



扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 37 期

第 2~3 版专题检测

一、单项选择题

1.A 提示:由题意,得-1,2 是一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实数根,所以 $\begin{cases} -1+2=-a, \\ (-1)\times 2=b, \end{cases}$ 解得 $a=-1, b=-2$,所以 $a+b=-3$,故选 A.

2.C 提示:因为 $\{a_n\}$ 是等差数列,所以 $a_7+a_{17}=a_6+a_{16}=30$,则 $a_{10}=15$,所以 $a_9+a_{10}+a_{11}=3a_{10}=45$,故选 C.

3.B 提示:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,由 $\begin{cases} a_1+a_2=5, \\ a_1+a_2=40, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1+a_2q=5, \\ a_1q^2+a_2q^2=40, \end{cases}$ 两式相除,得 $q^2=8$,所以 $\frac{S_6}{S_3}=\frac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=9$,故选 B.

4.A 提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $a_2+a_3a_8=4a_1+22d=2(a_6+a_7)<0$.因为 $a_n\cdot a_7<0$,因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 有最大值,则 $a_n>0, d<0$,所以数列 $\{a_n\}$ 是递减的等差数列,所以 $a_6>0, a_7<0$,所以 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0$, $S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)<0$,所以 S_n 取得最小正值时的

n 为 11,故选 A.

5.B 提示:设第 n 年的维修保养费为 a_n 万元,数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,该机的年平均耗费为 p 万元,由题意,得数列 $\{a_n\}$ 是首项为 12,公差为 4 的等差数列,则 $p=\frac{S_n+98}{n}=\frac{1}{n}\left[12n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4+98\right]=2n+\frac{98}{n}+10\geq 2\sqrt{2n\cdot \frac{98}{n}}+10=38$,当且仅当 $2n=\frac{98}{n}$,即 $n=7$ 时, p 取得

最小值 38,所以这台收割机的使用年限是 7 年,故选 B.

6.A 提示:函数 $y=\log_a(x-2)+1(a>0, \text{且 } a\neq 1)$,令 $x-2=1$,得 $x=3$,此时 $y=\log_a 1+1=1$,所以点 $A(3, 1)$,即 $x_0=3, y_0=1$,所以 $3m+n=1$,又 $m>0, n>0$,所以 $\frac{3}{m}+\frac{1}{n}=(3m+n)\left(\frac{3}{m}+\frac{1}{n}\right)=10+\frac{3n}{m}+\frac{3m}{n}\geq 10+2\sqrt{\frac{3n}{m}\cdot \frac{3m}{n}}=16$,

当且仅当 $\frac{3n}{m}=\frac{3m}{n}$,即 $m=n=\frac{1}{4}$ 时,等号成立,所以 $\frac{3}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值是 16,故选 A.

7.D 提示:由 $a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n, 0\leq a_n<\frac{1}{2}, \\ 2a_n-1, \frac{1}{2}\leq a_n<1, \end{cases}$ $a_1=\frac{1}{5}$,得 $a_2=a_1(1+5d)$,得 $3a_1=d$,所以 $\frac{a_1}{d}=\frac{1}{3}$.

15. $\left(-\frac{3}{5}, 1\right]$ 提示:因为关于 x 的不等式 $(a^2-1)x^2+(a-1)x-1\geq 0$ 的解集是空集,若 $a^2-1=0$,即 $a=1$ 或 $a=-1$.当 $a=1$ 时, $-1\geq 0$ 的解集为空集,符合题意;当 $a=-1$ 时, $-2x-1\geq 0$ 的解集非空,不符合题意;若 $a^2-1\neq 0$,则 $\begin{cases} a^2-1<0, \\ (a-1)^2+4(a^2-1)<0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{5}<a<1$.

综上,实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{5}, 1\right]$.

