3.A　提示：根据题意，$y=\sqrt{10t}$，则其导数$y'=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{t}}$，则$y'|_{t=40}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{40}}=\frac{1}{4}$，所以在时刻t=40min时的降雨强度为$\frac{1}{4}$mm/min，故选A.

4.B　提示：因为$f(x)=x-\frac{6}{x}-5\ln x$，所以$x\in(0,+\infty)$，

$f'(x)=1+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}=\frac{x^2-5x+6}{x^2}=\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}$，

令$f'(x)<0$，解得$2<x<3$，故$f(x)$的单调递减区间是$(2,3)$，故选B.

5.A　提示：由不等式$x^6-(2x+3)>(2x+3)^3-x^2$，得$(x^2)^3+x^2>(2x+3)^3+(2x+3)$.

设函数$f(t)=t^3+t$，则$f'(t)=3t^2+1>0$，所以$f(t)$在R上单调递增.

因为$f(x^2)>f(2x+3)$，所以$x^2>2x+3$，解得$x>3$或$x<-1$.故选A.

6.B　提示：$f'(x)=3x^2+6ax=3x(x+2a)$，因为$a<0$，当$x>-2a$或$x<0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；当$0<x<-2a$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减.故极小值点为$x_0=-2a$，由$f(x_1)=f(x_0)=1+4a^3$，得$x_1=a$，则$x_1\cdot f(x_1+x_0)=af(-a)=a(2a^3+1)=2a^4+a$，

设$g(a)=2a^4+a(a<0)$，$g'(a)=8a^3+1$，

当$a\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$时，$g'(a)<0$；当$a\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$g'(a)>0$，所以$g(a)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，故$g(a)_{\min}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$.故选B.

7.B　提示：已知函数$f(x)=x^2-2\ln x$，则$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$，

当$1\leqslant x\leqslant e$时，$f'(x)\geqslant0$，即函数$f(x)$在$[1,e]$上单调递增，则$f(x)_{\max}=f(e)=e^2-2$，

又关于$x$的不等式$f(x)-m\geqslant0$在$[1,e]$上有实数解，则不等式$m\leqslant f(x)$在$[1,e]$上有实数解，即$m\leqslant e^2-2$，

所以实数$m$的取值范围是$(-\infty,e^2-2]$，故选B.

8.A　提示：令$g(a)=a^3-\frac{1}{2}a^2-2a+e^{-1}$，$a\in[0,1]$，则$g'(a)=3a^2-a-2=(3a+2)(a-1)$，

所以当$a\in[0,1]$时，$g'(a)\leqslant0$，函数$g(a)$在$[0,1]$上单调递减，所以$g(a)_{\max}=g(0)=e^{-1}$，

存在实数$a\in[0,1]$，使得不等式$f\left(2-\frac{1}{m}\right)\leqslant a^3-\frac{1}{2}a^2-2a+e^{-1}$成立，等价于$f\left(2-\frac{1}{m}\right)\leqslant g(a)_{\max}=e^{-1}$成立，又因为$f(1)=e^{-1}$，所以$f\left(2-\frac{1}{m}\right)\leqslant f(1)$.

因为$f(x)=\frac{x^2}{e^x}$，所以$f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$，$x>0$，

当$x\in(0,2)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(0,2)$上单调递增；

当$x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减.

因为$m$为正实数，所以$2-\frac{1}{m}<2$，又因为函数$f(x)$在$(0,2)$上单调递增，所以$\begin{cases}0<2-\frac{1}{m}\leqslant1,\\ m>0,\end{cases}$解得$\frac{1}{2}<m\leqslant1$，

所以正实数m的取值范围为$\left(\frac{1}{2},1\right]$.故选A.

二、多项选择题

9.BC　提示：$(\ln2022)'=0$，$(\log_4(4x))'=\frac{4}{4x\ln4}=\frac{1}{x\ln4}$，

$\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}=-\frac{1}{\sin^2x}$，$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)'=3x^2+\frac{1}{x^2}$.故选BC.

10.ABD　提示：$f'(x)=\frac{1}{x}+x-2a=\frac{x^2-2ax+1}{x}(x>0)$，

对于A，当$-1<a<1$时，$x^2-2ax+1$恒大于零，则$f'(x)>0$，所以$f(x)$单调递增，无极值，故A错误；对于B，当$a=1$时，$f'(x)=\frac{1}{x}+x-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant0$，$f(x)$单调递增，无极值，故B错误；对于C，当$a>1$时，令$f'(x)=0$，解得$x_1=a-\sqrt{a^2-1}$，$x_2=a+\sqrt{a^2-1}$，可知$f(x)$在$(0,x_1)$和$(x_2,+\infty)$单调递增，在$(x_1,x_2)$单调递减，$f(x)$在$x=x_2$处取得极小值，而$0<x_1<1<x_2$，所以$f(x_2)<f(1)=1-2a<0$，故C正确；

对于D，当$x\to0$时，$f(x)<0$，当$x\to+\infty$时，$f(x)>0$，

而且$f(x)$的图象连续，所以$f(x)$必有零点，故D错误.故选ABD.

