac{1}{x+1}$,所以 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故C正确;因为 $f'(x)=3-\frac{1}{x+1}$,所以 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故D错误.故选ACD.

数学
北师大

高二选择性必修(第二册)答案页第 3 期

切线方程为 $2x-y=0$,所以 $2a-1=2$,解得 $a=\frac{3}{2}$,

所以 $f(x)=3x-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$,所以 $f'(x)=3-\frac{1}{x+1}=\frac{3x+2}{x+1}$,所以 $x\in(-1,-\frac{2}{3})$ 时, $f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减; $x\in(-\frac{2}{3},+\infty)$ 时, $f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增.

所以 $x=-\frac{2}{3}$ 时,函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(-\frac{2}{3})=-2+\ln 3<0$.

又 $x\rightarrow-1$ 时, $f(x)\rightarrow+\infty$; $x\rightarrow+\infty$ 时, $f(x)\rightarrow+\infty$,所以函数 $f(x)$ 的零点个数为2,故选C.

8.C 提示:因为 $f(x)=-x^3-2x^2+4x$,所以 $f'(x)=-3x^2-4x+4$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{2}{3}$ 或 $x=-2$,因为该函数在闭区间 $[-3,3]$ 上连续可导,且极值点处的导数为零,所以最小值一定在端点处或极值点处取得,而 $f(-3)=-3\times(-2)^3-8\times(-2)+4=8$, $f(\frac{2}{3})=-\frac{40}{27}$, $f(3)=-33$,

所以该函数在 $[-3,3]$ 上的最小值为-33,因为当 $x\in[-3,3]$ 时,有 $f(x)\geq a$ 恒成立,只需 $a\leq f(x)_{\min}$,即 $a\leq-33$,故选C.