16. $\left(-\infty, \frac{4}{7}\right]$ 提示:由题意,知 $\frac{1}{1-a_1}=1$,则 $\frac{1}{na_n}=1+1\cdot(n-1)=n$,则 $a_n=\frac{1}{n^2}$,因为对任意的 $n\in\mathbb{N}_+$,不等式 $2^n-\lambda\left(\frac{4}{\sqrt{a_n}}-1\right)\geq 0$,即 $2^n-\lambda(4n-1)\geq 0$ 恒成立,所以 $\lambda\leq \frac{2^n}{4n-1}$ 对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 恒成立.构造数列 $\{b_n\}$,令 $b_n=\frac{2^n}{4n-1}$,则 $b_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{4n+3}$,因为 $b_{n+1}-b_n=\frac{2^{n+1}}{4n+3}-\frac{2^n}{4n-1}=\frac{(4n-5)\cdot 2^n}{(4n-1)(4n+3)}$,所以当 $n\in\mathbb{N}$ 时, $4n-1\geq 4\times 1-1=3>0$, $4n+3>0, 2^n>0$,所以当 $4n-5<0$,即 $n<\frac{5}{4}$ 时, $b_{n+1}<b_n$,当 $4n-5>0$,即 $n>\frac{5}{4}$ 时, $b_{n+1}>b_n$,所以 $b_1>b_2>b_3>b_4>\cdots$,所以当 $n=2$ 时,数列 $\{b_n\}$ 取得最小值为 $b_2=\frac{2^2}{4\times 2-1}=\frac{4}{7}$,所以 $\lambda\leq b_2=\frac{4}{7}$,即实数 λ 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{4}{7}\right]$.

四、解答题

17.解:(1)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(2)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(3)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(4)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(5)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(6)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(7)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(8)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(9)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(10)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(11)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(12)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(13)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(14)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(15)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(16)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(17)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(18)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(19)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(20)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(21)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(22)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(23)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(24)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(25)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(26)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(27)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(28)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(29)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(30)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(31)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(32)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(33)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(34)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(35)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(36)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(37)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(38)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(39)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(40)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(41)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(42)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(43)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(44)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{6}$.

(45)因为 $x>0, y>0, 2x+3y=10$,所以 $xy=\frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 3y\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当 <

一、单项选择题

1.A 提示:因为直线 $l_1:4x+my+2=0$ 和直线 $l_2:mx+y+1=0$ 平行,所以 $-4m=0$,且 $2m-4 \neq 0$,解得 $m=-2$.故选 A.

2.A 提示:圆 $C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的圆心为 $C_1(2,3)$,半径 $r_1=1$,圆 $C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的圆心为 $C_2(3,4)$,半径 $r_2=4$,则两圆的圆心距 $|C_1C_2|=\sqrt{2}<|r_1-r_2|=3$,所以圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系为内含.故选 A.

3.C 提示:由题意,得 $2+\frac{p}{2}=3$,则 $p=2$.故选 C.

4.A 提示:由点 $A(2,5),B(4,3)$,得线段 AB 的中点为 $(3,4)$, $k_{AB}=-1$,所以线段 AB 的中垂线的方程为 $y-4=x-3$,即 $x-y+1=0$.由 $\begin{cases} x-y+1=0, \\ 3x-y-3=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases}$ 即 $C(2,3)$.圆 C 的半径 $r=\sqrt{(2-2)^2+(5-3)^2}=2$,所以圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.故选 A.

5.A 提示:由圆 $C:x^2-2x+y^2+a=0$,即 $(x-1)^2+y^2=1-a$,得圆心为 $C(1,0)$,半径 $r=\sqrt{1-a}(a<1)$,则圆心 C 到直线 $4x+3y-9=0$ 的距离 $d=\frac{|4-9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$,因为直线 $4x+3y-9=0$ 与圆 C 相交的弦长为 $4\sqrt{2}$,所以 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-a^2}=4\sqrt{2}$,解得 $a=-8$.故选 A.

6.B 提示:由题意,得直线 l 的方程为 $y=\frac{b}{a}x$,即 $bx-ay=0$.点 $F(c,0)$,则 $|FA|=\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=b$.因为 $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{BA}$,所以点 B 为线段 AF 的中点,则 $|BF|=\frac{b}{2}$.设双曲线 C 的左焦点为 F_1 ,则 $|BF_1|-|BF|=2a$.得 $|BF_1|=2a+\frac{b}{2}$.在 $\triangle BFF_1$ 中,由余弦定理的推论,得 $\cos \angle BFF_1=\frac{b^2+4c^2-(2a+\frac{b}{2})^2}{2 \times \frac{b}{2} \times c}=\frac{2b-a}{c}$,又在 $\text{Rt}\triangle OAF$ 中, $\cos \angle BFF_1=\frac{b}{a}$,所以 $\frac{2b-a}{c}=\frac{b}{a}$,则 $a=b$,所以直线 l 的斜率为 $\frac{b}{a}=1$.故选 B.