11.AB　提示：由题意知，$(1-2x)(a+1)+axe^x\geqslant0$对$x\in(0,+\infty)$恒成立，即$axe^x\geqslant(2x-1)(a+1)$对$x\in(0,+\infty)$恒成立，

当$a>-1$时，$\frac{a}{a+1}\geqslant\frac{2x-1}{xe^x}=\frac{2-\frac{1}{x}}{e^x}$，令$g(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{e^x}$，$x>0$，则$g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+2\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)}{e^x}$，

则当$x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

故$g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$，所以$\frac{a}{a+1}\geqslant\frac{1}{e}$，解得$a\geqslant\frac{1}{e-1}$.故选AB.

12.CD　提示：对于A，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，$(1,+\infty)$上单调递增，故A错误；

对于B，设$F(x)=f(x)+x$，则$F'(x)=\frac{e^x(x-1)+x^2}{x^2}$，设$g(x)=e^x(x-1)+x^2$，$g'(x)=e^x\cdot x+2x$，

所以当$x>0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{e}=\frac{1-2\sqrt{e}}{4}<0$，故当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$g(x)<0$，$F'(x)<0$，

所以当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$F(x)$单调递减，当$x_1<x_2$时，$f(x_1)+x_1>f(x_2)+x_2$，故B错误；

对于C，若$0<x_1<x_2<1$，则$f(x_1)>f(x_2)$，又$-x_1>-x_2$，所以$f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2$，故C正确；

对于D，若$1<x_1<x_2$，则$f(x_1)<f(x_2)$，即$f(x_1)-f(x_2)<0$，又$x_1<x_2$，所以$x_1\cdot[f(x_1)-f(x_2)]>x_2\cdot[f(x_1)-f(x_2)]$，整理得$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$，故D正确.故选CD.

三、填空题

13.$y=8x-72$　提示：因为$f(0)=81+m=0$，

所以$m=-81$，$f(-1)=1+m=-80$，

$f'(x)=8(2x+3)^3$，所以$f'(-1)=8$，所以所求切线方程为$y+80=8(x+1)$，即$y=8x-72$.

14.$\frac{e+1}{2}$　提示：因为$f(x)=\frac{xe^x+\frac{1}{x}-\ln x}{2}(x>0)$，

所以$f'(x)=\frac{1}{2}(x+1)\left(e^x-\frac{1}{x^2}\right)$，

令$g(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$，则$g'(x)=e^x+\frac{2}{x^3}>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$g\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-4<0$，$g(1)=e-1>0$，

所以存在唯一$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$g(x_0)=0$，

即$f(x)$唯一的极值点$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以$\langle x_0\rangle=1$，所以$f(\langle x_0\rangle)=f(1)=\frac{e+1}{2}$.

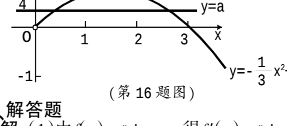
15.$(-\infty,2e]$　提示：$f'(x)=\ln x-1$，当$x\in(0,e)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当$x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以当$x=e$时，函数取得最小值$f(e)=e\ln e-2e+m=m-e$，所以$f(x)\in[m-e,+\infty)$，

若$f(x)\in[m-e,+\infty)$，函数$y=f(f(x))$与$y=f(x)$有相同的值域，只需$m-e\leqslant e$，即$m\leqslant2e$.

16.$\left(0,\frac{3}{4}\right)$　提示：因为$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}$，所以$g(x)=f'(x)-\frac{1}{3}=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{3}(x>0)$，

由$g(x)=0$，得$a=-\frac{1}{3}x^2+x(x>0)$，在同一坐标系中分别作出$y=-\frac{1}{3}x^2+x(x>0)$和$y=a$的图象如下图所示，由图可知当$0<a<\frac{3}{4}$时，两函数图象有两个不同的交点，即函数$g(x)$有两个零点，所以实数$a$的取值范围是$\left(0,\frac{3}{4}\right)$.




（第16题图）

四、解答题

17.解：(1)由$f(x)=e^x\sin x-x$，得$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-1$，

所以$f'(0)=0$，又$f(0)=0$，所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=0$.

(2)由$f(x)=e^x\sin x-x$，得$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-1$，

$f''(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x=2e^x\cos x$，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$f''(x)\geqslant0$，则$f'(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，

又$f'(0)=0$，所以$f'(x)\geqslant0$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上成立，即$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，所以$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}$.

18.解：(1)当$a=b=2$时，$f(x)=2x^3-6x^2+2$，$f'(x)=6x^2-12x(x\in\mathbf{R})$，

令$f'(x)=0$，解得$x=0$或$x=2$，

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下表：

| $x$ | $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,2)$ | 2 | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以当$x=0$时，$f(x)$有极大值，极大值为$f(0)=2$，

当$x=2$时，$f(x)$有极小值，极小值为$f(2)=2\times2^3-6\times2^2+2=-6$.

