

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第1期

第3-4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示:与 $a=(3,0,-4)$ 共线的单位向量为 $\pm \frac{a}{|a|} = \pm (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$. 故选 D.

2.A 提示:因为三棱锥 $A-BCD$ 中, M 是平面 BCD 内的点, 所以用向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 表示 \overrightarrow{AM} , 三个基向量的系数之和为 1. 故选 A.

3.B 提示:向量 $a=(2,4,5), b=(3,x,y)$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 因为 $l_1 \perp l_2$,

所以 $\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{4} = \frac{y}{5}$, 解得 $x=6, y=\frac{15}{2}$. 故选 B.

4.A 提示:因为 $a=(1,2,-3), b=(2,-1,1), c=(2,0,3)$, 所以 $b+ac=(4,-1,4)$, 所以 $a \cdot (b+ac)=1 \times 4 + 2 \times (-1) + (-3) \times 4 = -10$. 故选 A.

5.B 提示:由 $2\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$, 得 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, 即 $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AP}$, 故 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PC}$ 共面, 又因为三个向量有同一公共起点 P , 所以 P, A, B, C 四点共面, 故选 B.

6.A 提示:由题意可得 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA'}_1 + \overrightarrow{A'_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}_1 + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}_1 = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}_1 = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AA'}_1$, 所以 $x=1, y=-\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$, 所以 $(x,y,z) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. 故选 A.

7.C 提示:因为 E 是 CD 的中点, F 是 AE 的中点, $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b, \overrightarrow{AD} = c$, 所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}), \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$, 所以 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c - a$. 故选 C.

8.D 提示:因为 $\overrightarrow{AC'}_1 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}_1$, 所以 $|\overrightarrow{AC'}_1|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}_1)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA'}_1^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'}_1 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'}_1 = 1 + 1 + 3 \times 2 \times 1 \times \cos 60^\circ = 6$. 所以 $|\overrightarrow{AC'}_1| = \sqrt{6}$. 故选 D.

二、多项选择题
9.ABC 提示:对于 A, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=1$, 单位向量的模长为 1, 则单位向量有 $\overrightarrow{AA'}_1, \overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{BB'}_1, \overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{CC'}_1, \overrightarrow{C_1C}, \overrightarrow{DD'}_1, \overrightarrow{D_1D}$, 共 8 个, 故 A 正确;

对于 B, 由图可知, 与 \overrightarrow{AB} 相等的向量有 $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{A_1B'}_1, \overrightarrow{D_1C'}_1$, 共 3 个, 故 B 正确;

对于 C, 由图可知, $\overrightarrow{AA'}_1$ 的反向量为 $\overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{C_1C}, \overrightarrow{D_1D}, \overrightarrow{A_1A}$, 共 4 个, 故 C 正确;

对于 D, 由图易知, 向量 $\overrightarrow{A_1D'}_1, \overrightarrow{A_1B'}_1, \overrightarrow{CC'}_1$ 不共面, 故 D 错误. 故选 ABC.

10.BD 提示:对于 A, 若 $a \cdot b < 0$, 则 a, b 的夹角 θ 满足 $\cos \theta < 0$, 所以 θ 是钝角或 $\theta = \pi$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $a \cdot b = -1 - 2 + 3 = 0$, 所以 $a \perp b$, 故 B 正确;

对于 C, 根据向量的数量积定义知, $a \cdot b = b \cdot c$ 时, $a = c$ 不一定成立, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $c \neq \lambda a + \mu b$, 所以向量 a, b, c 不共面, a, b, c 可以作为空间中的一组基底, 故 D 正确.

故选 BD.

11.ACD 提示:对于 A, 由于 E, F 分别是 CD 和 PC 的中点, 则 $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD}$, 即 $\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$, 故 A 正确;

对于 B, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA}$, 故 B 错误;

对于 C, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP}$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$, 所以 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}$, 故 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB}) - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$, 故 D 正确.

故选 ACD.