7.A 提示:由题意,得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$, $|F_1F_2|=2c$,设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r ,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)r=\frac{1}{2}(2a+2c)r=(a+c)r$.因为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径的最大值为 $a-c$,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=(a+c) \cdot (a-c)=a^2-c^2=b^2$,又 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot y_P \leq \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot b=bc$,所以 $b^2=bc$,则 $b=c$.又椭圆的长轴长为 4,则 $2a=4$,即 $a=2$,又 $a^2=b^2+c^2$,则 $b=c=\sqrt{2}$,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=bc=2$.故选 B.

8.B 提示:设椭圆对应的参数为 a_1,b_1,c ,双曲线对应的参数为 a_2,b_2,c ,因为线段 PF_1 的垂直平分线过 F_2 ,所以 $|F_1F_2|=|PF_2|=2c$,又 $|PF_1|>|PF_2|$.根据双曲线和椭圆的定义,得 $\begin{cases} |PF_1|+2c=2a_1, \\ |PF_1|-2c=2a_2, \end{cases}$ 两式相减,得 $4c=2(a_1-a_2)$,即 $a_1-a_2=2c$,则 $a_1=a_2+2c$.又 $a_2>0,c>0$,所以 $\frac{2}{e_1}+\frac{e_2}{2}=4+\frac{2a_1}{2a_2}=4+\frac{2a_2}{c}+\frac{c}{2a_2} \geq 4+2\sqrt{\frac{2a_2}{c} \cdot \frac{c}{2a_2}}=6$,当且仅当 $\frac{2a_2}{c}=\frac{c}{2a_2}$,即 $c=2a_2$ 时,等号成立,所以 $\frac{2}{e_1}+\frac{e_2}{2}$ 的最小值为 6.故选 B.

二、多项选择题

9.AD 提示:将直线 l 的方程转化为 $(x+y-4)+m \cdot (2x+y-7)=0$,由 $\begin{cases} x+y-4=0, \\ 2x+y-7=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases}$ 故点 A 正确;在圆 C 的方程中,令 $x=0$,解得 $y=2+2\sqrt{6}$,则圆 C 被 y 轴截得的弦长为 $4\sqrt{6}$,故 B 错误;圆 C 的圆心为 $C(1,2)$,半径 $r=5$,则 $|CD|=\sqrt{5}<5$,所以点 D 在圆 C 的内部,直线 l 与圆 C 恒相交,故 C 错误;当直线 l 被圆 C 截得的弦长最短时, $l \perp CD$,又 $k_{CD}=-\frac{1}{2}$,则直线 l 的斜率为 2,此时直线 l 的方程为 $y-1=2(x-3)$,即 $2x-y-5=0$.故 D 正确.故选 AD.

10.AD 提示:抛物线 $y^2=4x$ 的准线为 $x=-1$,焦点 $F(1,0)$,若 O 为线段 PQ 的中点,所以 $x_P=1$,所以 $|PF|=x_P+1=2$,故 A 正确;若 $|PF|=4$,则 $x_P=4+1=3$,所以 $|OP|=\sqrt{x_P^2+y_P^2}=\sqrt{x_P^2+4x_P}=\sqrt{21}$,故 B 错误;不妨设 $P(a^2,2a)$, $a \neq 0$,则 $l:y=\frac{2}{a}x$,得 $Q(-1,-\frac{2}{a})$,所以 $\overrightarrow{FP}=(a^2-1,2a)$, $\overrightarrow{OQ}=(2,-\frac{2}{a})$,所以 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{OQ}=2a^2+2>0$,所以 FP 与 FQ 不垂直,故 C 错误;由 C 项,得 $S_{\triangle PQF}=\frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot |y_P-y_Q|=\frac{1}{2} \times 1 \times |2a+\frac{2}{a}|=|a|+\frac{1}{|a|} \geq 2\sqrt{|a| \cdot \frac{1}{|a|}}=2$,当且仅当 $|a|=1$,即 $a=\pm 1$ 时,取等号,所以 $\triangle PFQ$ 面积的最小值为 2,故 D 正确.故选 AD.