(2)$f(x)=ax^3-3ax^2+b$，则$f'(x)=3ax^2-6ax$，令$f'(x)=0$，解得$x=0$或$x=2$，

因为$a>0$，所以$x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$；$x\in(0,2)$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$上单调递增，$f(x)$在$(0,2)$上单调递减，

故当$x\in[1,4]$时，$f(x)$在$(1,2)$上单调递减，在$(2,4)$上单调递增，

则$[f(x)]_{\min}=f(2)=b-4a$，而$f(1)=-2a+b$，$f(4)=16a+b$，

因为$a>0$，所以$f(4)>f(1)$，所以$[f(x)]_{\max}=f(4)=16a+b$，

所以$\begin{cases}b-4a=13,\\ 16a+b=53,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=21.\end{cases}$

19.解：(1)由已知得，$\begin{cases}\frac{1}{2}a\times100+10b-\ln2=17.7,\\ \frac{1}{2}a\times225+15b-\ln3=25,\end{cases}$

解得$a=-\frac{1}{25}$，$b=\frac{51}{25}$，

所以$y=-\frac{1}{50}x^2+\frac{51}{25}x-\ln\frac{x}{5}(x\geqslant10)$，则该景点改造升级后旅游增加利润为$L(x)=-\frac{1}{50}x^2+\frac{51}{25}x-\ln\frac{x}{5}-x=-\frac{1}{50}x^2+\frac{26}{25}x-\ln\frac{x}{5}(x\geqslant10)$.

(2)由(1)得，$L(x)=-\frac{1}{50}x^2+\frac{26}{25}x-\ln\frac{x}{5}(x\geqslant10)$，

则$L'(x)=-\frac{1}{25}x+\frac{26}{25}-\frac{1}{x}=-\frac{x^2-26x+25}{25x}=-\frac{(x-1)(x-25)}{25x}$，

令$L'(x)=0$，得$x=25$，

当$x\in(10,25)$时，$L'(x)>0$，$L(x)$单调递增；当$x\in(25,+\infty)$时，$L'(x)<0$，$L(x)$单调递减，所以$x=25$时，$L(x)$取得最大值，且$[L(x)]_{\max}=L(25)=11.9$，

所以当投入25万元时，旅游增加利润最大，最大利润为11.9万元.

20.解：(1)因为$f(x)=(x+m)\cdot e^x$，所以$f'(x)=(x+m+1)\cdot e^x$，

令$f'(x)\leqslant0$，得$x\leqslant-m-1$，则$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-m-1]$，

因为$f(x)$在$(-\infty,1]$上单调递减，所以$-m-1\geqslant1$，即$m\leqslant-2$，故实数$m$的取值范围是$(-\infty,-2]$.

(2)由题意知，$f(x)=x\cdot e^x$，则$\forall x\geqslant0$，$ax^2\cdot e^x\leqslant e^{2x}$恒成立，即$ax^2\leqslant e^x$恒成立.

①当$x=0$时，$0\leqslant1$恒成立，则$a\in R$；

②当$x>0$时，$a\leqslant\frac{e^x}{x^2}$，令$g(x)=\frac{e^x}{x^2}$，则$g'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot2x}{x^4}=\frac{e^x\cdot(x-2)}{x^3}$，

则当$0<x<2$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当$x>2$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

故$g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2}{4}$，则$a\leqslant\frac{e^2}{4}$.

综上所述，实数$a$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{e^2}{4}\right]$.

21.解：(1)因为$f(x)=e^x-a\sin x$，所以$f'(x)=e^x-a\cos x$，所以$f(0)=1$，$f'(0)=1-a$，

所以函数$y=f(x)$在$(0,1)$处的切线方程为$y=(1-a)\cdot x+1$.

(2)因为$a=0$，所以$f(x)=e^x$，又$y=f(x)$和$y=g(x)$有公共点，

所以方程$f(x)=g(x)$有解，即$e^x=b\sqrt{x}$有解，显然$x\neq0$，所以$b=\frac{e^x}{\sqrt{x}}$在$(0,+\infty)$上有解.

设$h(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x}}(x>0)$，所以$h'(x)=\frac{e^x(2x-1)}{2x\sqrt{x}}$，

所以当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$h'(x)<0$；当$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$h'(x)>0$，

所以$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，

所以$h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2e}$，且当$x\to0$时，$h(x)\to+\infty$；当$x\to+\infty$时，$h(x)\to+\infty$，

所以$h(x)\in[\sqrt{2e},+\infty)$，所以$b$的取值范围为$[\sqrt{2e},+\infty)$.

22.解：(1)若$a=2$，则$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$，

所以$f'(x)=x^2-4x-2$，

令$f'(x)>0$，则$x<2-\sqrt{6}$或$x>2+\sqrt{6}$，

即$f(x)$在$(-\infty,2-\sqrt{6})$和$(2+\sqrt{6},+\infty)$上单调递增；

令$f'(x)<0$，则$2-\sqrt{6}<x<2+\sqrt{6}$，即$f(x)$在$(2-\sqrt{6},2+\sqrt{6})$上单调递减.

故$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,2-\sqrt{6})$和$(2+\sqrt{6},+\infty)$，单调递减区间为$(2-\sqrt{6},2+\sqrt{6})$.

