



扫码免费下载  
习题讲解 ppt

## 第 33 期

## 第2-3版专题检测

## 一、单项选择题

1.B 提示:要使函数  $f(x)$  有意义,需满足  $\begin{cases} 4-x>0 \\ 2^x-2\geq 0 \end{cases}$ ,解得  $1\leq x<4$ ,所以  $f(x)$  的定义域为  $[1,4)$ .故选 B.

2.A 提示:因为  $f(3)=2^{3-1}=1$ ,所以  $f(f(3))=f(1)=1^{1+1}=2$ .故选 A.

3.B 提示: $y=e^x$  为非奇非偶函数,故 A 错误; $y=x^3$  为奇函数,且是  $\mathbf{R}$  上的增函数,故 B 正确; $y=-\frac{1}{x}$  是奇函数,在  $(-\infty,0)$ ,  $(0,+\infty)$  上是增函数,但并非定义域上的增函数,故 C 错误; $y=e^{|x|}$  为偶函数,故 D 错误.故选 B.

4.B 提示:因为  $f(x)=\frac{x\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{e^{|x|}}=\frac{x\cos x}{e^{|x|}}$ ,定义域为  $\mathbf{R}$ , $f(-x)=\frac{-x\cos(-x)}{e^{|-x|}}=-\frac{x\cos x}{e^{|x|}}=-f(x)$ ,所以  $f(x)$  为奇函数,排除 C、D;又  $x\in(0,\frac{\pi}{2})$  时, $f(x)>0$ ,排除 A.故选 B.

5.A 提示:由题意,得  $m^2-m-5=1$ ,且  $m^2-4m+1>0$ ,解得  $m=-2$ .故选 A.

6.B 提示:因为经过 10h 过滤后减少了 20% 的污染物,所以  $P_0e^{-10\lambda}=80\%$ ,  $P_0$  解得  $k=-\frac{\ln 0.8}{10}$ .设为了使得污染物减少到原来的 10%,需要的时长大约为  $t$ h,则  $10\%P_0=P_0e^{-\frac{\ln 0.8}{10}t}$ ,解得  $t=-\frac{10\ln 10}{\ln 0.8}=\frac{10+10\log 5}{\log 5-2}\approx 103.103-10=93(\text{h})$ ,所以还需要大约 93h.故选 B.

7.A 提示:令  $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$ , $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ,则  $g'(x)=\frac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$ ,因为  $f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$ ,所以  $g'(x)<0$ ,所以  $g(x)$  在  $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$  上单调递减,所以  $f(x)<2f(\frac{\pi}{3})\cos x$  等价于  $\frac{f(x)}{\cos x}<\frac{f(\frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}}$ ,即  $g(x)<g(\frac{\pi}{3})$ ,所以

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ ,即原不等式的解集为  $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ .故选 A.

8.D 提示:若  $m\leq 0$ ,显然  $f(x)$  不是恒大于零,则  $m>0$  (由 4 个选项也可得),所以  $f(x)=e^m-\frac{1}{m}\ln x>0$  在  $(0,1]$  上恒成立.当  $x>1$  时, $f(x)=e^m-\frac{1}{m}\ln x>0\Leftrightarrow e^m>\frac{1}{m}\ln x\Rightarrow$

$mx\cdot e^m>\ln x\Rightarrow \ln x=e^m$ ,令  $g(t)=e^t(t>0)$ , $g'(t)=(1+t)e^t>0$ ,则  $g(t)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递增.因为  $m>0$ , $\ln x>0(x>1)$ ,所以  $mx\cdot e^m>\ln x\cdot e^m\Rightarrow g(mx)>g(\ln x)$ ,则  $mx>\ln x$ ,所以  $m>\frac{\ln x}{x}$  在  $(1,+\infty)$  上恒成立.设  $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$ ,则  $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ,令  $h'(x)=0$ ,则  $x=e$ ,所以  $h(x)$  在  $(1,e)$  内单调递增,在  $(e,+\infty)$  上单调递减,所以  $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$ ,则  $m>\frac{1}{e}$ ,即  $m$  的取值范围为  $(\frac{1}{e},+\infty)$ .故选 D.

## 二、多项选择题

9.AC 提示:由图可知,函数  $f(x)$  在  $(0,1)$  内单调递减,在  $(1,6)$  内单调递增,在  $(6,+\infty)$  上单调递减,所以  $f(1)<f(6)$ ,故 A 正确;因为  $f(5)<f(6)$ ,故 B 错误;因为  $y=f(x)$  在  $(0,1)$  上单调递减,在  $(1,6)$  上单调递增,所以  $x=1$  是  $y=f(x)$  的极小值点,故 C 正确;因为在  $x=3$  的两侧  $f'(x)$  的符号相同,所以  $x=3$  不是  $y=f(x)$  的极小值点,故 D 错误.故选 AC.

10.BC 提示:因为  $f'(x)=-3x^2+4x-3$ ,设切点为  $(x_0,-x_0^2+2x_0^2-3x_0)$ ,则切线方程为  $y+x_0^2-2x_0^2+3x_0=(-3x_0^2+4x_0-3)(x-x_0)$ .将  $(-2,m)$  代入,得  $m-2x_0^2+4x_0^2-8x_0+6$ .令  $g(x)=2x^3+4x^2-8x+6$ ,则  $g'(x)=6x^2+8x-8=2(x+2)(3x-2)$ ,由  $g'(x)>0$ ,得  $x>\frac{2}{3}$  或  $x<-2$ ,由  $g'(x)<0$ ,得  $-2< x<\frac{2}{3}$ ,所以  $g(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty,-2)$  和  $(\frac{2}{3},+\infty)$ ,单调递减区间为  $(-2,\frac{2}{3})$ ,所以  $g(x)$  的极大值为  $g(-2)=22$ ,极小值为  $g(\frac{2}{3})=\frac{82}{27}$ ,由题意,知  $y=g(x)$  的图象与直线  $y=m$  有三个交点,则  $\frac{82}{27}<m<22$ .又  $m\in\mathbf{Z}$ ,所以  $m=4,5,\dots,20,21$ .故选 BC.

11.BD 提示:构造函数  $g(x)=\frac{f(x)}{x^2+x^2}$  ( $x>0$ ),因为当  $x\in(0,+\infty)$  时,  $(x^2+x)^2f'(x)<(3x+2)f(x)$ ,所以  $g'(x)=\frac{(x^2+x)^2f'(x)-(3x+2)f(x)}{(x^2+x)^2}<0$ ,则  $g(x)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递减,所以  $g(\frac{1}{2})>g(1)>g(2)>g(3)$ ,即  $\frac{f(\frac{1}{2})}{\frac{3}{8}}>\frac{f(1)}{2}>\frac{f(2)}{12}>\frac{f(3)}{36}$ ,所以  $f(3)<18f(1)$ ,

正弦定理,得  $(a-c)(a+c)=bc(b-c)$ ,整理得  $b^2+c^2-a^2=bc$ ,所以由余弦定理的推论,得  $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$ ,又  $A\in(0,\pi)$ ,所以  $A=\frac{\pi}{3}$ .

(2)因为  $A=\frac{\pi}{3}$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ ,所以  $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}$ ,所以  $bc=4$ ,又  $\sin B\sin C=\frac{1}{4}$ ,所以由正弦定理,得  $\frac{bc}{\sin B\sin C}=(\frac{a}{\sin A})^2$ ,即  $16=(\frac{a}{\sin A})^2$ ,则  $a=4\sin A=2$ .解:(1)由图可知  $MN=PR=10\text{m}$ ,  $BN=15\text{m}$ ,  $NQ=300\text{m}$ ,  $RQ=5\text{m}$ ,则  $\sin\angle MBN=\frac{10}{300}=\frac{1}{30}$ ,  $\cos\angle MBN=\frac{\sqrt{10^2+15^2}}{300}=\frac{13}{50}$ ,  $\sin\angle PQR=\frac{3\sqrt{13}}{10}$ ,  $\sin\angle PQR=\frac{\sqrt{10^2+5^2}}{10}=\frac{13}{50}$ ,  $\cos\angle PQR=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,故  $\sin\angle BAQ=\sin(\angle PQR-\angle MBN)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$ .(2)在  $\triangle BAQ$  中,由正弦定理,得  $\frac{BQ}{\sin\angle BAQ}=\frac{AQ}{\sin\angle ABQ}$ ,即  $\frac{315}{\frac{4\sqrt{65}}{65}}=\frac{AQ}{\frac{2\sqrt{13}}{13}}$ ,解得  $AQ=\frac{315\sqrt{5}}{2}$ ,所以  $h=AQ\cdot\sin\angle PQR=\frac{315\sqrt{5}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{13}=\frac{315}{13}\text{m}$ .

20.解:(1)若选①②,因为函数  $f(x)$  的一个零点为 0,所以  $f(0)=0$ ,则  $2\sin\varphi=1=0$ ,则  $\sin\varphi=\frac{1}{2}$ ,又  $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ,所以  $\varphi=\frac{\pi}{6}$ .因为函数  $f(x)$  图象上相邻两条对称轴间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ ,所以最小正周期  $T=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$ ,则  $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$ ,所以  $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$ .

若选②③,因为函数  $f(x)$  的一个零点为 0,所以  $f(0)=0$ ,即  $2\sin\varphi=1=0$ ,则  $\sin\varphi=\frac{1}{2}$ ,又  $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ,所以  $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ,又函数  $f(x)$  图象的一个最低点的坐标为  $(\frac{2\pi}{3},-3)$ ,所以  $2\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=-2$ ,则  $\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$  ( $k\in\mathbf{Z}$ ),所以  $\omega=3k-1$  ( $k\in\mathbf{Z}$ ),又  $0<\omega<3$ ,所以  $\omega=2$ ,所以  $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$ .

若选②③,因为函数  $f(x)$  图象上相邻两条对称轴间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ ,所以最小正周期  $T=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$ ,则  $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$ ,因为函数  $f(x)$  图象的一个最低点的坐标为  $(\frac{2\pi}{3},-3)$ ,所以  $2\sin(2\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=-2$ ,则  $\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$  ( $k\in\mathbf{Z}$ ),得  $\varphi=-\frac{11\pi}{6}+2k\pi$  ( $k\in\mathbf{Z}$ ),又  $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ,所以  $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ,所以  $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$ .

(2)由题意,得  $g(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ ,由  $-\frac{\pi}{3}\leq x\leq m$ ,得  $-\frac{5\pi}{6}\leq 2x-\frac{\pi}{6}\leq 2m-\frac{\pi}{6}$ .因为  $g(x)$  在  $[-\frac{\pi}{3},m]$  上的最大值为 2,所以  $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$  在  $[-\frac{\pi}{3},m]$  上的最大值为  $\frac{\pi}{3}$ .1.则  $2m-\frac{\pi}{6}\geq\frac{\pi}{2}$ ,得  $m\geq\frac{\pi}{3}$ ,所以实数  $m$  的最小值为  $\frac{\pi}{3}$ .

21.解:(1)因为  $\frac{b-a}{a}=\frac{c}{a+b}$ ,所以  $b^2=a^2+ac$ ,又  $B=\frac{\pi}{3}$ ,则由余弦定理,得  $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$ ,所以  $a^2+ac=a^2+c^2-ac$ ,所以  $c=2a$ ,由正弦定理,得  $\sin C=2\sin A$ ,又  $B=\frac{\pi}{3}$ ,所以  $\sin(A+\frac{\pi}{3})=2\sin A$ ,即  $\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=2\sin A$ ,所以  $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,又  $A\in(0,\pi)$ ,所以  $A=\frac{\pi}{6}$ ,则  $C=\frac{\pi}{2}$ ,因为  $\triangle ABC$  为直角三角形.

(2)因为  $B=\frac{\pi}{3}$ ,所以  $\frac{\cos A\cos C}{\cos C\cos(\frac{2\pi}{3}-C)}=\frac{1}{-\frac{1}{2}\cos^2 C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\sin C}=\frac{1}{\frac{\sin(A+C)}{1+\cos 2C}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2C}=\frac{1}{\frac{1}{2}[\sin(2C-\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{2}]}=2$ ,因为  $C\in(0,\frac{2\pi}{3})$ ,所以  $2C-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$ ,所以  $\sin(2C-\frac{\pi}{6})\in(-\frac{1}{2},1]$ ,所以  $\frac{\tan A+\tan C}{1+\tan A\tan C}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\times(1-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{6}$ ,当且仅当  $2C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ ,即  $C=\frac{\pi}{3}$  时,取等号,所以  $\frac{1}{\tan A+\tan C}$  的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

22.解:(1)函数  $f(x)=4\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\sin x+(\sin x+\cos x)\cdot(\sin x-\cos x)+1=[2+2\cos(x+\frac{\pi}{2})]\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x+1=2\sin x-2\sin^2 x+2\sin^2 x=2\sin x$ .因为函数  $y=f(\omega x)=2\sin\omega x$  在区间  $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$  上是增函数,所以  $\begin{cases} \frac{\omega}{2}\leq\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}\leq-\frac{\pi}{3} \end{cases}$ ,解得  $0<\omega\leq 1$ ,所以  $\omega$  的取值范围是  $(0,1]$ .