12.BC 提示:对于 $A, a \cdot c = -16 - 10 + 6 \neq 0, b \cdot c = -24 + 0 + 24 = 0$, 故 a, c 不垂直, 故 A 错误;

对于 B, 设 $d = ma + nb$, 则 $m(2, -2, 1) + n(3, 0, 4) = (1, -4, 2m + 3n - 2)$, 所以 $\begin{cases} -2m = -4, \\ 2m + 3n - 2 = -4, \end{cases}$ 解得 $m=2, n=-1$, 即 $2a-b=d$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{10}{3 \times 5} = \frac{2}{3}$, 所以异面直线 l_1 与 l_2 的余弦值为 $\frac{2}{3}$, 故 C 正确; 对于 D, 向量 a 在向量 b 上的投影向量为 $|a| \cos \langle a, b \rangle \cdot \frac{b}{|b|} = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times (3, 0, 4) = (\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5})$, 故 D 错误. 故选 BC.

三、填空题
13. $\sqrt{122}$ 提示:因为 $a=(1,2,3), b=(0,1,-4)$, 所以 $a-2b=(1,0,11), |a-2b| = \sqrt{1+0+121} = \sqrt{122}$.

14.2 提示:由题意知, $\begin{cases} x-3y+z=2, \\ 2x+y-z=-1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=-5, \\ z=-10. \end{cases}$ 所以 $x+y+z=2$.

15. $\sqrt{3}$ 提示:因为 $A(0,2,3), B(-2,1,6), C(1,-1,5)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 3), \overrightarrow{AC} = (1, -3, 2), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{14}$.

(2) $\overrightarrow{BC} = (0, -2, -2), D(1,1,2), A_1(2,0,0), C(0,0,2), \overrightarrow{DA_1} = (1, -1, -2), \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$, 设平面 A_1CD 的法向量为 $n=(x,y,z)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DA_1} = x-y-2z=0, \\ n \cdot \overrightarrow{AC} = -2x+2z=0, \end{cases}$

取 $x=1$, 则 $n=(1, -1, 1)$, 因为 $\overrightarrow{BC} \cdot n=0$, 所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1CD .

19.(1)证明:因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面, $\angle BAC=90^\circ$, 所以以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}$ 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 因为 $AB=AC=AA_1=1, E, F$ 分别是棱 C_1C, BC 的中点, 所以 $A(0,0,0), B_1(1,0,1), E(0,1,\frac{1}{2}), F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

$\overrightarrow{B_1F} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1), \overrightarrow{AE} = (0,1,\frac{1}{2}), \overrightarrow{AF} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, 因为 $\overrightarrow{B_1F} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \overrightarrow{B_1F} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$, 所以 $\overrightarrow{B_1F} \perp \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{B_1F} \perp \overrightarrow{AF}$, 因为 $AE \cap AF = A, AE \subset$ 平面 $AEF, AF \subset$ 平面 AEF , 所以 $B_1F \perp$ 平面 AEF .

(2)解:因为 $A_1(0,0,1)$, 所以 $\overrightarrow{BA_1} = (-1,0,0), \overrightarrow{B_1E} = (-1,1,-\frac{1}{2})$, 故点 A_1 到直线 B_1E 的距离为 $d = \sqrt{\overrightarrow{BA_1}^2 - (\frac{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{B_1E}}{|\overrightarrow{B_1E}|})^2} = \sqrt{1 - (\frac{1}{1+\frac{1}{4}})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

20.(1)证明:因为 $AB \perp BC, AB \perp BE, BC \cap BE = B$, 所以 $AB \perp$ 平面 BCE , 以 B 为原点, $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$ 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 设 $AB=AD=1$, 则 $D(0,1,1), F(1,0,1), B(0,0,0), M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{BM} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{DF} = (1, -1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DF} = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 0 = 0$, 所以 $BM \perp DF$.

(2)解: $E(2,0,0)$, 故 $\overrightarrow{EF} = (-1,0,1)$, 所以 $|\cos \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{EF} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{BM}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 所以异面直线 BM 与 EF 所成角为 $\frac{\pi}{3}$.

21.(1)证明:取 PF 的中点 G , 连接 EG, CG , 连接 AC 交 BD 于 O , 连接 FO , 因为 E, G 分别为 PD, PF 的中点, 所以 $EG \parallel FD$, 又 $EG \subset$ 平面 $BDF, FD \subset$ 平面 BDF , 所以 $EG \parallel$ 平面 BDF , 又 $AF=1$, 故 F 为 CA 的中点, 所以 $FO \parallel GC$, 又 $GC \subset$ 平面 $BDF, FO \subset$ 平面 BDF , 所以 $GC \parallel$ 平面 BDF , 又 $EG \cap GC = G, EG, GC \subset$ 平面 CGE , 所以平面 $CGE \parallel$ 平面 BDF , 又 $CCE \subset$ 平面 CGE , 所以 $CE \parallel$ 平面 BDF .