(2)因为函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-a\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$，所以$x=-\frac{1}{2}$不是$f(x)$的零点，

令$f(x)=0$，则$a=\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^2+x+\frac{1}{4}}$，令$g(x)=\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^2+x+\frac{1}{4}}$，

则$g'(x)=\frac{4x^2(2x+3)}{3(2x+1)^3}$，

当$-\frac{1}{2}<x<0$，或$x>0$或$x<-\frac{3}{2}$时，$g'(x)>0$，函数$g(x)$单调递增；

当$-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$时，$g'(x)<0$，函数$g(x)$单调递减.

所以$g(x)_{极大值}=g\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{8}$，

又当$x\to-\infty$时，$g(x)\to-\infty$，当$x\to-\frac{1}{2}$时，$g(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$.

综上，当$a>-\frac{9}{8}$时，$f(x)$有1个零点；当$a=-\frac{9}{8}$时，$f(x)$有2个零点；当$a<-\frac{9}{8}$时，$f(x)$有3个零点.

$f(x)$有2个零点；当$a<-\frac{9}{8}$时，$f(x)$有3个零点.





扫码免费下载习题讲解ppt

## 第5期

### 第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D　提示：函数$f(x)=-x^3+1$在区间$[-1,2]$上的平均变化率为$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{(-2^3+1)-[-(-1)^3+1]}{3}=-3$，故选D.

2.C　提示：根据题意，由导数的定义，可得$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2+2x)-f(2)}{x}=2\lim\limits_{2x\to0}\frac{f(2+2x)-f(2)}{2x}=2f'(2)=8$.故选C.

3.A　提示：因为$\Delta s=s(2)-s(1)=24+2m-6-m=18+m$，所以$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(2)-s(1)}{2-1}=18+m=20$，

所以$m=2$，故选A.

4.B　提示：$f(x)=e^x\sin x$，则$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$，故选B.

5.A　提示：由图可知，经过点$(2,f(2))$和点$(4,f(4))$的割线的斜率大于曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线斜率，且小于曲线$y=f(x)$在点$(4,f(4))$处的切线斜率，所以$f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<f'(4)$，所以$2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$.故选A.

6.D　提示：根据题意，$h(t)=-4.9t^2+4.8t+11$，则$h'(t)=-9.8t+4.8$，

当$t=1$时，$h'(1)=-5$，即运动员在$t=1$时的瞬时速度为$-5$，故选D.

7.B　提示：①$f(x)=\sin x+\cos x$，则$f'(x)=\cos x-\sin x$，所以$f''(x)=-\sin x-\cos x$，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\sin x>0$，$\cos x>0$，则$-\sin x-\cos x<0$，故①满足题意；

②$f(x)=-xe^{-x}$，则$f'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}$，所以$f''(x)=(2-x)e^{-x}$，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$2-x>0$，即$f''(x)>0$，故②不满足题意；

③$f(x)=\ln x-2x$，则$f'(x)=\frac{1}{x}-2$，所以$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f''(x)<0$，故③满足题意；

④$f(x)=-x^3+2x-1$，则$f'(x)=-3x^2+2$，所以$f''(x)=-6x$，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f''(x)<0$，故④满足题意.

综上，有3个函数满足题意.故选B.

8.A　提示：对$f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$求导，得$f'(x)=e^x-ae^{-x}$.又$f'(x)$是奇函数，故$f'(0)=1-a=0$，解得$a=1$，故有$f'(x)=e^x-e^{-x}$.设切点为$(x_0,y_0)$，则$f'(x_0)=e^{x_0}-e^{-x_0}=\frac{3}{2}$，得$e^{x_0}=2$或$e^{x_0}=-\frac{1}{2}$(舍去)，得$x_0=\ln2$.故选A.

二、多项选择题

9.AD　提示：因为$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)=2$，故A正确；

因为$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}=\frac{1}{2}f'(x_0)=1$，故B错误；

因为$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_0)=4$，故C错误；

因为$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}=f'(x_0)=2$，故D正确.

故选AD.

10.AD　提示：对于A，$f(x)=x\ln x$，则$f'(x)=1+\ln x$，故A正确；

对于B，$f(x)=e^{2x}$，则$f'(x)=2e^{2x}$，故B错误；

对于C，$f(x)=\frac{1}{x}$，则$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，故C错误；

对于D，$f(x)=x+\sin x$，则$f'(x)=1+\cos x$，故D正确.

故选AD.

11.BD　提示：对于A，由$f(x_0)=f'(x_0)$，得$2x_0^2+3=4x_0$，$\Delta=4^2-4\times2\times3=-8<0$，无实数解，所以函数$f(x)=2x^2+3$无巧值点，故A错误；

对于B，由$f(x_0)=f'(x_0)$，得$\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$，解得$x_0=-1$，函数$f(x)=\frac{1}{x}$有巧值点$-1$，故B正确；

对于C，由$f(x_0)=f'(x_0)$，得$e^{-x_0}=-e^{-x_0}$，无解，所以函数$f(x)=e^{-x}$无巧值点，故C错误；

对于D，由$f(x_0)=f'(x_0)$，得$\ln x_0=\frac{1}{x_0}$，函数$y=\ln x_0$与$y=\frac{1}{x_0}$在第一象限有一个交点，所以方程$\ln x_0=\frac{1}{x_0}$有一个实数解，所以函数$f(x)=\ln x$有巧值点，故D正确.