11.ACD 提示:设 $|PF_1|=m$, $|PF_2|=n$,因为点 P 在双曲线 C 的右支上,所以 $m=n+2a$,即 $m=n+2a$,由 $2|PF_1| \leq 9|PF_2|$,得 $2m=2n+4a \leq 9n$,所以 $n \geq \frac{4}{7}a$,由 $|PF_1|^2=4|OF_2|^2-|PF_2|^2$,得 $m^2=n^2+4an+4a^2=4c^2-n^2$,所以 $4c^2=$

$2n^2+4an+4a^2 \geq 2 \times \frac{16}{49}a^2+\frac{16}{7}a^2+4a^2=\frac{340}{49}a^2$,所以 $c^2 \geq \frac{85}{49}a^2$,所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a} \geq \frac{\sqrt{85}}{7}$,由选项知,离心率可能的值为 $\frac{\sqrt{85}}{7},\frac{\sqrt{85}}{6},\frac{85}{48}$.故选 ACD.

12.ACD 提示: $\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a=12$,故 A 正确;由 $a=3$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$,得椭圆的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$,故 B 错误;要使 $|AF_2|+|BF_2|=12-|AB|$ 最大,只需 $|AB|$ 最小,根据椭圆的性质,知当 $AB \perp x$ 轴时, $|AB|_{\min}=\frac{2b^2}{a}=\frac{10}{3}$,故

$(|AF_2|+|BF_2|)_{\max}=\frac{26}{3}$,故 C 正确;设直线 $AB:x=my-2$,代入椭圆方程,整理得 $(9+5m^2)y^2-20my-25=0$,则 $y_A+y_B=\frac{20m}{9+5m^2}$, $y_Ay_B=-\frac{25}{9+5m^2}$,又 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_A-y_B|=2\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=\frac{60\sqrt{m^2+1}}{9+5m^2}$,令 $t=\sqrt{m^2+1}$,则 $t \geq 1$, $m^2=t^2-1$,则 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{60t}{5t^2+4}=\frac{60}{5t+\frac{4}{t}}$,又 $y=5t+\frac{4}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $t=1$ 时, y 取得最小值,此时 $S_{\triangle ABF_2}$ 取得最大值 $\frac{20}{3}$,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13. $x+2y-3=0$ 提示:当弦最短时,圆心 C 与点 M 的连线与所求直线垂直.圆 $C:x^2+y^2-4x-6y=0$,即 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$,圆心为 $C(2,3)$,所以直线的斜率 $k=-\frac{1}{k_{CM}}=-\frac{1}{2}$,所以直线方程是 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$,即 $x+2y-3=0$.

14.32 提示:由题意,得 $a=3,b=4,c=5$.结合双曲线的定义,得 $|PF_2|-|PF_1|=2a=6$,两边平方,得 $|PF_2|^2+|PF_1|^2-2|PF_2| \cdot |PF_1|=36$.在 $\triangle F_1PF_2$ 中,由余弦定理,得 $100=|F_1F_2|^2=|PF_2|^2+|PF_1|^2-2|PF_2| \cdot |PF_1|\cos \angle F_1PF_2$,则 $|PF_1| \cdot |PF_2|(1-\cos \angle F_1PF_2)=32$,又 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 16,则 $\frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2|\sin \angle F_1PF_2=16$,则 $\frac{1-\cos \angle F_1PF_2}{\sin \angle F_1PF_2}=1$,即 $\sin \angle F_1PF_2+\cos \angle F_1PF_2=1$,又 $\angle F_1PF_2 \in (0,\pi)$,所以 $\cos \angle F_1PF_2=0$, $\sin \angle F_1PF_2=1$,所以 $|PF_1| \cdot |PF_2|=32$.

15. $\frac{1}{2}$ 提示:由题意可知, $A(-a,0),F_1(-c,0)$,

$F_2(c,0)$,直线 AP 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+a)$, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P=120^\circ$,则 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$.过 P 作 $PQ \perp x$ 轴于点 Q .在 $\text{Rt}\triangle PF_2Q$ 中, $\angle PF_2Q=60^\circ$,所以 $|PQ|=|PF_2|\sin \angle PF_2Q=2c \times \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}c$, $|F_2Q|=|PF_2| \cdot \cos \angle PF_2Q=2c \times \frac{1}{2}=c$,所以 $P(2c,\sqrt{3}c)$,将点 P 代入

直线 $AP:y=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+a)$,得 $\sqrt{3}c=\frac{\sqrt{3}}{4}(2c+a)$,即 $a=2c$,所以椭圆离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