(2)令  $g(x)=\frac{1}{2}[f(2x)-af(x)+af(\frac{\pi}{2}-x)-a]-1=\frac{1}{2}[2\sin 2x-2a\sin x+2a\sin(\frac{\pi}{2}-x)-a]-1=\sin 2x-a\sin x+acos x-\frac{1}{2}a-1=2\sin x\cos x-a(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}a-1$ .令  $\sin x-\cos x=t$ ,则  $2\sin x\cos x=1-t^2$ ,  $t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ ,因为  $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ,所以  $-1\leq\sin(x-\frac{\pi}{4})\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,所以  $-\sqrt{2}\leq t\leq 1$ ,则  $g(x)$  转化为  $g(t)=1-t^2-at-\frac{1}{2}a-1=t^2-at-\frac{1}{2}a$ ,对称轴为  $t=-\frac{a}{2}$ .因为  $g(x)$  在  $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$  上的最大值为 2,即  $g(t)$  在  $[-\sqrt{2},1]$  上的最大值为 2,所以当  $-\frac{a}{2}\geq 1$ ,即  $a\leq -2$  时,则  $g(t)_{\max}=g(1)=-1-a-\frac{1}{2}a-2$ ,解得  $a=-2$ ;当  $-\sqrt{2}<-\frac{a}{2}<1$ ,即  $-2<a<2\sqrt{2}$  时,则  $g(t)_{\max}=g(-\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}a-2$ ,解得  $a=2$  (舍),或  $a=4$  (舍);当  $-\frac{a}{2}\leq-\sqrt{2}$ ,即  $a\geq 2\sqrt{2}$  时,则  $g(t)_{\max}=g(-\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}-a-\frac{1}{2}a-2$ ,解得  $a=\frac{16\sqrt{2}+8}{7}$ .综上,实数  $a$  的值为  $-2$  或  $\frac{16\sqrt{2}+8}{7}$ .

$OB,OP$  所在的直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴,建立空间直角坐标系,则  $O(0,0,0)$ ,  $C(2,0,0)$ ,  $B(0,2,0)$ ,  $A(-2,0,0)$ ,  $P(0,0,2)$ ,设  $\vec{PM}=\lambda\vec{PA}$ ,  $\lambda\in[0,1]$ ,则  $\vec{OM}=\lambda\vec{OA}+(1-\lambda)\vec{OP}=(-2\lambda,0,2-2\lambda)$ ,所以  $M(-2\lambda,0,2-2\lambda)$ ,所以  $\vec{MC}=(2\lambda+2,0,2\lambda-2)$ ,  $\vec{BC}=(2,-2,0)$ ,设平面  $BCM$  的法向量为  $m=(x,y,z)$ ,则  $\begin{cases} m\cdot\vec{MC}=(2\lambda+2)x+(2\lambda-2)z=0 \\ m\cdot\vec{BC}=2x-2y=0 \end{cases}$ ,取  $x=1-\lambda$ ,得  $m=(1-\lambda,1-\lambda,\lambda+1)$ ,设平面  $PBC$  的法向量为  $n=(a,b,c)$ ,因为  $\vec{PB}=(0,2,-2)$ ,  $\vec{PC}=(2,0,-2)$ ,所以  $\begin{cases} n\cdot\vec{PB}=2b-2c=0 \\ n\cdot\vec{PC}=2a-2c=0 \end{cases}$ ,取  $c=1$ ,得  $n=(1,1,1)$ .设平面  $PBC$  与平面  $BCM$  所成角为  $\theta$ ,由图知  $\theta$  为锐角,因为平面  $PBC$  与平面  $BCM$  所成角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,所以  $\cos\theta=|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\frac{|3-3\lambda|}{\sqrt{3}\times\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,整理得  $21\lambda^2-2\lambda-3=0$ ,解得  $\lambda=\frac{1}{3}$  或  $\lambda=-\frac{3}{7}$  (舍去),所以在棱  $PA$  上存在一点  $M$ ,使平面  $PBC$  与平面  $BCM$  所成角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,此时  $\frac{PM}{PA}=\frac{1}{3}$ .

## 第 36 期

## 第2-3版专题检测

## 一、单项选择题

1.D 提示:由  $b(3,-4)$ ,得  $|b|=5$ ,则向量  $a$  在向量  $b$  上的投影向量为  $\frac{a\cdot b}{|b|}\times\frac{b}{|b|}=(\frac{6}{25},-\frac{8}{25})$ .故选 D.

2.A 提示:由  $\cos 4=\frac{a}{5}$ ,得  $\sin 4=\frac{b}{5}$ ,又  $b=5\sqrt{3}$ ,  $B=\frac{\pi}{3}$ ,由正弦定理,得  $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ ,则  $a=\frac{bsin A}{\sin B}=6$ .故选 A.

3.C 提示:因为  $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$ ,所以  $\sin(2\alpha+\frac{5\pi}{6})=\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})=\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})=1-2\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})=1-2\times(\frac{3}{5})^2=\frac{7}{25}$ .故选 C.

4.D 提示:由  $a\perp b$ ,得  $a\cdot b=2x+2-4=0$ ,解得  $x=1$ ,则  $b=(2,4)$ ,  $2a+b=(6,2)$ ,所以  $|2a+b|=2\sqrt{10}$ .故选 D.

5.A 提示:因为  $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}a^2\sin A$ ,所以  $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3}{2}a^2\sin A$ ,又  $\sin A\neq 0$ ,所以  $3a^2=bc$ ,又  $b+c=\frac{7}{2}a$ ,所以由弦定理的推论,得  $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}=\frac{49}{4}a^2-6a^2-a^2=\frac{7}{8}$ .故选 A.

6.A 提示:根据题意,得直线  $x=\frac{2\pi}{3}$  是函数  $f(x)$  图象距离  $(\frac{5\pi}{12},0)$  最近的一条对称轴,所以  $f(x)$  的最小正周期  $T=4\times(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12})=\pi$ ,则  $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$ ,得  $\omega=2$ .因为  $f(\frac{2\pi}{3})$  是  $f(x)$  的最大值,所以  $f(\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{4\pi}{3}+\varphi)=1$ ,则  $\frac{4\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ,  $k\in\mathbf{Z}$ ,得  $\varphi=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ,  $k\in\mathbf{Z}$ ,取  $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$ ,所以  $f(x)=\sin(2x-\frac{5\pi}{6})$ ,所以  $f(-\frac{\pi}{6})=\sin(-\frac{7\pi}{6})=\frac{1}{2}$ .故选 A.

7.B 提示:因为  $2bsin A=\sqrt{3}bcos C+\sqrt{3}ccos B$ ,所以由正弦定理,得  $2\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin C\cos B=\sqrt{3}\sin(B+C)=\sqrt{3}\sin A$ ,所以  $2\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A$ ,又  $\sin A\neq 0$ ,所以  $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,所以  $B=\frac{\pi}{3}$  或  $\frac{2\pi}{3}$ .因为  $AC$  边上中线长为  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ,  $a=2$ ,设  $AC$  中点为  $D$ ,所以  $\vec{BD}=\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{BC})$ ,所以  $|\vec{BD}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{BA}|^2+|\vec{BC}|^2+2\vec{BA}\cdot\vec{BC})$ ,即  $\frac{7}{4}=\frac{1}{4}(c^2+4+2c\cdot 2\cdot\cos B)$ .若  $B=\frac{\pi}{3}$ ,则  $7=c^2+4+2c\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$ ,即  $c^2+2c-3=0$ ,解得  $c=1$  (舍负),由余弦定理,得  $b=\sqrt{a^2+c^2-2accos B}=\sqrt{3}$ ,所以  $c^2+b^2=a^2$ ,则  $A=\frac{\pi}{2}$ ,这与  $\triangle ABC$  为钝角三角形矛盾,所以  $B=\frac{2\pi}{3}$ ,则  $7=c^2+4-2c$ ,解得  $c=3$  (舍负),所以  $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .故选 B.

8.C 提示:将  $y=\cos(x+\frac{2\pi}{3})$  图象上所有点的横坐标变为原来的  $\frac{1}{\omega}$  ( $\omega>0$ ) 倍,纵坐标不变,得到  $y=\cos(\omega x+\frac{2\pi}{3})$  的图象,设  $g(x)=\cos(\omega x+\frac{2\pi}{3})=\sin[\frac{\pi}{2}-(\omega x+\frac{2\pi}{3})]=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$ ,由  $0\leq x\leq\frac{2\pi}{3}$ ,得  $\frac{\pi}{6}\leq\omega x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ .因为  $g(x)$  在  $[0,\frac{2\pi}{3}]$  上恰有两个零点,所以  $2\pi\leq\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}<3\pi$ ,解得  $\frac{11}{4}\leq\omega<\frac{17}{4}$ .令  $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\omega x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ,  $k\in\mathbf{Z}$ ,解得  $-\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leq x\leq\frac{\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}$ ,  $k\in\mathbf{Z}$ ,令  $k=0$ ,得  $g(x)$  在  $[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}]$  上单调递减,又  $g(x)$  在  $[-\frac{12}{\pi},\frac{12}{\pi}]$  上单调递减,所以  $[-\frac{12}{\pi},\frac{12}{\pi}]\subseteq[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}]$ ,则  $-\frac{3\omega}{12}\leq-\frac{\pi}{12}$ ,又  $\omega>0$ ,解得  $0<\omega\leq 4$ .综上,  $\omega$  的取值范围是  $[\frac{11}{4},4]$ .故选 C.

## 二、多项选择题

9.ABD 提示: $\sin(-\frac{11\pi}{6})=\sin(-2\pi+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ .对于 A,  $2\sin 15^\circ\sin 75^\circ=2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ;对于 B,  $\cos 18^\circ\cos 42^\circ-\sin 18^\circ\sin 42^\circ=\cos(18^\circ+42^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ ;对于 C,  $2\cos^2 15^\circ-1=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;对于 D,由  $\tan 45^\circ=\frac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}=1$ ,得  $\frac{\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}=\frac{1}{2}$ .故选 ABD.

10.BD 提示:由  $a/b$ ,得  $m-2x(-3)=0$ ,解得  $m=-6$ ,故 A 错误;由  $a\perp b$ ,得  $1\times(-3)+2m=0$ ,解得  $m=\frac{3}{2}$ ,故 B 正确;由题意,得  $a-b=(4,2-m)$ ,因为  $|a-b|=5$ ,所以  $16+(2-m)^2=25$ ,解得  $m=-1$  或  $m=5$ ,故 C 错误;当  $m=-1$  时,  $a\cdot b=(1,2)\cdot(-3,-1)=-5$ ,所以  $\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,又  $\langle a,b\rangle\in[0,\pi]$ ,所以  $\langle a,b\rangle=\frac{3\pi}{4}$ ,即向量  $a,b$  的夹角是  $\frac{3\pi}{4}$ ,故 D 正确.故选 BD.

11.AD 提示:因为  $b^2+c^2-\sqrt{3}bc=a^2$ ,由余弦定理的推论,得  $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,所以  $A=\frac{\pi}{6}$ .由  $bc=\sqrt{3}\cdot a^2$ ,及  $b^2+c^2-\sqrt{3}bc=a^2$ ,消去  $a$ ,得  $\sqrt{3}b^2-4bc+\sqrt{3}c^2=0$ ,即  $(\sqrt{3}b-c)(b-\sqrt{3}c)=0$ ,所以  $c=\sqrt{3}b$  或  $b=\sqrt{3}c$ .当  $c=\sqrt{3}b$  时,  $a=b$ ,此时  $A=B=\frac{\pi}{6}$ ,  $C=\frac{2\pi}{3}$ ;当  $b=\sqrt{3}c$  时,  $a=c$ ,此时  $A=C=\frac{\pi}{6}$ .故选 AD.

12.BCD 提示:由图可得  $f(0)=\sin\varphi=\frac{1}{2}$ ,且位于增区间上,所以  $\varphi=2k_1\pi+\frac{\pi}{6}$ ,  $k_1\in\mathbf{Z}$ ,又  $0<\varphi<\pi$ ,所以  $\varphi=\frac{\pi}{6}$ .由  $\frac{3T}{4}>\frac{2\pi}{3}$ ,即  $\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}>\frac{2\pi}{3}$ ,得  $0<\omega<\frac{9}{4}$ .由  $f(\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=-1$ ,得  $\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2k_2\pi$ ,  $k_2\in\mathbf{Z}$ ,解得  $\omega=2+3k_2$ ,  $k_2\in\mathbf{Z}$ ,所以  $\omega=2$ ,所以  $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ .由图可知,原点右侧的第二个零点为  $\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ ,又  $f(x)$  是定义在闭区间上的偶函数,所以  $f(x)$  的定义域为  $[-\frac{11\pi}{12},\frac{11\pi}{12}]$ ,故 A 错误;当  $x\in[0,\frac{11\pi}{12}]$  时,  $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ ,则  $f(\frac{\pi}{6})=1$  为  $f(x)$  的最大值,故 B 正确;当  $x>0$  时,令  $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ,  $k\in\mathbf{Z}$ ,则  $\frac{\pi}{6}+k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{6}+k\pi$ ,  $k\in\mathbf{Z}$ ,又  $x\in[0,\frac{11\pi}{12}]$ ,所以当  $x>0$  时,  $f(x)$  的单调递减区间为  $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ ,又  $f(x)$  为偶函数,所以  $\sin(2x+\frac{\pi}{6})$  为偶函数,所以  $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ ,故 C 正确;当  $x\in[0,\frac{11\pi}{12}]$  时,  $2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}]$ ,令  $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})=0$ ,得  $2x+\frac{\pi}{6}=\pi$  或  $2\pi</$

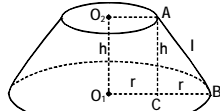
## 高考版答案页第 11 期

## 数学

面积  $S=4\pi R^2=\frac{20\pi}{3}$ , 故选 B.