(2)解:取 BC 中点 Q , 连接 AQ , 因为四边形 $ABCD$ 是 $\angle ABC=60^\circ$ 的菱形, 所以 $AQ \perp AD$, 又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 以 A 为原点, $\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 为 x, y, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系 $Axyz$, 则 $D(0,3,0), B(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0), C(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0), F(0,0,1), P(0,0,3)$, 所以 $\overrightarrow{DF} = (0, -3, 1), \overrightarrow{DB} = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}, 0)$, 设平面 BDF 的法向量为 $n=(x,y,z)$, 则由 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DF} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} -3y+z=0, \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{9}{2}y=0, \end{cases}$ 令 $z=3$, 则 $x=\sqrt{3}, y=1$, 所以 $n=(\sqrt{3}, 1, 3)$. 显然平面 PAD 的一个法向量为 $m=(1,0,0)$, 所以 $|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| \cdot |n|} = \frac{\sqrt{39}}{13}$, 所以平面 BDF 和平面 PAD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$.

22.解:依题意, 以 D 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 则 $D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0), E(0,0,2), F(2,2,\frac{1}{2})$.

(1)证明: $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{EF} = (2, 2, -\frac{3}{2})$, 所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = (-2) \times 2 + 2 \times 2 + 0 = 0$, 所以 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{EF}$, 所以 $AC \perp EF$.

(2)解:依题意可得 $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{AF} = (0, 2, \frac{1}{2})$, 设 $n=(x,y,z)$ 为平面 ACF 的法向量, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -2x+2y=0, \\ 2y+\frac{1}{2}z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 可得 $y=1, z=-4$, 所以 $n=(1, 1, -4)$, 因

为 $\overrightarrow{EC} = (0, 2, -2)$, 设直线 EC 与平面 ACF 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{EC}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{EC} \cdot n|}{|\overrightarrow{EC}| \cdot |n|} = \frac{10}{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}} = \frac{5}{6}$, 所以直线 EC 与平面 ACF 所成角的正弦值为 $\frac{5}{6}$.

(3)解:设线段 DE 上存在一点 $G(0,0,h)$, 使得 BG 与 AD 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$, 则 $\overrightarrow{BG} = (-2, -2, h)$, 又 $\overrightarrow{AD} = (-2, 0, 0)$, 所以 $|\cos \langle \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{AD} \rangle| = \frac{4}{\sqrt{8+h^2} \times 2} = \frac{2}{3}$, 解得 $h=1$, 所以存在 $G(0,0,1)$ 满足条件,

所以 $\overrightarrow{AG} = (-2, 0, 1)$, 由 (2) 可知平面 ACF 的一个法向量 $n=(1,1,-4)$, 所以点 G 到平面 ACF 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AG} \cdot n|}{|n|} = \frac{|-2+0-4|}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

0, 而 $AE \cap AF = A$, 所以平面 AEF 的一个法向量是 $(4, -1, 2)$, 故 C 正确;

$\overrightarrow{EF} = (-1, -2, 1), \overrightarrow{ED} = (-2, -2, -1)$, 故点 D 到直线 EF 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{ED}|^2 - (\frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{EF}|})^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{6}} = \frac{\sqrt{174}}{6}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

12.ACD 提示:由 $AD \parallel BC, \angle ABC=90^\circ$, 得 $AD \perp AB$, 又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 故以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系. 则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,4,0), P(0,0,2)$.