故选BD.

12.BC　提示：由图可知$f(-1)=2$，$f(-2)>2$，又因为函数$f(x)$是奇函数，

所以$f(1)=-2$，$f(2)<-2$，所以$f(1)\cdot f(2)>4$，所以A错误，B正确；

由$f(x)$是奇函数，结合图象可知$f'(1)<0$，$f'(2)>0$，所以$f'(1)\cdot f'(2)<0$，所以C正确，D错误.故选BC.

三、填空题

13.e　提示：因为函数$f(x)=f'(1)x^2-e^x$，

所以$f'(x)=2f'(1)x-e^x$，故$f'(1)=2f'(1)-e$，

得$f'(1)=e$.

14.-1　提示：因为$f(x)=e^{-x}$，所以$f'(x)=-e^{-x}$，

设切点为$(x_0,e^{-x_0})$，则$f'(x_0)=-e^{-x_0}$，又该切线过点$(1,0)$，所以$\frac{e^{-x_0}}{x_0-1}=-e^{-x_0}$，解得$x_0=0$，

所以$f'(0)=-e^0=-1$，即该切线的斜率为-1.

15.$-\frac{1}{3}$　提示：由图可知，直线$l$过点$(0,-1)$，$(3,-2)$，

则直线$l$的斜率为$k=\frac{-2-(-1)}{3-0}=-\frac{1}{3}$，由导数的几何意义，可得$f'(3)=-\frac{1}{3}$.

16.$\alpha>\beta$　提示：由函数$g(x)=x$，得$g'(x)=1$，令$g(x)=g'(x)$，则$x=1$，即$\alpha=1$，

由$h(x)=\ln(x+1)$，则$h'(x)=\frac{1}{x+1}$，

设$m(x)=h(x)-h'(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}$，

易知$m(x)$为增函数，

由$m(0)=-1<0$，$m(1)=\ln2-\frac{1}{2}>0$，得$0<\beta<1$，

所以$\alpha>\beta$.

四、解答题

17.解：(1)由$f(x)=3x^4+\sin x$，得$f'(x)=12x^3+\cos x$.

(2)由$f(x)=\sqrt{x}\ln x-e^{2x-1}$，

得$f'(x)=\frac{\sqrt{x}\ln x}{2x}+\frac{\sqrt{x}}{x}-2e^{2x-1}$.

18.解：因为$f(x)=ax^2-\frac{4}{3}ax+b$，所以$f'(x)=2ax-\frac{4}{3}a$，

所以$f'(1)=2a-\frac{4}{3}a=1$，解得$a=\frac{3}{2}$.又$f(1)=a-\frac{4}{3}\cdot a+b=2$，解得$b=\frac{5}{2}$，故$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{5}{2}$.

19.解：(1)$f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+2x$，故第1s内的平均速度为$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{2}{3}+1+2=\frac{11}{3}$m/s.

(2)$f'(x)=2x^2+2x+2$，则$f'(1)=6$，所以质点在第1s末的瞬时速度是6m/s.

(3)由$2x^2+2x+2=14$，解得$x=2$，或$x=-3$(舍去)，故经过2s质点的运动速度达到14m/s.

20.解：(1)因为$y=2x-x^3$，所以$y'=-3x^2+2$，当$x=1$时，$y'=-1$，

所以点$A(1,1)$处的切线方程为$y-1=(-1)(x-1)$，即$x+y-2=0$.

(2)设切点坐标为$(m,2m-m^3)$，又$B(2,0)$，

则直线斜率$k=\frac{2m-m^3}{m-2}$，

当$x=m$时，$y'=2-3m^2$，所以$\frac{2m-m^3}{m-2}=2-3m^2$，整理得$m^3-3m^2+2=0$，

化简得$(m-1)(m^2-2m-2)=0$，

解得$m_1=1$，$m_2=1+\sqrt{3}$，$m_3=1-\sqrt{3}$.

当$m=1$时，$k=2-3m^2=-1$，直线方程为$y=-(x-2)=2-x$；

当$m=1+\sqrt{3}$时，$k=2-3m^2=-10-6\sqrt{3}$，直线方程为$y=(-10-6\sqrt{3})(x-2)$；

当$m=1-\sqrt{3}$时，$k=2-3m^2=-10+6\sqrt{3}$，直线方程为$y=(-10+6\sqrt{3})(x-2)$.

21.解：(1)因为$f(-x)$的导数为$-f'(-x)$，所以$f(-x)$在$x=a$处的导数值为$-f'(-a)$，

又$f(x)$在$x=-a$处的导数值为$f'(-a)$，

故$f(-x)$在$x=a$处的导数值与$f(x)$在$x=-a$处的导数值互为相反数.

(2)因为$f(x)$为偶函数，

所以$f'(-x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x)$，

所以$f'(x)$为奇函数.

22.(1)解：$f'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geqslant-1$，故切线斜率的取值范围为$[-1,+\infty)$.

(2)解：结合(1)可知，$f'(x)\geqslant-1$且$-\frac{1}{f'(x)}\geqslant-1$，

即$-1\leqslant f'(x)<0$或$f'(x)\geqslant1$，

解得$x\leqslant2-\sqrt{2}$，或$1<x<3$，或$x\geqslant2+\sqrt{2}$.