16. $y=\pm(x+1),2-\sqrt{2}$ 提示:抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$,焦点为 $F(1,0)$,则 $A(-1,0)$,设 P 到准线的距离为 $|PQ|$,则 $|PQ|=|PF|$,所以 $\frac{|PF|}{|PA|}=\frac{|PQ|}{|PA|}=\sin \angle PAQ$,所以当 PA 与抛物线相切时, $\angle PAQ$ 最小,即 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 取得最小值.设过 A 点的直线 $y=k(x+1)$,即 $y=kx+k(k \neq 0)$ 与抛物线相切,将 $y=kx+k$ 代入抛物线方程,得 $k^2x^2+(2k^2-4)x+k=0$,所以 $\Delta=(2k^2-4)^2-4k^2=0$,解得 $k=\pm 1$,则 $x^2-2x+1=0$,解得 $x=1$,把 $x=1$ 代入 $y^2=4x$,得 $y=\pm 2$,所以 $P(1,2)$ 或 $P(1,-2)$,此时直线 PA 的方程为 $y=\pm(x+1)$,所以 $S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}|AF| \cdot |y_P|=\frac{1}{2} \times 2 \times 2=2$,又 $|AP|=2\sqrt{2}$, $|AF|=2$, $|PF|=2$,设 $\triangle PAF$ 的内切圆半径为 r ,所以 $\frac{1}{2} \times (2\sqrt{2}+2+2)r=2$,解得 $r=2-\sqrt{2}$.

四、解答题

17.解:(1)由题意,得圆 $C:x^2+y^2-mx-4y-20=0$ 的圆心为 $C(\frac{m}{2},2)$ 在直线 $x-y+1=0$ 上,则 $\frac{m}{2}-2+1=0$,解得 $m=2$,所以圆 $C:x^2+y^2-2x-4y-20=0$,所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.
(2)设圆心 C 到直线 l 距离为 d ,由 (1) 得 $C(1,2)$, $r=5$,则 $2\sqrt{r^2-d^2}=8$,解得 $d=3$.①当直线 l 斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=4$,满足题意;②当直线 l 斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$,则 $d=\frac{|\frac{3k-6}{\sqrt{k^2+1}}|}{\sqrt{k^2+1}}=3$,解得 $k=-\frac{3}{4}$,所以直线 l 的方程为 $3x+4y+4=0$.

18.(1)解:由题意,得 $c=1,a+c=3$,所以 $a=2$,则 $b=\sqrt{3}$,所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)证明:显然直线 AD 的斜率存在且不为 0,设直线 AD 的方程为 $y=k(x-1)(k \neq 0)$, $A(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$,则 $B(x_1,-y_1)$,由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 可得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,则 $\Delta=64k^4-4(4k^2+3)(4k^2-12)=144(k^2+1)>0$, $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$, $x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$,所以直线 BD 的方程为 $y=\frac{y_2-x_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$,令 $y=0$,可得 $x=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}y_1+x_1=\frac{k(x_2-x_1)(x_1-1)}{k(x_2-x_1)-k(x_1-1)}+\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1+x_2-2}=\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1+x_2-2}=\frac{2 \times \frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}}{\frac{8k^2}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}}=\frac{8k^2}{4k^2+3}-2$.

4.所以直线 BD 过定点 $(4,0)$.
19.解:(1)设椭圆的半焦距为 $c(c>0)$.因为圆 $M:x^2+y^2+4x+3=0$ 的圆心为 $M(-2,0)$,所以椭圆的左焦点为 $F_1(-2,0)$,所以 $c=2$.因为 $\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $a=\sqrt{5}$,又 $a^2=b^2+c^2$,所以 $b=1$,所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

(2)由 (1) 可知椭圆 C 的左、右焦点分别为 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,易知直线的斜率不为 0,设直线的方程为 $x=my-2$,联立 $\begin{cases} x=my-2, \\ \frac{x^2}{5}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(m^2+5)y^2-4my-1=0$,则 $y_1+y_2=\frac{4m}{m^2+5}$, $y_1y_2=-\frac{1}{m^2+5}$, $\triangle ABF_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_2-y_1|=\frac{1}{2} \sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{\frac{16m^2}{(m^2+5)^2}+\frac{4}{m^2+5}}=\frac{4\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}$.

令 $t=\sqrt{m^2+1}$,则 $t \in [1,+\infty)$,所以 $S=\frac{4\sqrt{5}t}{t^2+4}=\frac{4\sqrt{5}}{t+\frac{4}{t}} \leq \sqrt{5}$,当且仅当 $t=\frac{4}{t}$,即 $t=2,m=\pm\sqrt{3}$ 时, S 取得最大值 $\sqrt{5}$,所以 $\triangle ABF_2$ 的面积的最大值为 $\sqrt{5}$.