对于 A, 由 $\overrightarrow{BP} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{CD} = (-2, 2, 0)$, 得 $\cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 所以 $\langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CD} \rangle = 60^\circ$, 所以 PB 与 CD 所成的角是 60° , 故 A 正确;

对于 B, 由题意 $n=(0,1,0)$ 为平面 PAB 的一个法向量. 设 $m=(x,y,z)$ 为平面 PCD 的法向量, $\overrightarrow{DP} = (0, -4, 2)$, 由 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -2x+2y=0, \\ -4y+2z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 则 $m=(1, 1, 2)$, 所以 $|\cos \langle n, m \rangle| = \frac{|n \cdot m|}{|n| |m|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 所以平面 PCD 与平面 PAB 夹角的余弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{6}$, 故 B 错误; 对于 C, $V_{P-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} PA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AD \times AB \times PA = \frac{1}{6} \times 4 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$, 故 C 正确;

对于 D, $\overrightarrow{BP} = (-2, 0, 2)$, 设 PB 与平面 PCD 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BP}, m \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot m|}{|\overrightarrow{BP}| |m|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题
13.(1,0,0) 提示:因为向量 $a=(1,0,3)$, 所以 a 在 x 轴上的投影向量为 $(1,0,0)$.

14. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ 提示:因为 $A(0,2,3), B(-2,1,6), C(1,-1,5)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 3), \overrightarrow{AC} = (1, -3, 2)$, 由此可得 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$. 设 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2+3+6}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = \frac{1}{2}$, 又因为 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 即 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 即 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \sqrt{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

15. $\frac{8}{3}$ 提示:以 D 为原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A(4,0,0), M(2,0,4), D(0,0,0), B(4,4,0), E(0,2,4), F(2,4,4), N(4,2,4)$.

所以 $\overrightarrow{EF} = (2, 2, 0), \overrightarrow{MN} = (2, 2, 0), \overrightarrow{AM} = (-2, 0, 4), \overrightarrow{BF} = (-2, 0, 4)$, 所以 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AM}$, 所以 $EF \parallel MN, BF \parallel AM$, 所以 $EF \parallel$ 平面 $AMN, BF \parallel$ 平面 AMN , 又 $EF \cap BF = F$, 所以平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$.

设 $n=(x,y,z)$ 是平面 AMN 的法向量, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{MN} = 2x+2y=0, \\ n \cdot \overrightarrow{AM} = -2x+4z=0, \end{cases}$ 取 $x=1$, 则 $x=2, y=-2$, 得 $n=(2, -2, 1)$.

平面 AMN 到平面 $EFBD$ 的距离就是点 B 到平面 AMN 的距离. 因为 $\overrightarrow{AB} = (0, 4, 0)$, 所以平面 AMN 与平面 $EFBD$ 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot n|}{|n|} = \frac{8}{3}$.

16. $\frac{8}{5}$ 提示:以 D 为原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 设 $M(4,0,a)(0 \leq a \leq 4), N(4,2,4), D_1(0,0,4)$, 则 $\overrightarrow{MN} = (-2, 4, -a), \overrightarrow{D_1N} = (2, 4, -4)$, 所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{D_1N} = 0$, 即 $-2x+4y-az=0$, 令 $z=8, x=8-2a, y=a+4$, 则 $n=(8-2a, a+4, 8)$, 易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $m=(0,0,1)$, 设平面 D_1MN 与平面 $ABCD$ 的夹角为 θ , 所以 $\cos \theta = \frac{|n \cdot m|}{|n| |m|} = \frac{8}{\sqrt{(8-2a)^2 + (a+4)^2 + 64}} = \frac{8}{\sqrt{5a^2 - 24a + 144}}$, 当 $a = \frac{12}{5}$ 时, $\cos \theta$ 取得最大值, 此时 θ 取最小值, 所以 $A_1M = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}$.

四、解答题
17.解:(1)因为 $|a| = \sqrt{6}$, 所以 $c=2a$ 或 $c=-2a$, 所以 $c=(2,4,-2)$ 或 $c=(-2,-4,2)$.

(2)因为 $ka+b=(k, 2k, -k)+(-2, 4, 2)=(k-2, 2k+4, 2-k), a-2b=(1, 2, -1)+(-4, 8, 4)=(5, -6, -5)$, 由 $(ka+b) \cdot (a-2b) = 0$, 得 $(ka+b) \cdot (a-2b) = 0$, 所以 $(k-2) \cdot 5 + (2k+4) \cdot (-6) + (-k) \cdot 4 = 0$, 解得 $k=-22$.