4.D 提示: 将该几何体补成一个直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ , 由题意, 得四边形  $ABCD$  为菱形, 且  $\triangle ABC$  为等边三角形, 连接  $DC, BD$ , 易得  $AB_1 \parallel DC$ , 所以  $\angle BC_1D$  或 (或其补角) 是异面直线  $AB_1$  与  $BC_1$  所成的角. 设  $AB=1$ , 则  $BC_1=DC_1=\sqrt{2}$ ,  $BD=2\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{3}$ , 在  $\triangle BC_1D$  中, 由余弦定理的推论, 得  $\cos \angle BC_1D=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2}=\frac{1}{4}$ , 故选 D.

5.C 提示: 设圆台的上底面半径为  $r$ , 则下底面半径  $R=2r$ , 如图, 作  $AC \perp OB$ , 垂足为  $C$ , 则  $BC=r$ , 母线与底面所成的角  $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$ , 即  $\sin \angle ABC=\frac{3}{5}$ . 设圆台的母线长为  $l$ , 高为  $h$ , 则  $l=\frac{5}{4}r, h=\frac{3}{4}r$ , 因为圆台的体积为  $14\pi$ , 所以  $\frac{1}{3}\pi h(r^2+Rr+R^2)=14\pi$ , 解得  $r=2$ , 所以  $R=4, l=\frac{5}{2}$ . 所以圆台的侧面积  $S=\pi(r+R)l=15\pi$ , 故选 C.



6.D 提示: 取  $B_1C_1$  的中点  $M$ , 连接  $EM, FM$ , 则  $EM \parallel BB_1$ , 又  $AA_1 \parallel BB_1$ , 所以  $EM \parallel AA_1$ ,  $EM \perp$  底面  $AB_1C_1$ , 所以  $EM \perp FM$ ,  $\angle FEM$  为异面直线  $AA_1$  与  $EF$  所成的角, 则  $\angle FEM=45^\circ$ . 所以  $FM=EM$ , 设  $AB=a, AA=b$ , 则  $FM=\frac{1}{2}a, b=\frac{1}{2}a$ , 所以  $b=\frac{1}{2}a$ , 即  $a=2b$ , 所以该三棱柱的侧面积与表面积的比值为  $\frac{3ab}{3ab+2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{6b^2}{6b^2+2\sqrt{3}b^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ , 故选 D.

7.D 提示: 以  $A$  为原点, 以  $AB, AD, AP$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立空间直角坐标系, 因为正方形  $ABCD$  的边长为  $2, PA=2, E$  是  $PD$  中点, 所以  $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), E(0,1,1)$ , 则  $\overrightarrow{AB}=(2,0,0), \overrightarrow{AC}=(2,2,0), \overrightarrow{AE}=(0,1,1)$ , 设平面  $ACE$  的法向量为  $n=(x,y,z)$ , 则  $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AC}=2x+2y=0 \\ n \cdot \overrightarrow{AE}=y+z=0 \end{cases}$ , 令  $y=-1$ , 可得  $n=(1,-1,1)$ , 所以点  $B$  到平面  $ACE$  的距离  $d=\frac{|\overrightarrow{AB} \cdot n|}{|n|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 故选 D.

8.A 提示: 以  $A$  为原点, 以  $AD, AB, AP$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立空间直角坐标系, 设  $Q(a,b,0)(0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 1), PA=AB=BC=1, AD=1$ , 则  $A(0,0,0), D(2,0,0), P(0,0,1)$ , 则  $\overrightarrow{PD}=(2,0,-1), \overrightarrow{DQ}=(a-2,b,0)$ , 设平面  $QPD$  的法向量为  $m=(x,y,z)$ , 则  $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{PD}=0 \\ m \cdot \overrightarrow{DQ}=0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} 2x-z=0 \\ (a-2)x+by=0 \end{cases}$ , 取  $x=b$ , 则平面  $QPD$  的一个法向量为  $m=(b, -2a+2b, 2b)$ , 又  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 则  $PA \perp AB$ , 由  $\angle BAD=90^\circ$ , 得  $AB \perp AD$ , 又  $PA \cap AD=A, PA, AD \subset$  平面  $PAD$ , 所以  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 则平面  $PAD$  的一个法向量为  $n=(0,1,0)$ , 所以  $|\cos \langle m, n \rangle|=\frac{|\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}| \cdot |\overrightarrow{n}|}=\frac{2b}{\sqrt{(2-a)^2+5b^2}}$ , 又  $\cos 30^\circ$ , 即  $\frac{2b}{\sqrt{(2-a)^2+5b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 得  $b=\sqrt{\frac{(2-a)^2}{15}}$ , 又  $0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 1$ , 所以  $b=\sqrt{\frac{(2-a)^2}{15}}$  在  $[0,2]$  上单调递减, 所以  $b \in [0, \frac{2\sqrt{15}}{15}]$ , 又  $S_{\triangle ADQ}=\frac{1}{2}|AD| \cdot |b|=|b| \in [0, \frac{2\sqrt{15}}{15}]$ , 所以  $\triangle ADQ$  面积的最大值是  $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ , 故选 A.

二、多项选择题  
9.AC 提示: 设圆锥的底面半径为  $r$ , 母线为  $l$ , 由其侧面展开图是一个半圆, 得  $2\pi r=\frac{1}{2} \times 2\pi \times l$ , 则  $l=2r$ , 又圆锥的表面积为  $3\pi$ , 所以  $\pi rl+\pi r^2=3\pi r^2=3\pi$ , 解得  $r=1$ , 则  $l=2$ , 所以圆锥的高  $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}$ , 所以圆锥的侧面积  $S=\pi rl=2\pi$ , 体积  $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi \times 1 \times \sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ , 故选 AC.

10.ABC 提示: 因为  $D, F$  分别是  $AB, CA$  的中点, 所以  $DF \parallel BC$ , 因为  $DF \subset$  平面  $PDF, BC \not\subset$  平面  $PDF$ , 所以  $BC \parallel$  平面  $PDF$ , 故 A 正确; 因为  $\triangle ABC$  和  $\triangle PBC$  均为等腰三角形,  $E$  为  $BC$  的中点, 所以  $AE \perp BC, PE \perp BC$ , 因为  $AE \cap PE=E, AE, PE \subset$  平面  $PAE$ , 所以  $BC \perp$  平面  $PAE$ , 又  $DF \parallel BC$ , 所以  $DF \perp$  平面  $PAE$ , 故 B 正确; 因为  $DF \perp$  平面  $PAE, DF \subset$  平面  $PDF$ , 所以平面  $PDF \perp$  平面  $PAE$ , 故 C 正确. 要使平面  $PDF \perp$  平面  $ABC$ , 已知  $AE \perp DF$ , 则必须有  $AE \perp PD$  或  $AE \perp PF$ , 由条件知此垂直关系不一定成立, 故 D 错误. 故选 ABC.

11.BCD 提示: 以  $D$  为原点, 以  $DA, DC, DD_1$  所在的直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立空间直角坐标系  $Dxyz$ , 因为  $E, F, G$  分别为  $BC, CC_1, BB_1$  的中点, 则  $D(0,0,0)$ ,

$(-\infty, 0)$  上单调递减; 当  $a>0$  时,  $f(x)=\ln a+\ln x-\frac{1}{3}x^3(x>0), f'(x)=\frac{1-x^3}{x}$ , 令  $f'(x)<0$ , 即  $1-x^3<0$ , 得  $x>1$ ,  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 令  $f'(x)>0$ , 得  $0<x<1$ ,  $f(x)$  在  $(0,1)$  内单调递增.

综上, 当  $a<0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减; 当  $a>0$  时,  $f(x)$  在  $(0,1)$  内单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

(3) 当  $a=1$  时,  $g(x)=f(x)+t=\ln x-\frac{1}{3}x^3+t$  有两个不同的零点等价于  $t=\frac{1}{3}x^3-\ln x$  有两个不同的实根. 设  $h(x)=\frac{1}{3}x^3-\ln x$ , 则  $h'(x)=\frac{x^3-1}{x}$ , 令  $h'(x)<0$ , 得  $0<x<1$ , 则  $h(x)$  在  $(0,1)$  上单调递减, 令  $h'(x)>0$ , 得  $x>1$ , 则  $h(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又当  $x \rightarrow 0$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ ; 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ , 且  $h(x)_{\min}=h(1)=\frac{1}{3}$ , 所以  $t>\frac{1}{3}$ , 即  $t$  的取值范围为  $(\frac{1}{3}, +\infty)$ .

21. 解: (1) 当  $b=0$  时,  $f(x)=x^2e^x, f'(x)=x(x+2)e^x$ . 令  $f'(x)=0$ , 解得  $x=-2$ , 或  $x=0$ .

当  $x \in (-\infty, -2)$  时,  $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  单调递增; 当  $x \in (-2, 0)$  时,  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  单调递增. 所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, -2), (0, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(-2, 0)$ .

(2) 若  $f'(x)=(x^2+2x+b)e^x$ , 因为函数  $f(x)$  有两个不同的极值点, 即  $f'(x)$  有两个不同的零点, 所以方程  $f'(x)=0$  即  $x^2+2x+b=0$  有两个不同的实数根, 所以判别式  $\Delta=4-4b>0$ , 解得  $b<1$ . 设方程  $x^2+2x+b=0$  的两根分别为  $x_1, x_2$ , 不妨设  $x_1< x_2$ , 则  $x_1+x_2=-2, x_1x_2=b$ . 随着  $x$  的变化,  $f(x)$  和  $f'(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, x_1)$	$x_1$	$(x_1, x_2)$	$x_2$	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以  $x_1$  是函数  $f(x)$  的极大值点,  $x_2$  是函数  $f(x)$  的极小值点, 符合题意.

所以  $f(x_1) \cdot f(x_2)=e^{x_1} \cdot e^{x_2}=[x_1^2+2x_1+b] \cdot [x_2^2+2x_2+b] \cdot e^{x_1+x_2}=[b^2+b(4-2b)+b^2]e^{-2}=4be^{-2}$ . 因为  $f(x_1) \cdot f(x_2)=4e^{-2}$ , 则  $4be^{-2}=4e^{-2}$ , 得  $b=1$ , 不符合  $b<1$ , 故不存在实数  $b$  使得  $f(x_1) \cdot f(x_2)=4e^{-2}$ .

22. (1) 解: 当  $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$  时,  $f'(x)<0$ , 无零点; 当  $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  时,  $f'(x)=\cos x - x \sin x$ , 因为  $\tan x > \frac{1}{x}$ , 所以  $f'(x)=\cos x - x \sin x < 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$  上单调递减, 又  $f(-\pi)=\pi-\frac{3}{2}>0, f(-\frac{\pi}{2})=-\frac{3}{2}<0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$  内有 1 个零点, 故  $f(x)$  在  $(-\pi, 0)$  内有 1 个零点.

(2) 证明: 由  $g(x) \geq f(x)$ , 得  $a \leq \frac{2 \sin x - x \cos x}{x}$ , 令  $h(x)=\frac{2 \sin x - x \cos x}{x}, x \in (0, \pi), h'(x)=\frac{2 \cos x - 2 \sin x + x^2 \sin x}{x^2}$ , 令  $m(x)=2x \cos x - 2 \sin x + x^2 \sin x, m'(x)=x^2 \cos x$ , 当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $m'(x)>0, m(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 所以  $m(x)>m(0)=0$ ,  $h'(x)>0, h(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增. 当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $m'(x)=x^2 \cos x < 0$ , 所以  $m(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递减, 又  $m(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-2>0, m(\pi)=-2\pi$ , 故  $m(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上存在唯一的零点  $x_0$ , 所以  $m(x_0)=0$ , 即  $2x_0 \cos x_0 - 2 \sin x_0 + x_0^2 \sin x_0=0$ , 所以  $2 \sin x_0=2x_0 \cos x_0 + x_0^2 \sin x_0$ , 所以  $h(x_0)=\frac{2 \sin x_0 - x_0 \cos x_0}{x_0}=\cos x_0 + x_0 \sin x_0, x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 令  $\varphi(x)=\cos x + x \sin x, x \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \varphi'(x)=x \cos x < 0$ , 所以  $\varphi(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递减, 即  $h(x_0)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递减,  $h(x_0)<h(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$ , 故  $a \leq h(x_0)_{\max}<\frac{\pi}{2}$ .