故切点横坐标的取值范围为$(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup(1,3)\cup[2+\sqrt{2},+\infty)$.

(3)证明：假设存在切线$l$与曲线$C$同时切于不同的两点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，则在点$A$处的切线方程是$y-\left(\frac{1}{3}x_1^3-2x_1^2+3x_1\right)=(x_1^2-4x_1+3)(x-x_1)$，

即$y=(x_1^2-4x_1+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2\right)$；

同理，在点$B$处的切线方程是$y=(x_2^2-4x_2+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2\right)$.

由于两切线是同一直线，则有$x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$，且$-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2=-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2$，化简得$x_1+x_2=4$，

且$(x_1+x_2)^2-3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$，解得$x_1=2$，$x_2=2$.

这与$x_1\neq x_2$矛盾，所以不存在与曲线$C$同时切于两个不同点的直线.

## 第6期

### 第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D　提示：函数$f(x)=4x^2+\frac{1}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f'(x)=8x-\frac{1}{x^2}=\frac{8x^3-1}{x^2}$，

令$f'(x)>0$，解得$x>\frac{1}{2}$，所以函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.故选D.

2.C　提示：设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，且在$(a,b)$内可导，令$f'(x)=0$，

若方程无解，或方程有解时，在导数为0的点左右附近，导数符号不改变，则函数无极值点；

若方程有解时，在导数为0的点左右附近，导数符号改变，则函数有极值点，与端点函数值比较，可知是否为最值点.故选C.

3.D　提示：由导函数图象可知，当$x<0$时，函数$f(x)$单调递减，故排除A，B；由$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,x_1)$上单调递增，因此当$x=0$时，函数$f(x)$有极小值，故排除C.故选D.

4.A　提示：由题意得$f'(x)=12x^2-2ax-2b$，因为$f(x)$在$x=1$处有极小值-3，

所以$f'(1)=12-2a-2b=0$，$f(1)=4-a-2b+2=-3$，解得$a=3$，$b=3$，经检验，在$x=1$处$f(x)$有极小值-3，所以$a-b=0$.故选A.

5.A　提示：因为$f(x)=x^2-\ln x(x>0)$，所以$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$，所以当$x\in[1,2]$时，$f'(x)=\frac{2x^2-1}{x}>0$，则$f(x)$在$[1,2]$上单调递增，所以$f(x)$在$[1,2]$上的最小值为$f(1)=1$.故选A.

6.B　提示：结合图象可知，当$x\in(-\infty,-2)$时，$f(x)<0$，$f'(x)>0$，此时$f(x)\cdot f'(x)<0$；

当$x\in(-2,-1)$时，$f(x)>0$，$f'(x)>0$，此时$f(x)\cdot f'(x)>0$；当$x\in(-1,0)$时，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，此时$f(x)\cdot f'(x)<0$；

当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)>0$，$f'(x)>0$，此时$f(x)f'(x)>0$.

故$f(x)\cdot f'(x)<0$的解集为$(-\infty,-2)\cup(-1,0)$.故选B.

7.C　提示：等腰$\triangle PMN$中，$\angle MON=2\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，

设$\triangle PMN$的面积为$S(\alpha)$，则$S(\alpha)=2\times S_{\triangle OPN}+S_{\triangle OMN}=2\times\frac{1}{2}\times20\times10\times\sin(\pi-\alpha)+\frac{1}{2}\times10\times10\times\sin2\alpha=200\sin\alpha+50\sin2\alpha$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$S'(\alpha)=200\cos\alpha+2\times50\cos2\alpha=200\cos\alpha+100\cos2\alpha=200\cos\alpha+100(2\cos^2\alpha-1)=100\cdot(2\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1)$，

令$S'(\alpha)=0$，即$2\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1=0$，解得$\cos\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\cos\alpha=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$(舍去)，

记$\cos\alpha_0=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\alpha_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，当$\alpha\in(0,\alpha_0)$时，$S'(\alpha)>0$，函数$S(\alpha)$单调递增；

当$\alpha\in\left(\alpha_0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$S'(\alpha)<0$，函数$S(\alpha)$单调递减，

所以当$\alpha=\alpha_0$，即$\cos\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$S(\alpha)$取得极大值，也是最大值，则$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1=1-\sqrt{3}$.故选C.

8.C　提示：因为$\lg5\cdot\lg7<\left(\frac{\lg5+\lg7}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg35}{2}\right)^2<\left(\frac{\lg36}{2}\right)^2=(\lg6)^2$，$b-c=\log_67-\log_56=\frac{\lg7}{\lg6}-\frac{\lg6}{\lg5}=\frac{\lg7\cdot\lg5-(\lg6)^2}{\lg6\cdot\lg5}<0$，所以$b<c$.令$g(x)=e^x-x-1$，则$g'(x)=e^x-1$，当$x>0$时，$g'(x)=e^x-1>0$，当$x<0$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)_{\min}=g(0)=0$，即$e^x\geqslant x+1$，当且仅当$x=0$时取等号，所以$3^{0.2}>e^{0.2}>1+0.2=1.2$.