18.证明:(1)以 C_1 为原点, $\overrightarrow{CA_1}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{C_1C}$ 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 设 $A \cdot C = BC = BB_1 = 2$, 则 $B(0,2,2), C(0,0,0), A(2,0,2), B_1(0,2,0), CC_1=(0,-2,-2), \overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$, 所以 $BC_1 \perp AB_1$.

19.解:(1)因为 $a=(1,0,0), b=(-1,0,0)$ 时, 显然 $a \cdot b < 0$, 因为 $a=-b$, 所以 a, b 的夹角是平角, 故 A 为假命题; 对于 B, 因为 $a \cdot b = 1 \times (-1) + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 0$, 所以 $a \perp b$, 因此 B 为真命题;

对于 C, 当 $a=(1,0,0), b=(0,2,0), c=(0,0,3)$ 时, 显然 $a \cdot b = b \cdot c$, 但是 $a \neq c$, 因此 C 为假命题; 对于 D, 假设 a, b, c 是共面向量, 所以 $c = \lambda a + \mu b \Rightarrow (0,0,3) = x(1,0,0) + y(0,2,0)$, 所以 $\begin{cases} 0=2y, \\ 3=0, \end{cases}$ 显然不可能, 所以 a, b, c 不是共面向量, 因此 a, b, c 可以作为空间中的一组基底, 所以 D 为真命题. 故选 BD.

11.BCD 提示:因为 $A(2,0,0), C_1(0,2,2), E(2,2,1), F(1,0,2)$, 所以 $\overrightarrow{AC_1} = (-2, 2, 2)$, 所以 $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$, 故 A 错误; $\cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF} \rangle = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{AF}|} = \frac{(0,2,1) \cdot (-1,0,2)}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2}{5}$, 故 B 正确; 设 <

对值,所以若 $\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{2}$, 则直线 a 与平面 α 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 故 C 正确; 两个平面夹角与它们法向量的不大于 90° 的夹角相等, 故 D 正确. 故选 BCD.

12.BCD 提示: 由已知 $AB \perp AD, AB \perp AF$, 又 $AF \cap AD = A$, 所以 $AB \perp$ 平面 AFD , 以 A 为坐标原点, AD, AB 所在的直线为 x 轴, y 轴, 过 A 垂直于底面 $ABCD$ 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

因为二面角 E-AB-D 的平面角为 60° , 所以 $\angle FAD = 60^\circ$, 又 $AB = 2AF = 4$, 所以 $A(0, 0, 0), B(0, 4, 0), E(1, 4, \sqrt{3}), G(4, 2, 0), \overrightarrow{AE} = (1, 4, \sqrt{3}), \overrightarrow{BG} = (4, -2, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = 4 - 8 + 0 = -4 \neq 0$, 所以 AE, BG 不垂直, 故 A 错误;

因为 $\overrightarrow{BE} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AG} = (4, 2, 0)$, 所以 $\cos\langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AG} \rangle = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{BE}| |\overrightarrow{AG}|} = \frac{4}{2 \times 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以直线 BE 与 AG

所成角的余弦值是 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 故 B 正确; 设平面 AGE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AG} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 4x + 2y = 0, \\ x + 4y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 取 $x = 1$, 可得 $y = -2$, $z = \frac{7\sqrt{3}}{3}$, 则 $\mathbf{n} = (1, -2, \frac{7\sqrt{3}}{3})$.

又 $\overrightarrow{BG} = (4, -2, 0)$, 设 BG 与平面 AGE 所成角为 θ , 则 $\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{BG}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BG} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{BG}| |\mathbf{n}|} = \frac{8}{2\sqrt{5} \times \frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{10}$.

所以直线 BG 与平面 AGE 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{15}}{10}$, 故 C 正确;

因为 $\overrightarrow{BA} = (0, -4, 0)$, 平面 AGE 的法向量为 $\mathbf{n} = (1, -2, \frac{7\sqrt{3}}{3})$, 设点 B 到平面 AGE 的距离为 d , 则 $d = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{8}{\sqrt{1+4+\frac{49 \times 3}{9}}} = \sqrt{3}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

13. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 提示: 设平面 α 与平面 β 的夹角为 θ , 则 $\cos\theta = |\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{|2-1-4|}{\sqrt{9} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 所以平面 α 与平面 β 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

14. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 提示: 以 A 为原点, AD, AB, AS 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $D(\frac{1}{2}, 0, 0), C(1, 1, 0), S(0, 0, 1)$,

可知 $\overrightarrow{AD} = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ 是平面 SAB 的一个法向量. 设平面 SCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 因为 $\overrightarrow{SD} = (\frac{1}{2}, 0, -1)$,

$\overrightarrow{DC} = (\frac{1}{2}, 1, 0)$, 所以 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{SD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \frac{x}{2} - z = 0, \\ \frac{x}{2} + y = 0, \end{cases}$ 令 $x = 2$, 则 $y = -1, z = 1$, 所以 $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$.