20.解:(1)抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$.准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$, $|PF|=2x_0$,即为 $x_0+\frac{p}{2}=2x_0$,又 $2px_0=4$,解得 $p=2,x_0=1$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.
(2)设过 $P(1,2)$ 的切线方程为 $y=kx+2-k$,由切线与圆 M 相切,可得 $\frac{|3k+2-k|}{\sqrt{1+k^2}}=r$,化为 $(r^2-4)k^2-8k+(r^2-4)=0$,

设切线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2 ,可得 $k_1+k_2=\frac{8}{r^2-4}$, $k_1k_2=1$.联立 $\begin{cases} y=kx+2-k, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $k^2x^2+[2k(2-k)-4]x+(2-k)^2=0$,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,可得 $1 \cdot x_1=\frac{(2-k)^2}{k^2}=1-\frac{4}{k}+\frac{4}{k^2}$,即 $x_1+x_2=2-4(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2})+4(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2})=2-\frac{32}{r^2-4}+4[(\frac{64}{(r^2-4)^2}-2)]=[\frac{16}{4-r^2}+1]^2-7$,由 $0 < r \leq \sqrt{2}$,可得 $4-r^2 \in [2,4)$,则 $(\frac{16}{4-r^2}+1)^2-7 \in (18,74]$,即 $t=\frac{x_1+x_2}{2} \in (9,37]$,所以 t 的取值范围是 $(9,37]$.

21.解:(1)根据题意,得 $m+\frac{p}{2}=2$,又 $2^2=2pm$,解得 $m=1,p=2$,所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$.
(2)设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $(1,0)$.当直线 l 的斜率等于 0 时,不符合题意;当直线 l 的斜率不等于 0 时,设直线 l 的方程为 $x=ty+1$,由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x=ty+1, \end{cases}$ 得 $y^2-4ty-4=0$,则 $\Delta=16t^2+16>0,y_1+y_2=4t,x_1+y_2=4$,又 $A(-2,4)$,则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}=(x_1+2)(x_2+2)+(y_1-4) \cdot (y_2-4)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4y_1y_2-4(y_1+y_2)+16=\frac{y_1}{4} \cdot \frac{y_2}{4}+2(\frac{y_1}{4}+\frac{y_2}{4}) \cdot y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=\frac{(y_1+y_2)^2}{16}+\frac{1}{2} \times (y_1+y_2)^2-2y_1y_2+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=1+\frac{1}{2} \times (4t)^2+8-4-16t+20-8t^2-16t+21=8(t-1)^2+13$,所以当 $t=1$ 时, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 取得最小值 13,此时直线 l 的方程为 $x=y+1=0$.

22.解:(1)由题意,得 $\frac{1}{a}=\frac{-y_m}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{a^2}+\frac{y_m^2}{b^2}=1$, $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^2=b^2+c^2$,联立以上等式,解得 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$, $y_m=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $x=m(y-1)+2,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$, $x=m(y-1)+2$,联立 $\begin{cases} x=m(y-1)+2, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+(4m-2m^2)y+m^2-4m=0$,所以 $y_1+y_2=\frac{2m^2-4m}{m^2+4}$, $y_1y_2=\frac{m^2-4m}{m^2+4}$,因为 $A(2,0)$,则直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1-0}{x_1-2} \cdot (x-2)$,所以 $P(x_2,\frac{y_1(x_2-2)}{x_1-2})$, $Q(x_1,\frac{y_1(x_2-2)}{2(x_1-2)})$,所以 $k_{AQ}=\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{my_1(y_2-1)+my_2(y_1-1)}{2m^2(y_1-1)(y_2-1)}=\frac{2y_1y_2-(y_1+y_2)}{2m(y_1y_2-y_1-y_2+1)}=-\frac{1}{2}$.

所以直线 AQ 的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x-2)$,则 $Q(x_2,-\frac{1}{2}(x_2-2))$, $-2 \leq x_2 < 2$,所以 $|AQ|=\sqrt{(x_2-2)^2+\frac{1}{4}(x_2-2)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_2-2| \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \times | -2-2|=2\sqrt{5}$,当且仅当 $x_2=-2$ 时, $|AQ|$ 取得最大值 $2\sqrt{5}$.