## 第 35 期

## 第 2-3 版专题检测

## 一、单项选择题

1.A 提示: 对于 A, 若  $m \perp \alpha, n \perp \beta$ , 设直线  $m, n$  的方向向量分别为  $\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}$ , 则平面  $\alpha, \beta$  的法向量分别为  $\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}$ , 由  $m \perp n$ , 即  $\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n}=0$ , 则  $\alpha \perp \beta$ , 故 A 正确; 对于 B, 若  $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ , 则  $\alpha$  与  $\beta$  可能平行或相交, 故 B 错误; 对于 C, 若  $m \perp n, m \parallel \alpha, \alpha \perp \beta$ , 则  $n \perp \beta$ , 或  $n \parallel \beta$ , 故 C 错误; 对于 D, 若  $m \parallel n, m \perp \alpha$ , 则  $n \perp \alpha$ , 又  $\alpha \perp \beta$ , 则  $n \parallel \beta$  或  $n \subset \beta$ , 故 D 错误. 故选 A.

2.C 提示: 因为  $D, F$  分别是  $AB, CA$  的中点, 所以  $BC \parallel DF$ , 又  $DF \subset$  平面  $PBC, BC \not\subset$  平面  $PBC$ , 所以  $DF \parallel$  平面  $PBC$ , 故 A 正确; 由题意, 得  $P-ABC$  是正四面体, 所以  $PD \perp AB, CD \perp AB, PD \cap CD=D$ , 所以  $AB \perp$  平面  $PDC$ , 故 B 正确; 因为  $PE \perp BC, AE \perp BC, DE \cap AE=E$ , 所以  $BC \perp$  平面  $PAE$ , 又  $BC \subset$  平面  $ABC$ , 所以平面  $PAE \perp$  平面  $ABC$ , 故 D 正确. 故选 C.

3.B 提示: 取  $BD$  的中点  $E$ , 连接  $AE, CE$ , 则  $AE \perp BD, CE \perp BD$ , 因为平面  $ABD \perp$  平面  $BCD$ , 平面  $ABD \cap$  平面  $CBD=BD, AE \subset$  平面  $ABD, CE \subset$  平面  $CBD$ , 所以  $AE \perp$  平面  $CBD, CE \perp$  平面  $ABD$ . 取  $\triangle ABD$  的外心  $O_1$ ,  $\triangle BCD$  的外心  $O_2$ , 分别过  $O_1, O_2$  作平面  $ABD$  与平面  $BCD$  的垂线交于点  $O$ , 则  $O$  为该三棱锥外接球的球心, 连接  $OC$ , 由  $\triangle ABD$  与  $\triangle BCD$  均为边长为 2 的等边三角形, 得  $CO_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}, OO_2=OE=\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 设外接球的半径为  $R$ , 则  $R^2=OC^2=CO_2^2+OO_2^2=\frac{5}{3}$ , 所以该三棱锥外接球的表

$3 \log_5 3 = \log_5 5 - 3 \log_5 3 = \log_5 5 - \log_5 3 = \log_5 \frac{5}{3}$ , 则  $9^{a-3b} = 9^{\log_5 \frac{5}{3}} = 3^{2 \log_5 \frac{5}{3}} = 3^{\log_5 (\frac{5}{3})^2} = (\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9}$ .

14.5 提示: 由  $f(x)=x^3-alnx$ , 得  $f'(x)=3x^2-\frac{a}{x}$ , 所以  $f'(1)=3-a$ , 因为  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $2x+y+1=0$  平行, 所以  $f'(1)=-2$ , 则  $3-a=-2$ , 解得  $a=5$ .

15.  $[-1, +\infty)$  提示: 因为  $f(x)=x^2-\frac{1}{2} \ln x+ax$  在  $(1, +\infty)$  上没有零点, 且  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 所以  $f(x)=x^2-\frac{1}{2} \ln x+ax>0$ , 即  $a>\frac{\ln x}{2x}-x$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立. 设  $g(x)=\frac{\ln x}{2x}-x(x>1)$ , 则  $g'(x)=\frac{1-\ln x-2x^2}{2x^2}$ , 又  $y=1-\ln x-2x^2$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 且当  $x=1$  时,  $y=-1$ , 则  $y=1-\ln x-2x^2<0$ , 所以  $x>1$  时,  $g'(x)<0$ , 所以  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $g(x)<g(1)=-1$ , 所以  $a>-1$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $[-1, +\infty)$ .

16.3 提示: 由  $f(x)=x+x \ln x$ , 得  $f'(x)=m(x-1)>0$  对任意的  $x>1$  恒成立, 即  $m(x-1)<x+x \ln x$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立, 所以  $m<\frac{x \ln x+x}{x-1}$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立. 令  $h(x)=\frac{x \ln x+x}{x-1}(x>1)$ , 则  $h'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$ , 令  $g(x)=x-\ln x-2(x>1)$ , 则  $g'(x)=\frac{x-1}{x}>0$ , 所以  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增. 因为  $g(3)=1-\ln 3<0, g(4)=2-2 \ln 2>0$ , 所以  $g(x)=0$  在  $(1, +\infty)$  上存在唯一实根  $x_0$ , 且  $x_0 \in (3, 4)$ . 当  $1<x< x_0$  时,  $g(x)<0$ , 即  $h'(x)<0$ ; 当  $x>x_0$  时,  $g(x)>0$ , 即  $h'(x)>0$ , 所以  $h(x)$  在  $(1, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增. 又  $g(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$ , 所以  $\ln x_0=x_0-2$ , 所以  $h(x)_{\min}=h(x_0)=\frac{x_0 \ln x_0+x_0}{x_0-1}=\frac{x_0(x_0-2+1)}{x_0-1}=\frac{x_0}{x_0-1}$ , 所以  $m \cdot h(x)_{\min} \leq x_0$ , 又  $x_0 \in (3, 4)$ , 故整数  $m$  的最大值为 3.

## 四、解答题

17. 解: (1) 由题意, 得  $f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{x^2}(x>0)$ , 当  $x \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$  时,  $f'(x)>0$ ; 当  $x \in (1, 3)$  时,  $f'(x)<0$ , 所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(0, 1), (3, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(1, 3)$ .

(2) 由 (1) 知  $f(x)$  在  $[\frac{1}{e}, 1]$  上单调递增, 在  $(1, e]$  上单调递减, 则  $f(x)$  在  $[\frac{1}{e}, e]$  上的最大值为  $f(1)=-2$ . 因为  $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-3e+4, f(e)=e-\frac{3}{e}-4$ , 则  $f(\frac{1}{e})-f(e)=8-4(e-\frac{1}{e})<0$ , 所以  $f(x)$  在  $[\frac{1}{e}, e]$  上的最小值为  $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-3e+4$ .

18. 解: (1) 因为当  $a=0$  时,  $f(x)=e^x-x^2-1, f'(x)=e^x-2x$ , 所以由曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线的斜率为  $f'(0)=1$ , 又  $f(0)=0$ , 所以切线方程为  $y=x$ .  
(2) 对任意的实数  $x \in (0, +\infty)$ ,  $f(x)>0$  恒成立, 即  $2a \leq \frac{e^x}{x}-x$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立. 设  $g(x)=\frac{e^x}{x}-x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ,  $g'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$ , 令  $h(x)=e^x-x-1$ , 则  $h'(x)=e^x-1>h'(0)=0$ , 所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 即有  $h(x)>h(0)=0$ , 所以  $x>0$  时,  $g'(x)>0$ ,  $g(x)$  单调递增; 当  $0<x<1$  时,  $g'(x)<0$ ,  $g(x)$  单调递减, 所以  $g(x)_{\min}=g(1)=e-2$ . 所以  $2a \leq e-2$ , 得  $a \leq \frac{e-2}{2}$ , 所以  $a$  的最大值为  $\frac{e-2}{2}$ .

19. (1) 解: 由  $f(x)=ax-\ln x$ , 得  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x)=\frac{ax-1}{x}$ . 若  $a \leq 0$ ,  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 无极值. 若  $a>0$ , 当  $x \in (0, \frac{1}{a})$  时,  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$  时,  $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  单调递增, 所以  $x=\frac{1}{a}$  时,  $f(x)$  取得极小值, 极小值为  $f(\frac{1}{a})=1+\ln a$ , 无极大值.

综上, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上无极值; 当  $a>0$  时,  $f(x)$  的极小值为  $1+\ln a$ , 无极大值.

(2) 证明: 由 (1) 知, 当  $0<a<1$  时,  $f(x)$  的最小值为  $1+\ln a$ . 若  $\exists x \in (0, +\infty)$ , 使得  $f(x)<3a-a^2-\ln 2$ , 等价于  $f(x)_{\min}<3a-a^2-\ln 2$ , 所以  $1+\ln a<3a-a^2-\ln 2$ , 所以  $0<a<1$  时,  $a^2-3a+\ln a+1+\ln 2<0$  恒成立. 设  $g(a)=a^2-3a+\ln a+1+\ln 2$ , 定义域为  $(0, 1)$ , 则  $g'(a)=\frac{(2a-1)(a-1)}{a}$ , 当  $a \in (0, \frac{1}{2})$  时,  $g'(a)>0$ ,  $g(a)$  单调递增; 当  $a \in (\frac{1}{2}, 1)$  时,  $g'(a)<0$ ,  $g(a)$  单调递减, 所以  $g(a)_{\min}=g(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}<0$ , 所以  $0<a<1$  时,  $\exists x \in (0, +\infty)$ , 使得  $f(x)<3a-a^2-\ln 2$ .

20. 解: (1) 当  $a=2$  时,  $f(x)=\ln 2+\ln x-\frac{1}{3}x^3$ , 则  $f'(x)=\frac{1-x^3}{x}$ ,  $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{24}$ ,  $f'(\frac{1}{2})=\frac{7}{4}$ , 所以曲线  $y=f(x)$  在点  $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$  处的切线方程为  $y+\frac{1}{24}=\frac{7}{4}(x-\frac{1}{2})$ , 即  $21x-12y-11=0$ .  
(2) 当  $a<0$  时,  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0)$ , 易知  $f(x)$  在

11.  $x^{\frac{1}{3}}$ , 该函数在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 又  $f(a-1)>1=f(1)$ , 所以  $a-1>1$ , 解得  $a>2$ , 故选 B.

5.B 提示: 因为函数  $f(x)=\frac{1-ax, x<a}{x^2-4x+3, x \geq a}$ , 所以若  $a=0$ ,  $f(x)=\begin{cases} 1, x<0 \\ x^2-4x+3, x \geq 0 \end{cases}$ , 所以  $f(x)_{\min}=f(2)=-1$ , 故  $a=0$  符合题意; 若  $a<0$ , 当  $x<a$  时,  $f(x)=1-ax$  在  $(-\infty, a)$  上单调递增, 且当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , 则  $f(x)$  没有最小值, 故  $a=0$  不符合题意; 若  $a>0$ , 当  $x<a$  时,  $f(x)=1-ax$  在  $(-\infty, a)$  上单调递减,  $f(x)>f(a)=1-a^2$ , 当  $x \geq a$  时,  $f(x)_{\min}=\begin{cases} 1-a^2, 0<a<2 \\ a^2-4a+3, a \geq 2 \end{cases}$ , 因为  $f(x)$  存在最小值, 则需满足  $\begin{cases} 1-a^2 \geq -1 \\ 1-a^2 \geq a^2-4a+3 \end{cases}$ , 解得  $0<a \leq \sqrt{2}$ . 综上, 实数  $a$  的取值范围为  $[0, \sqrt{2}]$ , 故选 B.

6.C 提示: 作出函数  $f(x)$  的大致图象 (图略), 则  $0<a<1, x_1<0<x_2<1<x_3<2<x_4$ , 所以  $1-2^{\frac{x_1}{2}}=2^{-1}$ , 所以  $2^{\frac{x_1}{2}}=2$ ,  $-\log_2(x_3-1)=\log_2(x_4-1)$ , 所以  $\log_2(x_3-1)+\log_2(x_4-1)=0$ , 所以  $(x_3-1)(x_4-1)=1$ , 所以  $(2^{\frac{x_1}{2}}+a)^{\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{(x_3-1)(x_4-1)a}=2a+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}}=2\sqrt{2}$ , 当且仅当  $2a=\frac{1}{a}$ , 即  $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 等号成立, 所以  $(2^{\frac{x_1}{2}}+a)^{\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{(x_3-1)(x_4-1)a}$  的取值范围是  $[2\sqrt{2}, +\infty)$ , 故选 C.





扫码免费下载  
习题讲解 ppt

## 第 33 期

## 第2-3版专题检测

## 一、单项选择题

1.B 提示:要使函数  $f(x)$  有意义,需满足  $\begin{cases} 4-x>0 \\ 2^x-2\geq 0 \end{cases}$ ,解得  $1\leq x<4$ ,所以  $f(x)$  的定义域为  $[1,4)$ .故选 B.