设平面 SCD 与平面 SAB 的夹角为 θ , 则 $\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|\frac{1}{2} \times 2|}{\frac{1}{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

15. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 提示: 在 AD 上取点 G, 使得 $FG \parallel AP$, 由 $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DP}$, 设 $AE = xAB, DF = xDP$, 其中 $0 < x < 1$.

由 $AB = AP = 1, BC = 2, AP \perp$ 平面 $ABCD$, 可得 $DP = \sqrt{AP^2 + AD^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, AE = x, DF = \sqrt{5}x, BE = 1 - x$.

因为 $FG \parallel AP, AP \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $FG \perp$ 平面 $ABCD$, 连接 EG, 则 $\angle FEG$ 为 EF 与平面 $ABCD$ 所成的角.

在 $\triangle APD$ 中, 有 $\frac{GF}{AP} = \frac{DF}{DP}$, 可得 $\frac{GF}{1} = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5}}$, 解得 $GF = x$.

因为 $\triangle BCE$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times BE \cdot BC = \frac{1}{2} (1-x) \times 2 = 1-x$, $V_{C-BEF} = V_{F-BCE} = V(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} (1-x) \times \frac{1}{3} \left[-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right]$,

可得当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 三棱锥 C-BEF 的体积取得最大值 $V(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$.

所以当三棱锥 C-BEF 的体积取得最大值时, E 为 AB 的中点, F 为 DP 的中点.

点 A 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 故选 B.

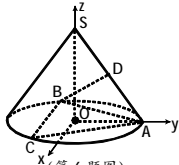
6.A 提示: 因为该圆锥的侧面积是底面积的 2 倍, 所以该圆锥的母线长是底面半径的 2 倍.

设底面半径为 1, 以底面圆心 O 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 1, 0), S(0, 0, \sqrt{3}), B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$,

$C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), D(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$,

$\overrightarrow{BD} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 $|\cos\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{\sqrt{30}}{20}$, 故异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{20}$, 故选 A.



7.C 提示: 以 D 为原点, DA, DC, DF 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A(2, 0, 0), C(0, 4, 0), E(2, 4, 1), C_1(0, 4, 3)$, 所以 $\overrightarrow{AC_1} = (-2, 4, 3), \overrightarrow{AE} = (0, 4, 1)$.

设平面 AEC_1F 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 4y + z = 0, \\ -2x + 4y + 3z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 则 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -\frac{1}{4}, \end{cases}$ 所以 $\mathbf{n} = (1, -\frac{1}{4}, 1)$.

又 $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 3)$, 所以点 C 到平面 AEC_1F 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4\sqrt{33}}{11}$, 故选 C.

8.A 提示: 以 A 为坐标原点, AD, AB, AP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系. 由二面角 Q-PD-A 的平面角大小为 30° , 可知 Q 的轨迹是过点 D 的一条直线, 又 Q 是四边形 ABCD 内部一点 (包括边界), 则 Q 的轨迹是过点 D 的一条线段.

设 Q 的轨迹与 y 轴的交点坐标为 $G(0, b, 0) (b > 0)$, 由题意可知 $A(0, 0, 0), D(2, 0, 0), P(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{DP} = (-2, 0, 1), \overrightarrow{DG} = (-2, b, 0), \overrightarrow{AD} = (2, 0, 0)$, 易知平面 APD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 0)$, 设平面 PDG 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DG} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x + z = 0, \\ -2x + by = 0, \end{cases}$ 令 $z = 2$, 得 $x = y = \frac{2}{b}$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (1, \frac{2}{b}, 2)$ 是平面 PDG 的一个法向量, 则二面角 G-PD-A 的平面角的余弦值为 $|\cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|\frac{2}{b}|}{\sqrt{1 + \frac{4}{b^2} + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $b = \frac{2\sqrt{15}}{15}$ 或 $b = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$ (舍去). 因为 Q 在 DG 上运动, 所以 $S_{\triangle ADQ} \leq S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{15}}{15} = \frac{2\sqrt{15}}{15}$, 所以 $\triangle ADQ$ 面积的取值范围为 $(0, \frac{2\sqrt{15}}{15}]$.