令$f(x)=\frac{x}{5}-\log_5x$，则$f'(x)=\frac{1}{5}-\frac{1}{x\ln5}=\frac{x\ln5-5}{5\ln5\cdot x}$，

当$x>\frac{5}{\ln5}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，因为$f(5)=0$，所以$f(6)=\frac{6}{5}-\log_56>0$，所以$\frac{6}{5}>\log_56$，所以$3^{0.2}>e^{0.2}>\frac{6}{5}>\log_56$，所以$a>c$，所以$a>c>b$.故选C.

二、多项选择题

9.BD　提示：对于A，$f(x)=x^4$，其导数$f'(x)=4x^3$，在区间$(-\infty,0)$上，有$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，不符合题意；

对于B，$f(x)=x-\sin x$，其导数$f'(x)=1-\cos x$，在$(-\infty,+\infty)$上，有$f'(x)\geqslant0$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，符合题意；

对于C，$f(x)=xe^x$，其导数$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$，在区间$(-\infty,-1)$上，有$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，不符合题意；

对于D，$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，其导数$f'(x)=e^x+e^{-x}-2$，必有$f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant2-2=0$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，符合题意.故选BD.

10.AC　提示：由函数$y=f(x)$的导函数$f'(x)$的图象可知，

$y=f'(x)$连续不断，且$x=-4$附近的左侧导数小于

②

0,右侧导数大于 0,知 $f(x)$在 $x=-4$ 时取得极小值,故 A 正确;

同理可得,$f(x)$在 $x=1.5$ 时取得极小值,即 $x=1.5$ 是 $f(x)$的极小值点,故 C 正确;

$x=-2$ 附近左右两侧的导数值均为正,故 $x=-2$ 不是函数 $y=f(x)$的极值点,故 B 错误,同理知 D 错误.故选 AC.

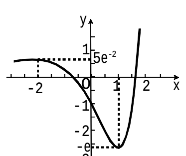
11.AB 提示:令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$,则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$,故 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

而 $\ln2>0,2>0$,故 $g(\ln2)<g(0),g(2)<g(0)$,即 $\dfrac{f(\ln2)}{2}<\dfrac{f(0)}{1}$,$\dfrac{f(2)}{e^2}<\dfrac{f(0)}{1}$,即 $f(\ln2)<2f(0)$,$f(2)<e^2f(0)$,故选 AB.

12.AC 提示:$f'(x)=e^x(x^2-x-1)+e^x(2x-1)=e^x(x^2+x-2)=e^x(x+2)(x-1)$,

所以在$(-\infty,-2)$,$(1,+\infty)$上,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,在$(-2,1)$上,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,所以 $f(x)$极大值为 $f(-2)=e^{-2}[(-2)^2-(-2)-1]=5e^{-2}$,

$f(x)$极小值为 $f(1)=e(1-1-1)=-e$,故 A 正确;当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)>0$,所以 $f(x)$有两个零点,故 B 不正确;$f(-2)=5e^{-2}$,$f(2)=e^2(4-2-1)=e^2$,所以当 $x\in[-2,2]$时,$f(x)$的最大值为 $e^2$,故 C 正确;由上可知,$f(x)$的图象如图所示.



(第 12 题图)

方程 $f(x)=k$ 恰有 3 个不等实根,可转化为 $y=f(x)$与 $y=k$ 的交点有 3 个,由图象可得,当$-e<k\leqslant0$ 时,$f(x)=k$ 有 2 个实数根,当 $0<k<5e^{-2}$ 时,$f(x)=k$ 有 3 个实数根,当 $k=5e^{-2}$ 时,$f(x)=k$ 有 2 个实数根,当 $k>5e^{-2}$ 时,$f(x)=k$ 有 1 个实数根,故 D 不正确.故选 AC.

三、填空题

13.$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 提示:由题意知,$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=\ln\sqrt{x}+x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\ln\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}$,

令$f'(x)<0$,解得 $0<x<\dfrac{1}{e}$,故 $f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.

14.② 提示:①$y'=3x^2\geqslant0$ 恒成立,所以函数在$\mathbf{R}$上单调递增,无极值点;

②$y'=2x$,当 $x>0$ 时,$y'>0$,函数单调递增,当 $x<0$ 时,$y'<0$,函数单调递减,所以 $x=0$ 处函数取得极小值,故②符合;

③$y'=\dfrac{1}{x+1}>0$,函数在定义域上单调递增,无极值点;④$y=2^x$ 在$\mathbf{R}$上单调递增,无极值点.

15.6;28.8π 提示:瓶子半径为 $r$ 时,每瓶饮料的利润是

$f(r)=0.2\times\dfrac{4\pi}{3}r^3-0.8\pi r^2=0.8\pi\left(\dfrac{r^3}{3}-r^2\right)$,$0<r\leqslant6$,

所以 $f'(r)=0.8\pi(r^2-2r)$,

令 $f'(r)=0$,得 $r=2$ 或 $r=0$(舍去),

当 $r\in(0,2)$时,$f'(r)<0$,$f(r)$单调递减,

当 $r\in(2,6]$时,$f'(r)>0$,$f(r)$单调递增,

$r\to0$ 时,$f(r)\to0$;$r=6$ 时,$f(6)=28.8\pi$,

故半径为 6cm 时,利润最大为 28.8π 分.