2.A 提示:因为  $f(3)=2^{3-1}=1$ ,所以  $f(f(3))=f(1)=1^{1+1}=2$ .故选 A.

3.B 提示: $y=e^x$  为非奇非偶函数,故 A 错误; $y=x^3$  为奇函数,且是  $\mathbf{R}$  上的增函数,故 B 正确; $y=-\frac{1}{x}$  是奇函数,在  $(-\infty,0)$ ,  $(0,+\infty)$  上是增函数,但并非定义域上的增函数,故 C 错误; $y=e^{|x|}$  为偶函数,故 D 错误.故选 B.

4.B 提示:因为  $f(x)=\frac{x\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{e^{|x|}}=\frac{x\cos x}{e^{|x|}}$ ,定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(-x)=\frac{-x\cos(-x)}{e^{|-x|}}=-\frac{x\cos x}{e^{|x|}}=-f(x)$ ,所以  $f(x)$  为奇函数,排除 C、D;又  $x\in(0,\frac{\pi}{2})$  时,  $f(x)>0$ ,排除 A.故选 B.

5.A 提示:由题意,得  $m^2-m-5=1$ ,且  $m^2-4m+1>0$ ,解得  $m=-2$ .故选 A.

6.B 提示:因为经过 10h 过滤后减少了 20% 的污染物,所以  $P_0e^{-10\lambda}=80\%P_0$ ,解得  $k=-\frac{\ln 0.8}{10}$ .设为了使得污染物减少到原来的 10%,需要的时长大约为  $t$ h,则  $10\%P_0=P_0e^{\frac{\ln 0.8}{10}t}$ ,解得  $t=-\frac{10\ln 10}{\ln 0.8}=\frac{10+10\log 5}{\log 5-2}\approx 103.103-10=93(\text{h})$ ,所以还需要大约 93h.故选 B.

7.A 提示:令  $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$ ,  $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ,则  $g'(x)=\frac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$ ,因为  $f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$ ,所以  $g'(x)<0$ ,所以  $g(x)$  在  $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$  上单调递减,所以  $f(x)<2f(\frac{\pi}{3})\cos x$  等价于  $\frac{f(x)}{\cos x}<\frac{f(\frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}}$ ,即  $g(x)<g(\frac{\pi}{3})$ ,所以

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ ,即原不等式的解集为  $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ .故选 A.

8.D 提示:若  $m\leq 0$ ,显然  $f(x)$  不是恒大于零,则  $m>0$  (由 4 个选项可得),所以  $f(x)=e^m-\frac{1}{m}\ln x>0$  在  $(0,1]$  上恒成立.当  $x>1$  时,  $f(x)=e^m-\frac{1}{m}\ln x>0\Leftrightarrow e^m>\frac{1}{m}\ln x\Rightarrow$

$mx\cdot e^m>\ln x\Rightarrow \ln x=e^m$ ,令  $g(t)=e^t(t>0)$ ,  $g'(t)=(1+t)e^t>0$ ,则  $g(t)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递增.因为  $m>0$ ,  $\ln x>0(x>1)$ ,所以  $mx\cdot e^m>\ln x\cdot e^m\Rightarrow g(mx)>g(\ln x)$ ,则  $mx>\ln x$ ,所以  $m>\frac{\ln x}{x}$  在  $(1,+\infty)$  上恒成立.设  $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$ ,则  $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ,令  $h'(x)=0$ ,则  $x=e$ ,所以  $h(x)$  在  $(1,e)$  内单调递增,在  $(e,+\infty)$  上单调递减,所以  $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$ ,则  $m>\frac{1}{e}$ ,即  $m$  的取值范围为  $(\frac{1}{e},+\infty)$ .故选 D.

## 二、多项选择题

9.AC 提示:由图可知,函数  $f(x)$  在  $(0,1)$  内单调递减,在  $(1,6)$  内单调递增,在  $(6,+\infty)$  上单调递减,所以  $f(1)<f(6)$ ,故 A 正确;因为  $f(5)<f(6)$ ,故 B 错误;因为  $y=f(x)$  在  $(0,1)$  上单调递减,在  $(1,6)$  上单调递增,所以  $x=1$  是  $y=f(x)$  的极小值点,故 C 正确;因为在  $x=3$  的两侧  $f'(x)$  的符号相同,所以  $x=3$  不是  $y=f(x)$  的极小值点,故 D 错误.故选 AC.

10.BC 提示:因为  $f'(x)=-3x^2+4x-3$ ,设切点为  $(x_0,-x_0^2+2x_0^2-3x_0)$ ,则切线方程为  $y+x_0^2-2x_0^2+3x_0=(-3x_0^2+4x_0-3)(x-x_0)$ .将  $(-2,m)$  代入,得  $m-2x_0^2+4x_0^2-8x_0+6$ .令  $g(x)=2x^3+4x^2-8x+6$ ,则  $g'(x)=6x^2+8x-8=2(x+2)(3x-2)$ .由  $g'(x)>0$ ,得  $x>\frac{2}{3}$  或  $x<-2$ ,由  $g'(x)<0$ ,得  $-2< x<\frac{2}{3}$ ,所以  $g(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty,-2)$  和  $(\frac{2}{3},+\infty)$ ,单调递减区间为  $(-2,\frac{2}{3})$ ,所以  $g(x)$  的极大值为  $g(-2)=22$ ,极小值为  $g(\frac{2}{3})=\frac{82}{27}$ ,由题意,知  $y=g(x)$  的图象与直线  $y=m$  有三个交点,则  $\frac{82}{27}<m<22$ .又  $m\in\mathbf{Z}$ ,所以  $m=4,5,\dots,20,21$ .故选 BC.

11.BD 提示:构造函数  $g(x)=\frac{f(x)}{x^2+x^2}$  ( $x>0$ ),因为当  $x\in(0,+\infty)$  时,  $(x^2+x)^2f'(x)<(3x+2)f(x)$ ,所以  $g'(x)=\frac{(x^2+x)^2f'(x)-(3x+2)f(x)}{(x^2+x)^2}<0$ ,则  $g(x)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递减,所以  $g(\frac{1}{2})>g(1)>g(2)>$

$g(3)$ ,即  $\frac{f(\frac{1}{2})}{\frac{3}{8}}>\frac{f(1)}{2}>\frac{f(2)}{12}>\frac{f(3)}{36}$ ,所以  $f(3)<18f(1)$ ,即  $f(3)<6f(1)$ ,  $3f(1)<16f(\frac{1}{2})$ ,  $f(3)<3f(2)$ .故选 BD.

12.BD 提示:由  $f(x)=(x^2-3)e^x$ ,得  $f'(x)=(x^2+2x-3)e^x$ ,令  $f'(x)=0$ ,得  $x=-3$  或  $x=1$ .由  $f'(x)>0$ ,得  $x<-3$  或  $x>1$ ,由  $f'(x)<0$ ,得  $-3< x<1$ ,所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty,-3)$  和  $(1,+\infty)$ ,单调递减区间为  $(-3,1)$ ,所以当  $x=-3$  时,  $f(x)$  取得极大值  $f(-3)=6e^{-3}$ ,当  $x=1$  时,  $f(x)$  取得极小值  $f(1)=-2e$ ,又当  $x\rightarrow-\infty$  时,  $f(x)\rightarrow 0$ ;当  $x\rightarrow+\infty$  时,  $f(x)\rightarrow+\infty$ .对于 A,  $f(x)$  有极小值,也是最小值,且  $f(x)_{\min}=f(1)=-2e$ ,故 A 错误;对于 B,  $f(x)$  有极大值,无最大值,故 B 正确;对于 C,方程  $f(x)=b$  的零点个数,即函数  $y=f(x)$  的图象与直线  $y=b$  的交点个数,若  $y=f(x)$  的图象与直线  $y=b$  有 1 个交点,则  $b=-2e$  或  $b>6e^{-3}$ ,故 C 错误;对于 D,若  $y=f(x)$  的图象与直线  $y=b$  有 3 个交点,则  $0<b<6e^{-3}$ ,故 D 正确.故选 BD.

## 三、填空题

13.8 提示:原式  $=3^{2\times\frac{1}{2}\log_3 10}+(\frac{4}{3})^{\frac{4}{3}}-(\frac{3}{10})^{3\times(-\frac{1}{3})}+\log_2 2+\frac{1}{\log_3 3+\log_2 2}=10+\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{3}+\log_2 2+\log_3 3=10-3+1=8$ .

14. $y=5x-4$  提示:由  $f(x)=x^2e^{-1}$ ,得  $f'(1)=1$ ,  $f'(x)=(x^2+4x^3)e^{-1}$ ,所以  $f'(1)=5$ ,所以所求切线方程为  $y-1=5(x-1)$ ,即  $y=5x-4$ .

15.10 提示:作出函数  $y=f(x)$  的大致图象(图略),由图可知,  $0<n<1$ .当  $1<x\leq 4$  时,  $\log_3(x-1)=n$  有 2 个解  $x_1, x_2$ ,且  $\log_3(x_1-1)=-n, \log_3(x_2-1)=n$ ,得  $x_1=3^n+1, x_2=3^{n+1}$ ,所以  $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{3^n+1}+\frac{1}{3^{n+1}+1}=\frac{3^n+1}{3^{2n}+3^{n+1}+3^n+1}=1$ ;当  $x>4$  时,由  $x^2-10x+25=n$  有 2 个解  $x_3, x_4$ ,得  $x_3+x_4=10$ .所以  $(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})(x_3+x_4)=10$ .

16. $\frac{2}{e}$  提示:由题意,得  $a>0$ ,原不等式可转化为  $\ln e^a(e^a+1)\geq(x^2+1)\ln x^2$  在  $(0,+\infty)$  上恒成立.令  $f(x)=(x+1)\ln x(x>0)$ ,则  $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1, f''(x)=\frac{x-1}{x^2}$ ,所以  $f'(x)$  在  $(0,1)$  上单调递减,在  $(1,+\infty)$  上单调递增,所以  $f'(x)\geq f'(1)=2>0$ ,所以  $f(x)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递增.当  $x>0$  时,  $ax>0, x^2>0$ .又原不等式转化为  $f(e^a)\geq f(x^2)$ ,所以  $e^a\geq x^2$ ,则  $ax\geq 2\ln x$ ,即  $a\geq \frac{2\ln x}{x}$  在  $(0,+\infty)$  上恒成立.设  $h(x)=\frac{2\ln x}{x}$ ,则  $h'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}$ ,当  $x\in(0,e)$  时,  $h'(x)>0$ ,  $h(x)$  单调递增,当  $x\in(e,+\infty)$  时,  $h'(x)<0$ ,  $h(x)$  单调递减,所以  $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{2}{e}$ ,所以  $a\geq \frac{2}{e}$ .

## 四、解答题

17.解:(1)因为  $f(\frac{1}{2})=2$ ,所以  $f(f(\frac{1}{2}))=f(2)=2^2=4-3=1$ .

(2)由题意,得  $\begin{cases} a\leq 1 \\ 2a+1\geq 1 \end{cases}$ ,或  $\begin{cases} a>1 \\ a^2-3\geq 1 \end{cases}$ ,解得  $0\leq a\leq 1$  或  $a\geq 2$ ,所以实数  $a$  的取值范围为  $[0,1]\cup[2,+\infty)$ .  
18.解:(1)  $f(x)+6=0$ ,即  $(1+\log_3 x)(\log_3 x-4)+6=0$ ,所以  $(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$ ,所以  $\log_3 x=1$  或  $\log_3 x=2$ ,解得  $x=2$  或  $x=4$ ,所以原方程的解为  $x=2$  或  $x=4$ .

(2)不等式  $2^{x^2}\leq 4^{3x-2}$ ,即  $2^{x^2}\leq 2^{6x-4}$ ,则  $x^2+x\leq 6x-4$ ,解得  $1\leq x\leq 4$ ,则  $M=\{x|1\leq x\leq 4\}$ .

由  $f(x)=\log_3(2x)\cdot\log_3\frac{x}{16}=(\log_3 x+1)(\log_3 x-4)=(\log_3 x)^2-3\log_3 x-4$ ,令  $\log_3 x=t(1\leq t\leq 4)$ ,则  $0\leq t\leq 2, y=t^2-3t-4$ ,所以  $-\frac{25}{4}\leq y\leq -4$ ,所以函数  $f(x)(x\in M)$  的值域为  $[-\frac{25}{4},-4]$ .

19.解:(1)  $f'(x)=4ax^3+3bx^2$ ,因为  $f(x)=ax^4+bx^3$  在  $x=1$  处取得极值-1,所以  $\begin{cases} f'(1)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases}$ ,即  $\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+3b=0 \end{cases}$ ,解得  $\begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$ ,所以  $f(x)=3x^4-4x^3$ ,  $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$ ,令  $f'(x)>0$ ,得  $x>1$ ,令  $f'(x)<0$ ,得  $x<1$  且  $x\neq 0$ ,所以  $f(x)$  在  $(-\infty,0)$ ,  $(0,1)$  上单调递减,在  $(1,+\infty)$  上单调递增,所以  $f(x)$  在  $x=1$  处取极小值,符合题意.所以  $a=3, b=-4$ .