数学

第 39 期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1.A 提示:因为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 $(\pm\sqrt{5},0)$,所以所求椭圆的焦点为 $(\pm\sqrt{5},0)$,设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由题意,得 $\begin{cases} \frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1, \\ \frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=5, \end{cases}$ 解得 $a^2=15,b^2=10$,所以 $\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$,故选 A.

2.A 提示:设 $\angle F_1PF_2=2\theta$,因为该椭圆上存在点 P 满足 $\angle F_1PF_2=60^\circ$,所以 2θ 的最大值大于等于 60° ,又当 P 为短轴顶点时, 2θ 最大,所以 $2\theta \geq 60^\circ$,即 $\theta \geq 30^\circ$,且 $\theta < 90^\circ$,所以 $1 > \sin \theta \geq \frac{1}{2}$,所以 $\frac{c}{a} \geq \frac{1}{2}$,则 $\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{1}{4}$,所以 $\frac{12-m}{12} \geq \frac{1}{4}$,且 $12>m>0$,解得 $0 < m \leq 9$,所以实数 m 的取值范围是 $(0,9]$.故选 A.

3.B 提示:因为 $|AB|=4$,所以 $|AF|=4$,又 $\angle AEx=\frac{\pi}{3}$,过点 A 作 $AC \perp x$ 轴,垂足为 C ,则 $|FC|=2$, $|AC|=2\sqrt{3}$,所以 $A(2+\frac{p}{2},2\sqrt{3})$,因为点 A 在抛物线 $y^2=2px$ 上,所以 $12=2p(2+\frac{p}{2})$,即 $p^2+4p-12=0$,解得 $p=2$ 或 $p=-6$ (舍去).故选 B.

4.B 提示:设 $P(x_0,y_0)$,且 $x_0>0,y_0>0$,双曲线 C 的左焦点为 $F_1(-2,0)$,则 $Q(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2})$,双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm x$,则 $\frac{x_0-2}{2}=\pm \frac{y_0}{2}$,即 $x_0=2 \pm y_0$,又 $x_0^2-y_0^2=2$, $x_0>0,y_0>0$,两式联立,解得 $x_0=\frac{3}{2},y_0=\frac{1}{2}$,所以 $P(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.故选 B.

5.D 提示:由抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$,得 $F(\frac{p}{2},0)$,则直线 $MF:y=\sqrt{3}(x-\frac{p}{2})$,与抛物线 $y^2=2px$ 联立,得 $3x^2-5px+\frac{3}{4}p^2=0$,解得 $x=\frac{3p}{2}$,或 $x=\frac{p}{6}$,又 M 在 x 轴上方,则 $M(\frac{3p}{2},\sqrt{3}p)$,因为 $MN \perp l$, $\angle MFx=60^\circ$,所以 $\angle NMF=60^\circ$,又 $|MN|=|MF|$,所以 $\triangle NMF$ 为等边三角形,所以 $\angle MNF=\angle NFO=60^\circ$,过 Q 作 x 轴的垂线交 x 轴于 G ,设 $|FG|=a$,因为 $\angle NFO=60^\circ$,所以 $|QG|=\sqrt{3}a$,所以 $x_Q=\frac{p}{2}-a$,所以 $Q(\frac{p}{2}-a,\sqrt{3}a)$,因为 Q 在抛物线上,所以 $3a^2=2p(\frac{p}{2}-a)$,解得 $a=\frac{p}{3}$,所以 $x_Q=\frac{p}{2}-\frac{p}{3}=\frac{p}{6}$, $Q(\frac{p}{6},\frac{\sqrt{3}p}{3})$,所以 $|QF|=\frac{p}{6}+\frac{p}{2}=\frac{2p}{3}$,又 $N(-\frac{p}{2},\sqrt{3}p)$,所以 $|NQ|=\frac{4p}{3}$,则 $\frac{|NQ|}{|QF|}=2$.故选 D.

6.B 提示:由双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,可得 $A_1(-a,0),A_2(a,0),F_1(-c,0)$,因为 $\angle A_1A_2P=120^\circ$,所以 $|A_1A_2|=|A_2P|=2a$, $\angle PA_2F_2=60^\circ$,过点 P 作 $PH \perp x$ 轴,垂足为 H ,则 $|PH|=2a\sin 60^\circ=\sqrt{3}a$, $|A_2H|=2a\cos 60^\circ=a$,即 $P(2a,\sqrt{3}a)$,又直线 PF_1 的