10.AC 提示: 对于 A, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{13}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 不满足题意; 对于 B, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{13}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 不满足题意; 对于 C, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2+6}{4\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 满足题意; 对于 D, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{-2\sqrt{5}-6}{\sqrt{13} \times \sqrt{10}} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 不满足题意. 故选 AC.

11.BCD 提示: 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, 则直线 $a \parallel$ 平面 α 或 $\mathbf{a} \subset \alpha$, 故 A 不正确; 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{n}$, 则 a 也是平面 α 的一个法向量, 所以直线 $a \perp$ 平面 α , 故 B 正确; 直线与平面所成角的正弦值等于直线的方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝

对值, 所以若 $\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{2}$, 则直线 a 与平面 α 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 故 C 正确; 两个平面夹角与它们法向量的不大于 90° 的夹角相等, 故 D 正确. 故选 BCD.

6.A 提示: 因为该圆锥的侧面积是底面积的 2 倍, 所以该圆锥的母线长是底面半径的 2 倍.

设底面半径为 1, 以底面圆心 O 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 1, 0), S(0, 0, \sqrt{3}), B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$,

$C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), D(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$,

$\overrightarrow{BD} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 $|\cos\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{\sqrt{30}}{20}$, 故异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{20}$, 故选 A.

7.C 提示: 以 D 为原点, DA, DC, DF 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A(2, 0, 0), C(0, 4, 0), E(2, 4, 1), C_1(0, 4, 3)$, 所以 $\overrightarrow{AC_1} = (-2, 4, 3), \overrightarrow{AE} = (0, 4, 1)$.

设平面 AEC_1F 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 4y + z = 0, \\ -2x + 4y + 3z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 则 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -\frac{1}{4}, \end{cases}$ 所以 $\mathbf{n} = (1, -\frac{1}{4}, 1)$.

又 $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 3)$, 所以点 C 到平面 AEC_1F 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4\sqrt{33}}{11}$, 故选 C.

8.A 提示: 以 A 为坐标原点, AD, AB, AP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系. 由二面角 Q-PD-A 的平面角大小为 30° , 可知 Q 的轨迹是过点 D 的一条直线, 又 Q 是四边形 ABCD 内部一点 (包括边界), 则 Q 的轨迹是过点 D 的一条线段.

设 Q 的轨迹与 y 轴的交点坐标为 $G(0, b, 0) (b > 0)$, 由题意可知 $A(0, 0, 0), D(2, 0, 0), P(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{DP} = (-2, 0, 1), \overrightarrow{DG} = (-2, b, 0), \overrightarrow{AD} = (2, 0, 0)$, 易知平面 APD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 0)$, 设平面 PDG 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DG} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x + z = 0, \\ -2x + by = 0, \end{cases}$ 令 $z = 2$, 得 $x = y = \frac{2}{b}$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (1, \frac{2}{b}, 2)$ 是平面 PDG 的一个法向量, 则二面角 G-PD-A 的平面角的余弦值为 $|\cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|\frac{2}{b}|}{\sqrt{1 + \frac{4}{b^2} + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $b = \frac{2\sqrt{15}}{15}$ 或 $b = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$ (舍去). 因为 Q 在 DG 上运动, 所以 $S_{\triangle ADQ} \leq S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{15}}{15} = \frac{2\sqrt{15}}{15}$, 所以 $\triangle ADQ$ 面积的取值范围为 $(0, \frac{2\sqrt{15}}{15}]$.

10.AC 提示: 对于 A, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{13}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 不满足题意; 对于 B, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{13}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 不满足题意; 对于 C, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2+6}{4\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 满足题意; 对于 D, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{-2\sqrt{5}-6}{\sqrt{13} \times \sqrt{10}} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 不满足题意. 故选 AC.