(2)因为  $g(x)=f(x)-mx=3x^4-4x^3-mx$  在  $[-1,1]$  上单调递增,所以  $g'(x)=12x^3-12x^2-m\geq 0$  在  $[-1,1]$  上恒成立,即  $m\leq 12(x^3-x^2)$  在  $[-1,1]$  上恒成立.令  $h(x)=12(x^3-x^2)(-1\leq x\leq 1)$ ,则  $h'(x)=12(3x^2-2x)$ ,令  $h'(x)<0$ ,得  $0<x<\frac{2}{3}$ ,令  $h'(x)>0$ ,得  $-1\leq x<0$  或  $\frac{2}{3}<x\leq 1$ ,所以  $h(x)$  在  $(-1,0)$ ,  $(\frac{2}{3},1)$  内单调递增,在  $(0,\frac{2}{3})$  内单调递减,  $h(-1)=-24, h(\frac{2}{3})=-\frac{16}{9}$ ,则  $h(x)_{\min}=-24$ ,所以  $m\leq -24$ ,即  $m$  的取值范围为  $(-\infty,-24]$ .

20.解:(1)当  $a=0$  时,  $f(x)=x\ln x+x, f'(x)=\ln x+2$ ,所以切线的斜率为  $f'(1)=2$ ,又  $f(1)=1$ ,所以切线方程为  $y-1=2(x-1)$ ,即  $2x-y-1=0$ .

(2)当  $0<x<1$  时,  $f(x)>0$  恒成立,即  $a>\frac{x\ln x+x}{x-1}$  在  $(0,1)$  上恒成立.令  $g(x)=\frac{x\ln x+x}{x-1}$ ,则  $g'(x)=\frac{(x^2+x)f'(x)-(x^2+2x)f(x)}{(x^2+x)^2}=\frac{(x^2+x)f'(x)-(3x+2)f(x)}{x^2(x+1)^2}<0$ ,则  $g(x)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递减,所以  $g(\frac{1}{2})>g(1)>g(2)>$

$g(3)$ ,即  $\frac{f(\frac{1}{2})}{\frac{3}{8}}>\frac{f(1)}{2}>\frac{f(2)}{12}>\frac{f(3)}{36}$ ,所以  $f(3)<18f(1)$ ,即  $f(3)<6f(1)$ ,  $3f(1)<16f(\frac{1}{2})$ ,  $f(3)<3f(2)$ .故选 BD.

12.BD 提示:由  $f(x)=(x^2-3)e^x$ ,得  $f'(x)=(x^2+2x-3)e^x$ ,令  $f'(x)=0$ ,得  $x=-3$  或  $x=1$ .由  $f'(x)>0$ ,得  $x<-3$  或  $x>1$ ,由  $f'(x)<0$ ,得  $-3< x<1$ ,所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty,-3)$  和  $(1,+\infty)$ ,单调递减区间为  $(-3,1)$ ,所以当  $x=-3$  时,  $f(x)$  取得极大值  $f(-3)=6e^{-3}$ ,当  $x=1$  时,  $f(x)$  取得极小值  $f(1)=-2e$ ,又当  $x\rightarrow-\infty$  时,  $f(x)\rightarrow 0$ ;当  $x\rightarrow+\infty$  时,  $f(x)\rightarrow+\infty$ .对于 A,  $f(x)$  有极小值,也是最小值,且  $f(x)_{\min}=f(1)=-2e$ ,故 A 错误;对于 B,  $f(x)$  有极大值,无最大值,故 B 正确;对于 C,方程  $f(x)=b$  的零点个数,即函数  $y=f(x)$  的图象与直线  $y=b$  的交点个数,若  $y=f(x)$  的图象与直线  $y=b$  有 1 个交点,则  $b=-2e$  或  $b>6e^{-3}$ ,故 C 错误;对于 D,若  $y=f(x)$  的图象与直线  $y=b$  有 3 个交点,则  $0<b<6e^{-3}$ ,故 D 正确.故选 BD.

三、填空题  
13.8 提示:原式  $=3^{2\times\frac{1}{2}\log_3 10}+(\frac{4}{3})^{\frac{4}{3}}-(\frac{3}{10})^{3\times(-\frac{1}{3})}+\log_2 2+\frac{1}{\log_3 3+\log_2 2}=10+\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{3}+\log_2 2+\log_3 3=10-3+1=8$ .

14. $y=5x-4$  提示:由  $f(x)=x^2e^{-1}$ ,得  $f'(1)=1$ ,  $f'(x)=(x^2+4x^3)e^{-1}$ ,所以  $f'(1)=5$ ,所以所求切线方程为  $y-1=5(x-1)$ ,即  $y=5x-4$ .

15.10 提示:作出函数  $y=f(x)$  的大致图象(图略),由图可知,  $0<n<1$ .当  $1<x\leq 4$  时,  $\log_3(x-1)=n$  有 2 个解  $x_1, x_2$ ,且  $\log_3(x_1-1)=-n, \log_3(x_2-1)=n$ ,得  $x_1=3^n+1, x_2=3^{n+1}$ ,所以  $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{3^n+1}+\frac{1}{3^{n+1}+1}=\frac{3^n+1}{3^{2n}+3^{n+1}+3^n+1}=1$ ;当  $x>4$  时,由  $x^2-10x+25=n$  有 2 个解  $x_3, x_4$ ,得  $x_3+x_4=10$ .所以  $(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})(x_3+x_4)=10$ .

16. $\frac{2}{e}$  提示:由题意,得  $a>0$ ,原不等式可转化为  $\ln e^a(e^a+1)\geq(x^2+1)\ln x^2$  在  $(0,+\infty)$  上恒成立.令  $f(x)=(x+1)\ln x(x>0)$ ,则  $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1, f''(x)=\frac{x-1}{x^2}$ ,所以  $f'(x)$  在  $(0,1)$  上单调递减,在  $(1,+\infty)$  上单调递增,所以  $f'(x)\geq f'(1)=2>0$ ,所以  $f(x)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递增.当  $x>0$  时,  $ax>0, x^2>0$ .又原不等式转化为  $f(e^a)\geq f(x^2)$ ,所以  $e^a\geq x^2$ ,则  $ax\geq 2\ln x$ ,即  $a\geq \frac{2\ln x}{x}$  在  $(0,+\infty)$  上恒成立.设  $h(x)=\frac{2\ln x}{x}$ ,则  $h'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}$ ,当  $x\in(0,e)$  时,  $h'(x)>0$ ,  $h(x)$  单调递增,当  $x\in(e,+\infty)$  时,  $h'(x)<0$ ,  $h(x)$  单调递减,所以  $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{2}{e}$ ,所以  $a\geq \frac{2}{e}$ .

## 四、解答题

17.解:(1)因为  $f(\frac{1}{2})=2$ ,所以  $f(f(\frac{1}{2}))=f(2)=2^2=4-3=1$ .

(2)由题意,得  $\begin{cases} a\leq 1 \\ 2a+1\geq 1 \end{cases}$ ,或  $\begin{cases} a>1 \\ a^2-3\geq 1 \end{cases}$ ,解得  $0\leq a\leq 1$  或  $a\geq 2$ ,所以实数  $a$  的取值范围为  $[0,1]\cup[2,+\infty)$ .

18.解:(1)  $f(x)+6=0$ ,即  $(1+\log_3 x)(\log_3 x-4)+6=0$ ,所以  $(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$ ,所以  $\log_3 x=1$  或  $\log_3 x=2$ ,解得  $x=2$  或  $x=4$ ,所以原方程的解为  $x=2$  或  $x=4$ .

(2)不等式  $2^{x^2}\leq 4^{3x-2}$ ,即  $2^{x^2}\leq 2^{6x-4}$ ,则  $x^2+x\leq 6x-4$ ,解得  $1\leq x\leq 4$ ,则  $M=\{x|1\leq x\leq 4\}$ .

由  $f(x)=\log_3(2x)\cdot\log_3\frac{x}{16}=(\log_3 x+1)(\log_3 x-4)=(\log_3 x)^2-3\log_3 x-4$ ,令  $\log_3 x=t(1\leq t\leq 4)$ ,则  $0\leq t\leq 2, y=t^2-3t-4$ ,所以  $-\frac{25}{4}\leq y\leq -4$ ,所以函数  $f(x)(x\in M)$  的值域为  $[-\frac{25}{4},-4]$ .

19.解:(1)  $f'(x)=4ax^3+3bx^2$ ,因为  $f(x)=ax^4+bx^3$  在  $x=1$  处取得极值-1,所以  $\begin{cases} f'(1)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases}$ ,即  $\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+3b=0 \end{cases}$ ,解得  $\begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$ ,所以  $f(x)=3x^4-4x^3$ ,  $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$ ,令  $f'(x)>0$ ,得  $x>1$ ,令  $f'(x)<0$ ,得  $x<1$  且  $x\neq 0$ ,所以  $f(x)$  在  $(-\infty,0)$ ,  $(0,1)$  上单调递减,在  $(1,+\infty)$  上单调递增,所以  $f(x)$  在  $x=1$  处取极小值,符合题意.所以  $a=3, b=-4$ .

(2)因为  $g(x)=f(x)-mx=3x^4-4x^3-mx$  在  $[-1,1]$  上单调递增,所以  $g'(x)=12x^3-12x^2-m\geq 0$  在  $[-1,1]$  上恒成立,即  $m\leq 12(x^3-x^2)$  在  $[-1,1]$  上恒成立.令  $h(x)=12(x^3-x^2)(-1\leq x\leq 1)$ ,则  $h'(x)=12(3x^2-2x)$ ,令  $h'(x)<0$ ,得  $0<x<\frac{2}{3}$ ,令  $h'(x)>0$ ,得  $-1\leq x<0$  或  $\frac{2}{3}<x\leq 1$ ,所以  $h(x)$  在  $(-1,0)$ ,  $(\frac{2}{3},1)$  内单调递增,在  $(0,\frac{2}{3})$  内单调递减,  $h(-1)=-24, h(\frac{2}{3})=-\frac{16}{9}$ ,则  $h(x)_{\min}=-24$ ,所以  $m\leq -24$ ,即  $m$  的取值范围为  $(-\infty,-24]$ .

20.解:(1)当  $a=0$  时,  $f(x)=x\ln x+x, f'(x)=\ln x+2$ ,所以切线的斜率为  $f'(1)=2$ ,又  $f(1)=1$ ,所以切线方程为  $y-1=2(x-1)$ ,即  $2x-y-1=0$ .

(2)当  $0<x<1$  时,  $f(x)>0$  恒成立,即  $a>\frac{x\ln x+x}{x-1}$  在  $(0,1)$  上恒成立.令  $g(x)=\frac{x\ln x+x}{x-1}$ ,则  $g'(x)=\frac{(x^2+x)f'(x)-(x^2+2x)f(x)}{(x^2+x)^2}=\frac{(x^2+x)f'(x)-(3x+2)f(x)}{x^2(x+1)^2}<0$ ,则  $g(x)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递减,所以  $g(\frac{1}{2})>g(1)>g(2)>$

$g(3)$ ,即  $\frac{f(\frac{1}{2})}{\frac{3}{8}}>\frac{f(1)}{2}>\frac{f(2)}{12}>\frac{f(3)}{36}$ ,所以  $f(3)<18f(1)$ ,即  $f(3)<6f(1)$ ,  $3f(1)<16f(\frac{1}{2})$ ,  $f(3)<3f(2)$ .故选 BD.

$OB, OP$  所在的直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴,建立空间直角坐标系,则  $O(0,0,0), C(2,0,0), B(0,2,0), A(-2,0,0), P(0,0,2)$ ,设  $\vec{PM}=\lambda\vec{PA}+\mu\vec{AP}, \lambda\in[0,1], \mu\in[0,1]$ ,则  $\vec{OM}=\lambda\vec{OA}+(1-\lambda)\vec{OP}=(-2\lambda,0,2-2\lambda)$ ,所以  $M(-2\lambda,0,2-2\lambda)$ ,所以  $\vec{MC}=(2\lambda+2,0,2\lambda-2), \vec{BC}=(2,-2,0)$ ,设平面  $BCM$  的法向量为  $\vec{m}=(x,y,z)$ ,则  $\begin{cases} \vec{m}\cdot\vec{MC}=(2\lambda+2)x+(2\lambda-2)z=0 \\ \vec{m}\cdot\vec{BC}=2x-2y=0 \end{cases}$ ,取  $x=1-\lambda$ ,得  $\vec{m}=(1-\lambda,1-\lambda,\lambda+1)$ ,设平面  $PBC$  的法向量为  $\vec{n}=(a,b,c)$ ,因为  $\vec{PB}=(0,2,-2), \vec{PC}=(2,0,-2)$ ,所以  $\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{PB}=2b-2c=0 \\ \vec{n}\cdot\vec{PC}=2a-2c=0 \end{cases}$ ,取  $c=1$ ,得  $\vec{n}=(1,1,1)$ .设平面  $PBC$  与平面  $BCM$  所成角为  $\theta$ ,由图知  $\theta$  为锐角,因为平面  $PBC$  与平面  $BCM$  所成角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,所以  $\cos\theta=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}$ ,即  $\frac{|3-1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,整理得  $21\lambda^2-2\lambda-3=0$ ,解得  $\lambda=\frac{1}{3}$  或  $\lambda=-\frac{3}{7}$  (舍去),所以在棱  $PA$  上存在一点  $M$ ,使平面  $PBC$  与平面  $BCM$  所成角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,此时  $\frac{PM}{PA}=\frac{1}{3}$ .

## 第 34 期

## 第2-3版专题检测

## 一、单项选择题

1.D 提示:由  $b(3,-4)$ ,得  $|b|=5$ ,则向量  $a$  在向量  $b$  上的投影向量为

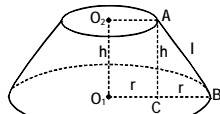
## 高考版答案页第 11 期

## 数学

面积  $S=4\pi R^2=\frac{20\pi}{3}$ , 故选 B.

4.D 提示: 将该几何体补成一个直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ , 由题意, 得四边形  $ABCD$  为菱形, 且  $\triangle ABC$  为等边三角形, 连接  $DC, BD$ , 易得  $AB_1 \parallel DC$ , 所以  $\angle BC_1D$  或(其补角)是异面直线  $AB_1$  与  $BC_1$  所成的角. 设  $AB=1$ , 则  $BC_1=DC_1=\sqrt{2}$ ,  $BD=2\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{3}$ , 在  $\triangle BC_1D$  中, 由余弦定理的推论, 得  $\cos \angle BC_1D=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2}=\frac{1}{4}$ , 故选 D.

5.C 提示: 设圆台的上底面半径为  $r$ , 则下底面半径  $R=2r$ . 如图, 作  $AC \perp OB$ , 垂足为  $C$ . 则  $BC=r$ , 母线与底面所成的角的正弦值为  $\frac{3}{5}$ , 即  $\sin \angle ABC=\frac{3}{5}$ . 设圆台的母线长为  $l$ , 高为  $h$ , 则  $l=\frac{5}{4}r, h=\frac{3}{4}r$ . 因为圆台的体积为  $14\pi$ , 所以  $\frac{1}{3}\pi h(r^2+Rr+R^2)=14\pi$ , 解得  $r=2$ , 所以  $R=4, l=\frac{5}{2}$ . 所以圆台的侧面积  $S=\pi(r+R)l=15\pi$ . 故选 C.



6.D 提示: 取  $B_1C_1$  的中点  $M$ . 连接  $EM, FM$ , 则  $EM \parallel BB_1$ , 又  $AA_1 \parallel BB_1$ , 所以  $EM \parallel AA_1$ .  $EM \perp$  底面  $AB_1C_1$ , 所以  $EM \perp FM$ .  $\angle FEM$  为异面直线  $AA_1$  与  $EF$  所成的角. 则  $\angle FEM=45^\circ$ . 所以  $FM=EM$ . 设  $AB=a, AA=b$ , 则  $FM=\frac{1}{2}a, B_1F=\frac{1}{2}a$ , 所以  $b=\frac{1}{2}a$ , 即  $a=2b$ , 所以该三棱柱的侧面积与表面积的比值为  $\frac{3ab}{3ab+2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{6b^2}{6b^2+2\sqrt{3}b^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ , 故选 D.

7.D 提示: 以  $A$  为原点, 以  $AB, AD, AP$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立空间直角坐标系. 因为正方形  $ABCD$  的边长为  $2$ ,  $PA=2$ .  $E$  是  $PD$  中点, 所以  $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), E(0,1,1)$ . 则  $\vec{AB}=(2,0,0), \vec{AC}=(2,2,0), \vec{AE}=(0,1,1)$ . 设平面  $ACE$  的法向量为  $n=(x,y,z)$ , 则  $\begin{cases} n \cdot \vec{AC}=2x+2y=0 \\ n \cdot \vec{AE}=y+z=0 \end{cases}$ , 令  $y=-1$ , 可得  $n=(1,-1,1)$ . 所以点  $B$  到平面  $ACE$  的距离  $d=\frac{|\vec{AB} \cdot n|}{|n|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 故选 D.

8.A 提示: 以  $A$  为原点, 以  $AD, AB, AP$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立空间直角坐标系, 设  $Q(a,b,0)(0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 1)$ .  $PA=AB=BC=1, AD=1$ , 则  $A(0,0,0), D(2,0,0), P(0,0,1)$ . 则  $\vec{PD}=(2,0,-1), \vec{DQ}=(a-2,b,0)$ . 设平面  $QPD$  的法向量为  $m=(x,y,z)$ , 则  $\begin{cases} m \cdot \vec{PD}=0 \\ m \cdot \vec{DQ}=0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} 2x-z=0 \\ (a-2)x+by=0 \end{cases}$ . 取  $x=b$ , 则平面  $QPD$  的一个法向量为  $m=(b, -2a+2b, 2b)$ . 又  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 则  $PA \perp AB$ . 由  $\angle BAD=90^\circ$ , 得  $AB \perp AD$ , 又  $PA \cap AD=A$ ,  $PA, AD \subset$  平面  $PAD$ , 所以  $AB \perp$  平面  $PAD$ . 则平面  $PAD$  的一个法向量为  $n=(0,1,0)$ . 所以  $|\cos \langle m, n \rangle|=\frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}=\frac{2b}{\sqrt{(2-a)^2+5b^2}}$ . 又  $\cos 30^\circ$ , 即  $\frac{2b}{\sqrt{(2-a)^2+5b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 得  $b=\sqrt{\frac{(2-a)^2}{15}}$ . 又  $0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 1$ , 所以  $b=\sqrt{\frac{(2-a)^2}{15}}$  在  $[0,2]$  上单调递减, 所以  $b \in [0, \frac{2\sqrt{15}}{15}]$ . 又  $S_{\triangle ADQ}=\frac{1}{2}|\vec{AD}| \cdot |\vec{b}|=|\vec{b}| \in [0, \frac{2\sqrt{15}}{15}]$ . 所以  $\triangle ADQ$  面积的最大值是  $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ . 故选 A.

二、多项选择题  
9.AC 提示: 设圆锥的底面半径为  $r$ , 母线为  $l$ . 由其侧面展开图是一个半圆, 得  $2\pi r=\frac{1}{2} \times 2\pi \times l$ , 则  $l=2r$ . 又圆锥的表面积为  $3\pi$ , 所以  $\pi rl+\pi r^2=3\pi r^2=3\pi$ , 解得  $r=1$ , 则  $l=2$ . 所以圆锥的高  $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}$ . 所以圆锥的侧面积  $S=\pi rl=2\pi$ , 体积  $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi \times 1 \times \sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ . 故选 AC.

10.ABC 提示: 因为  $D, F$  分别是  $AB, CA$  的中点, 所以  $DF \parallel BC$ . 因为  $DF \subset$  平面  $PDF, BC \not\subset$  平面  $PDF$ , 所以  $BC \parallel$  平面  $PDF$ . 故 A 正确. 因为  $\triangle ABC$  和  $\triangle PBC$  均为等腰三角形,  $E$  为  $BC$  的中点, 所以  $AE \perp BC, PE \perp BC$ . 因为  $AE \cap PE=E, AE, PE \subset$  平面  $PAE$ , 所以  $BC \perp$  平面  $PAE$ . 又  $DF \parallel BC$ , 所以  $DF \perp$  平面  $PAE$ . 故 B 正确. 因为  $DF \perp$  平面  $PAE, DF \subset$  平面  $PDF$ , 所以平面  $PDF \perp$  平面  $PAE$ . 故 C 正确. 要使平面  $PDF \perp$  平面  $ABC$ , 已知  $AE \perp DF$ , 则必须有  $AE \perp PD$  或  $AE \perp PF$ . 由条件知此垂直关系不一定成立, 故 D 错误. 故选 ABC.

11.BCD 提示: 以  $D$  为原点, 以  $DA, DC, DD_1$  所在的直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立空间直角坐标系  $Dxyz$ . 因为  $E, F, G$  分别为  $BC, CC_1, BB_1$  的中点, 则  $D(0,0,0)$ ,

$(-\infty, 0)$  上单调递减; 当  $a>0$  时,  $f(x)=\ln a+\ln x-\frac{1}{3}x^3(x>0), f'(x)=\frac{1-x^3}{x}$ , 令  $f'(x)<0$ , 即  $1-x^3<0$ , 得  $x>1$ ,  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 令  $f'(x)>0$ , 得  $0<x<1$ ,  $f(x)$  在  $(0,1)$  内单调递增.

综上, 当  $a<0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减; 当  $a>0$  时,  $f(x)$  在  $(0,1)$  内单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

(3) 当  $a=1$  时,  $g(x)=f(x)+t=\ln x-\frac{1}{3}x^3+t$  有两个不同的零点等价于  $t=\frac{1}{3}x^3-\ln x$  有两个不同的实根. 设  $h(x)=\frac{1}{3}x^3-\ln x$ , 则  $h'(x)=\frac{x^3-1}{x}$ , 令  $h'(x)<0$ , 得  $0<x<1$ , 则  $h(x)$  在  $(0,1)$  上单调递减, 令  $h'(x)>0$ , 得  $x>1$ , 则  $h(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增. 又当  $x \rightarrow 0$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ ; 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ , 且  $h(x)_{\min}=h(1)=\frac{1}{3}$ , 所以  $t>\frac{1}{3}$ , 即  $t$  的取值范围为  $(\frac{1}{3}, +\infty)$ .

21. 解: (1) 当  $b=0$  时,  $f(x)=x^2e^x, f'(x)=x(x+2)e^x$ . 令  $f'(x)=0$ , 解得  $x=-2$  或  $x=0$ .

当  $x \in (-\infty, -2)$  时,  $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  单调递增; 当  $x \in (-2, 0)$  时,  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  单调递增. 所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, -2), (0, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(-2, 0)$ .

(2) 若  $f'(x)=(x^2+2x+b)e^x$ , 因为函数  $f(x)$  有两个不同的极值点, 即  $f'(x)$  有两个不同的零点, 所以方程  $f'(x)=0$  即  $x^2+2x+b=0$  有两个不同的实数根, 所以判别式  $\Delta=4-4b>0$ , 解得  $b<1$ . 设方程  $x^2+2x+b=0$  的两根分别为  $x_1, x_2$ . 不妨设  $x_1< x_2$ , 则  $x_1+x_2=-2, x_1x_2=b$ . 随着  $x$  的变化,  $f(x)$  和  $f'(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, x_1)$	$x_1$	$(x_1, x_2)$	$x_2$	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以  $x_1$  是函数  $f(x)$  的极大值点,  $x_2$  是函数  $f(x)$  的极小值点, 符合题意.

所以  $f(x_1) \cdot f(x_2)=e^{x_1} \cdot e^{x_2}=[x_1^2+2x_1+b] \cdot [x_2^2+2x_2+b] \cdot e^{x_1+x_2}=[b^2+b(4-2b)+b^2]e^{-2}=4be^{-2}$ . 因为  $f(x_1) \cdot f(x_2)=4e^{-2}$ , 则  $4be^{-2}=4e^{-2}$ , 得  $b=1$ , 不符合  $b<1$ , 故不存在实数  $b$  使得  $f(x_1) \cdot f(x_2)=4e^{-2}$ .

22. (1) 解: 当  $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$  时,  $f'(x)<0$ , 无零点; 当  $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  时,  $f'(x)=\cos x - x \sin x$ . 因为  $\tan x > \frac{1}{x}$ , 所以  $f'(x)=\cos x - x \sin x < 0$ . 则  $f(x)$  在  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$  上单调递减, 又  $f(-\pi)=\pi-\frac{3}{2}>0, f(-\frac{\pi}{2})=-\frac{3}{2}<0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$  内有 1 个零点, 故  $f(x)$  在  $(-\pi, 0)$  内有 1 个零点.

(2) 证明: 由  $g(x) \geq f(x)$ , 得  $a \leq \frac{2 \sin x - x \cos x}{x}$ . 令  $h(x)=\frac{2 \sin x - x \cos x}{x}, x \in (0, \pi)$ .  $h'(x)=\frac{2 \cos x - 2 \sin x + x^2 \sin x}{x^2}$ . 令  $m(x)=2x \cos x - 2 \sin x + x^2 \sin x, m'(x)=x^2 \cos x$ . 当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $m'(x)>0, m(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 所以  $m(x)>m(0)=0$ ,  $h'(x)>0, h(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增. 当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $m'(x)=x^2 \cos x < 0$ , 所以  $m(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递减, 又  $m(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-2>0, m(\pi)=-2\pi$ . 故  $m(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上存在唯一的零点  $x_0$ . 所以  $m(x_0)=0$ , 即  $2x_0 \cos x_0 - 2 \sin x_0 + x_0^2 \sin x_0=0$ , 所以  $2 \sin x_0=2x_0 \cos x_0 + x_0^2 \sin x_0$ . 所以  $h(x_0)=\frac{2 \sin x_0 - x_0 \cos x_0}{x_0}=\cos x_0 + x_0 \sin x_0$ .  $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ . 令  $\varphi(x)=\cos x + x \sin x, x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .  $\varphi'(x)=x \cos x < 0$ , 所以  $\varphi(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递减, 即  $h(x_0)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递减.  $h(x_0)<h(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$ , 故  $a \leq h(x_0)_{\max}<\frac{\pi}{2}$ .