11.BCD 提示: 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, 则直线 $a \parallel$ 平面 α 或 $\mathbf{a} \subset \alpha$, 故 A 不正确; 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{n}$, 则 a 也是平面 α 的一个法向量, 所以直线 $a \perp$ 平面 α , 故 B 正确; 直线与平面所成角的正弦值等于直线的方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝

对值, 所以若 $\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{2}$, 则直线 a 与平面 α 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 故 C 正确; 两个平面夹角与它们法向量的不大于 90° 的夹角相等, 故 D 正确. 故选 BCD.

6.A 提示: 因为该圆锥的侧面积是底面积的 2 倍, 所以该圆锥的母线长是底面半径的 2 倍.

设底面半径为 1, 以底面圆心 O 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 1, 0), S(0, 0, \sqrt{3}), B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$,

$C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), D(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$,

$\overrightarrow{BD} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 $|\cos\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{\sqrt{30}}{20}$, 故异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{20}$, 故选 A.

7.C 提示: 以 D 为原点, DA, DC, DF 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A(2, 0, 0), C(0, 4, 0), E(2, 4, 1), C_1(0, 4, 3)$, 所以 $\overrightarrow{AC_1} = (-2, 4, 3), \overrightarrow{AE} = (0, 4, 1)$.

设平面 AEC_1F 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 4y + z = 0, \\ -2x + 4y + 3z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 则 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -\frac{1}{4}, \end{cases}$ 所以 $\mathbf{n} = (1, -\frac{1}{4}, 1)$.

又 $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 3)$, 所以点 C 到平面 AEC_1F 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4\sqrt{33}}{11}$, 故选 C.

8.A 提示: 以 A 为坐标原点, AD, AB, AP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系. 由二面角 Q-PD-A 的平面角大小为 30° , 可知 Q 的轨迹是过点 D 的一条直线, 又 Q 是四边形 ABCD 内部一点 (包括边界), 则 Q 的轨迹是过点 D 的一条线段.

设 Q 的轨迹与 y 轴的交点坐标为 $G(0, b, 0) (b > 0)$, 由题意可知 $A(0, 0, 0), D(2, 0, 0), P(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{DP} = (-2, 0, 1), \overrightarrow{DG} = (-2, b, 0), \overrightarrow{AD} = (2, 0, 0)$, 易知平面 APD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 0)$, 设平面 PDG 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DG} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x + z = 0, \\ -2x + by = 0, \end{cases}$ 令 $z = 2$, 得 $x = y = \frac{2}{b}$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (1, \frac{2}{b}, 2)$ 是平面 PDG 的一个法向量, 则二面角 G-PD-A 的平面角的余弦值为 $|\cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|\frac{2}{b}|}{\sqrt{1 + \frac{4}{b^2} + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $b = \frac{2\sqrt{15}}{15}$ 或 $b = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$ (舍去). 因为 Q 在 DG 上运动, 所以 $S_{\triangle ADQ} \leq S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{15}}{15} = \frac{2\sqrt{15}}{15}$, 所以 $\triangle ADQ$ 面积的取值范围为 $(0, \frac{2\sqrt{15}}{15}]$.

10.AC 提示: 对于 A, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{13}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 不满足题意; 对于 B, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{13}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 不满足题意; 对于 C, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2+6}{4\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 满足题意; 对于 D, $|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{-2\sqrt{5}-6}{\sqrt{13} \times \sqrt{10}} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 不满足题意. 故选 AC.

11.BCD 提示: 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, 则直线 $a \parallel$ 平面 α 或 $\mathbf{a} \subset \alpha$, 故 A 不正确; 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{n}$, 则 a 也是平面 α 的一个法向量, 所以直线 $a \perp$ 平面 α , 故 B 正确; 直线与平面所成角的正弦值等于直线的方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝

对值, 所以若 $\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{2}$, 则直线 a 与平面 α 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 故 C 正确; 两个平面夹角与它们法向量的不大于 90° 的夹角相等, 故 D 正确. 故选 BCD.

6.A 提示: 因为该圆锥的侧面积是底面积的 2 倍, 所以该圆锥的母线长是底面半径的 2 倍.

设底面半径为 1, 以底面圆心 O 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 1, 0), S(0, 0, \sqrt{3}), B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$,

$C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), D(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$,

$\overrightarrow{BD} = (-\frac{\sqrt$