## 第 35 期

## 第 2-3 版专题检测

## 一、单项选择题

1.A 提示: 对于 A, 若  $m \perp \alpha, n \perp \beta$ . 设直线  $m, n$  的方向向量分别为  $\vec{m}, \vec{n}$ . 则平面  $\alpha, \beta$  的法向量分别为  $\vec{m}, \vec{n}$ . 由  $m \perp n$ , 即  $\vec{m} \perp \vec{n}$ , 则  $\alpha \perp \beta$ . 故 A 正确. 对于 B, 若  $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ , 则  $\alpha$  与  $\beta$  可能平行或相交, 故 B 错误. 对于 C, 若  $m \perp n, m \parallel \alpha, \alpha \perp \beta$ , 则  $n \perp \beta$ , 或  $n$  与  $\beta$  相交, 故 C 错误. 对于 D, 若  $m \parallel n, m \perp \alpha$ , 则  $n \perp \alpha$ , 又  $\alpha \perp \beta$ , 则  $n \parallel \beta$  或  $n \subset \beta$ . 故 D 错误. 故选 A.

2.C 提示: 因为  $D, F$  分别是  $AB, CA$  的中点, 所以  $BC \parallel DF$ . 又  $DF \subset$  平面  $PBC, BC \not\subset$  平面  $PBC$ , 所以  $DF \parallel$  平面  $PBC$ . 故 A 正确. 由题意, 得  $P-ABC$  是正四面体, 所以  $PD \perp AB, CD \perp AB, PD \cap CD=D$ . 所以  $AB \perp$  平面  $PDC$ . 故 B 正确. 因为  $PE \perp BC, AE \perp BC, DE \cap AE=E$ , 所以  $BC \perp$  平面  $PAE$ . 又  $BC \subset$  平面  $ABC$ , 所以平面  $PAE \perp$  平面  $ABC$ . 故 D 正确. 故选 C.

3.B 提示: 取  $BD$  的中点  $E$ . 连接  $AE, CE$ , 则  $AE \perp BD, CE \perp BD$ . 因为平面  $ABD \perp$  平面  $BCD$ , 平面  $ABD \cap$  平面  $BCD=BD, AE \subset$  平面  $ABD, CE \subset$  平面  $BCD$ , 所以  $AE \perp$  平面  $BCD, CE \perp$  平面  $ABD$ . 取  $\triangle ABD$  的外心  $O_1$ ,  $\triangle BCD$  的外心  $O_2$ . 分别过  $O_1, O_2$  作平面  $ABD$  与平面  $BCD$  的垂线, 交于点  $O$ . 则  $O$  为该三棱锥外接球的球心, 连接  $OC$ . 由  $\triangle ABD$  与  $\triangle BCD$  均为边长为 2 的等边三角形, 得  $CO_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}, OO_2=OE=\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 设外接球的半径为  $R$ , 则  $R^2=OC^2=CO_2^2+OO_2^2=\frac{5}{3}$ , 所以该三棱锥外接球的表

$3 \log_5 3 = \log_5 5 - 3 \log_5 3 = \log_5 5 - \log_5 3 = \log_5 \frac{5}{3}$ , 则  $9^{a-2b} = 9^{\log_5 \frac{5}{3}} = 3^{\log_5 \frac{5}{3}} = 3^{\frac{1}{3} \log_5 5} = 3^{\frac{1}{3}} = (\frac{5}{3})^{\frac{2}{3}} = \frac{25}{9}$ .

14.5 提示: 由  $f(x)=x^3-alnx$ , 得  $f'(x)=3x^2-\frac{a}{x}$ . 所以  $f'(1)=3-a$ . 因为  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $2x+y+1=0$  平行, 所以  $f'(1)=-2$ , 即  $3-a=-2$ , 解得  $a=5$ .

15.  $[-1, +\infty)$  提示: 因为  $f(x)=x^2-\frac{1}{2} \ln x+ax$  在  $(1, +\infty)$  上没有零点, 且  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 所以  $f(x)=x^2-\frac{1}{2} \ln x+ax>0$ , 即  $a>\frac{\ln x}{2x}-x$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立. 设  $g(x)=\frac{\ln x}{2x}-x(x>1)$ , 则  $g'(x)=\frac{1-\ln x-2x^2}{2x^2}$ . 又  $y=1-\ln x-2x^2$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 且当  $x=1$  时,  $y=-1$ . 则  $y=1-\ln x-2x^2<0$ , 所以  $x>1$  时,  $g'(x)<0$ , 所以  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $g(x)<g(1)=-1$ , 所以  $a>-1$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $[-1, +\infty)$ .

16.3 提示: 由  $f(x)=x+x \ln x$ , 得  $f'(x)=m(x-1)>0$  对任意的  $x>1$  恒成立, 即  $m(x-1)<x+\ln x$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立. 所以  $m<\frac{x+\ln x}{x-1}$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立. 令  $h(x)=\frac{x+\ln x}{x-1}(x>1)$ , 则  $h'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$ . 令  $g(x)=x-\ln x-2(x>1)$ , 则  $g'(x)=\frac{x-1}{x}>0$ , 所以  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增. 因为  $g(3)=1-\ln 3<0, g(4)=2-2 \ln 2>0$ , 所以  $g(x)=0$  在  $(1, +\infty)$  上存在唯一实根  $x_0$ , 且  $x_0 \in (3, 4)$ . 当  $1<x< x_0$  时,  $g(x)<0$ , 即  $h'(x)<0$ . 当  $x>x_0$  时,  $g(x)>0$ , 即  $h'(x)>0$ . 所以  $h(x)$  在  $(1, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增. 又  $g(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$ , 所以  $\ln x_0=x_0-2$ . 所以  $h(x)_{\min}=h(x_0)=\frac{x_0}{x_0-1}=\frac{x_0}{x_0-2+1}=\frac{x_0}{x_0-1}$ . 所以  $m \cdot h(x)_{\min} \leq x_0$ , 且  $x_0 \in (3, 4)$ , 故整数  $m$  的最大值为 3.

## 四、解答题

17. 解: (1) 由题意, 得  $f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{x^2}(x>0)$ . 当  $x \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$  时,  $f'(x)>0$ . 当  $x \in (1, 3)$  时,  $f'(x)<0$ . 所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(0, 1), (3, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(1, 3)$ .

(2) 由 (1) 知  $f(x)$  在  $[\frac{1}{e}, 1]$  上单调递增, 在  $(1, e]$  上单调递减, 则  $f(x)$  在  $[\frac{1}{e}, e]$  上的最大值为  $f(1)=-2$ . 因为  $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-3e+4, f(e)=e-\frac{3}{e}-4$ , 则  $f(\frac{1}{e})-f(e)=8-4(e-\frac{1}{e})<0$ . 所以  $f(x)$  在  $[\frac{1}{e}, e]$  上的最小值为  $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-3e+4$ .

18. 解: (1) 因为当  $a=0$  时,  $f(x)=e^x-x^2-1, f'(x)=e^x-2x$ . 所以由曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线的斜率为  $f'(0)=1$ , 又  $f(0)=0$ . 所以切线方程为  $y=x$ .

(2) 对任意的实数  $x \in (0, +\infty)$ ,  $f(x)>0$  恒成立, 即  $2a \leq \frac{e^x}{x}-x$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立. 设  $g(x)=\frac{e^x}{x}-x$ .  $x \in (0, +\infty)$ ,  $g'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$ . 令  $h(x)=e^x-x-1$ , 则  $h'(x)=e^x-1>h'(0)=0$ . 所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 即有  $h(x)>h(0)=0$ . 所以  $x>0$  时,  $g'(x)>0$ .  $g(x)$  单调递增. 当  $0<x<1$  时,  $g'(x)<0$ .  $g(x)$  单调递减. 所以  $g(x)_{\min}=g(1)=e-2$ . 所以  $2a \leq e-2$ , 得  $a \leq \frac{e-2}{2}$ .

所以  $a$  的最大值为  $\frac{e-2}{2}$ .

19. (1) 解: 由  $f(x)=ax-\ln x$ , 得  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x)=\frac{ax-1}{x}$ . 若  $a \leq 0$ ,  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 无极值. 若  $a>0$ , 当  $x \in (0, \frac{1}{a})$  时,  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$  时,  $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  单调递增, 所以  $x=\frac{1}{a}$  时,  $f(x)$  取得极小值, 极小值为  $f(\frac{1}{a})=1+\ln a$ , 无极大值.

综上, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上无极值; 当  $a>0$  时,  $f(x)$  的极小值为  $1+\ln a$ , 无极大值.

(2) 证明: 由 (1) 知, 当  $0<a<1$  时,  $f(x)$  的最小值为  $1+\ln a$ . 若  $\exists x \in (0, +\infty)$ , 使得  $f(x)<3a-a^2-\ln 2$ , 等价于  $f(x)_{\min}<3a-a^2-\ln 2$ . 所以  $1+\ln a<3a-a^2-\ln 2$ . 所以  $0<a<1$  时,  $a^2-3a+\ln a+1+\ln 2<0$  恒成立. 设  $g(a)=a^2-3a+\ln a+1+\ln 2$ , 定义域为  $(0, 1)$ . 则  $g'(a)=\frac{(2a-1)(a-1)}{a}$ . 当  $a \in (0, \frac{1}{2})$  时,  $g'(a)>0$ .  $g(a)$  单调递增. 当  $a \in (\frac{1}{2}, 1)$  时,  $g'(a)<0$ .  $g(a)$  单调递减, 所以  $g(a)_{\min}=g(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}<0$ . 所以  $0<a<1$  时,  $\exists x \in (0, +\infty)$ , 使得  $f(x)<3a-a^2-\ln 2$ .

20. 解: (1) 当  $a=2$  时,  $f(x)=\ln 2+\ln x-\frac{1}{3}x^3$ . 则  $f'(x)=\frac{1-x^3}{x}$ .  $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{24}$ .  $f'(\frac{1}{2})=\frac{7}{4}$ . 所以曲线  $y=f(x)$  在点  $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$  处的切线方程为  $y+\frac{1}{24}=\frac{7}{4}(x-\frac{1}{2})$ , 即  $21x-12y-11=0$ .

(2) 当  $a<0$  时,  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0)$ . 易知  $f(x)$  在

11.  $x^{\frac{1}{3}}$ , 该函数在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 又  $f(a-1)>1=f(1)$ , 所以  $a-1>1$ , 解得  $a>2$ . 故选 B.

5.B 提示: 因为函数  $f(x)=\frac{1-ax, x<a}{x^2-4x+3, x \geq a}$ . 所以若  $a=0$ ,  $f(x)=\begin{cases} 1, x<0 \\ x^2-4x+3, x \geq 0 \end{cases}$ . 所以  $f(x)_{\min}=f(2)=-1$ . 故  $a=0$  符合题意; 若  $a<0$ , 当  $x<a$  时,  $f(x)=1-ax$  在  $(-\infty, a)$  上单调递增, 且当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ . 所以  $f(x)$  没有最小值. 故  $a=0$  不符合题意; 若  $a>0$ , 当  $x<a$  时,  $f(x)=1-ax$  在  $(-\infty, a)$  上单调递减,  $f(x)>f(a)=1-a^2$ . 当  $x \geq a$  时,  $f(x)_{\min}=\begin{cases} 1-a^2, 0 \leq a \leq 2 \\ a^2-4a+3, a \geq 2 \end{cases}$ . 因为  $f(x)$  存在最小值, 则需满足  $\begin{cases} 1-a^2 \geq -1 \\ 1-a^2 \geq a^2-4a+3 \end{cases}$ . 解得  $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ . 综上, 实数  $a$  的取值范围为  $[0, \sqrt{2}]$ . 故选 B.

6.C 提示: 作出函数  $f(x)$  的大致图象 (图略), 则  $0<a<1, x_1<0<x_2<1<x_3<2<x_4$ . 所以  $1-2^{\frac{x_1}{a}}=2^{-1}$ , 所以  $2^{\frac{x_1}{a}}=2$ .  $-\log_2(x_3-1)=\log_2(x_4-1)$ , 所以  $\log_2(x_3-1)+\log_2(x_4-1)=0$ . 所以  $(x_3-1)(x_4-1)=1$ . 所以  $(2^{\frac{x_1}{a}}+2^{\frac{x_2}{a}})+\frac{1}{(x_3-1)(x_4-1)a}=2a+\frac{1}{a}$