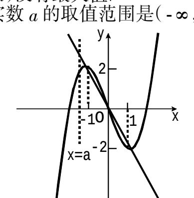
16.2;$(-\infty,-1)$ 提示:若 $a=0$,函数$f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant0,\\-2x,x>0,\end{cases}$

若 $x\leqslant0$,则 $f(x)=x^3-3x$,$f'(x)=3x^2-3$,令 $3x^2-3=0$,解得 $x=-1$ 或 $x=1$(舍去),

当 $x\leqslant-1$ 时,$f'(x)>0$,此时函数 $f(x)$单调递增,当$-1<x<0$ 时,$f'(x)<0$,此时 $f(x)$单调递减.若 $x>0$,则 $f(x)=-2x$,此时函数 $f(x)$单调递减,所以当 $x=-1$时,$f(x)$取得最大值,为 $f(-1)=2$.函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant a,\\-2x,x>a,\end{cases}$

画出 $f(x)$的大致图象,由图可知,只有当 $a<-1$ 时,函数 $f(x)$没有最大值.

所以实数 $a$ 的取值范围是$(-\infty,-1)$.



(第 16 题图)

四、解答题

17.解:(1)当 $a=3$ 时,$f(x)=\ln x-3x$,函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-3=\dfrac{1-3x}{x}$,

所以 $f'(1)=-2$,所以曲线 $y=f(x)$在点 $P$ 处的切线方程为 $y+3=-2(x-1)$,即为 $2x+y+1=0$.

(2)$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}(x>0)$,

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$,函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,解得 $0<x<\dfrac{1}{a}$;令 $f'(x)<0$,解得 $x>\dfrac{1}{a}$,故函数 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$单调递增,在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$单调递减.

综上,当 $a\leqslant0$ 时,函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$;当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$,单调递减区间为$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

18.解:(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=e^x-2x-1$,所以 $f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)>0$,即 $e^x-2>0$,解得 $x>\ln2$;令 $f'(x)<0$,即 $e^x-2<0$,解得 $x<\ln2$,

所以当 $a=2$ 时,函数$f(x)$的单调递增区间是$(\ln2,+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,\ln2)$.

(2)因为 $f(x)=e^x-ax-1$,所以 $f'(x)=e^x-a$.

因为 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $f'(x)=e^x-a\geqslant0$ 恒成立,即 $a\leqslant e^x$ 恒成立.

因为 $x\in\mathbf{R}$ 时,$e^x\in(0,+\infty)$,所以 $a\leqslant0$,即 $a$ 的取值范围为$(-\infty,0]$.

19.解:(1)由题意知,$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}-1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{-x^2+ax-a}{x^2}$,令 $g(x)=-x^2+ax-a$,则 $g(x)=0$ 有两个不等正根 $x_1,x_2$,

所以$\begin{cases}\Delta=a^2-4a>0,\\x_1+x_2=a>0,\\x_1x_2=a>0,\end{cases}$解得 $a>4$,所以实数 $a$ 的取值范围为$(4,+\infty)$.

(2)由(1)知,$a>4$,$x_1,x_2$ 是 $g(x)=0$ 的两根,则 $x_1+x_2=x_1x_2=a$,所以 $f(x_1)+f(x_2)-3a=\dfrac{a}{x_1}-x_1+a\ln x_1+\dfrac{a}{x_2}-x_2+a\ln x_2-3a=\dfrac{a(x_1+x_2)}{x_1x_2}-(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)-3a=a\ln a-3a$.

令 $h(a)=a\ln a-3a(a>4)$,则 $h'(a)=\ln a-2$,

所以当 $a\in(4,e^2)$时,$h'(a)<0$;

当 $a\in(e^2,+\infty)$时,$h'(a)>0$.

所以 $h(a)$在$(4,e^2)$上单调递减,在$(e^2,+\infty)$上单调递增,

所以 $h(a)_{min}=h(e^2)=2e^2-3e^2=-e^2$,即 $f(x_1)+f(x_2)-3a$ 的最小值为$-e^2$.

20.解:(1)依题意得 $L(x)=x(4-x)+x\left(6-\dfrac{6\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}\right)-2x-1=-x^2+8x-6\ln x-2(x>0)$.

(2)当 $1\leqslant x\leqslant6$ 时,因为 $L'(x)=-2x+8-\dfrac{6}{x}=\dfrac{-2x^2+8x-6}{x}=-\dfrac{2(x-1)(x-3)}{x}$,

所以当 $1<x<3$ 时,$L'(x)>0$;当 $3<x<6$ 时,$L'(x)<0$.

所以 $L(x)$在$[1,3]$上单调递增,在$[3,6]$上单调递减,

当 $x=3$ 时,$[L(x)]_{max}=L(3)=13-6\ln3$,

所以当月产量为 3 万件时,该企业所获得的最大月利润为$(13-6\ln3)$万元.

21.解:(1)由题意可得$f'(x)=3x^2-1$,则切线的斜率 $k=f'(-1)=2$,

且$f(-1)=0$,故切线方程为$y=2(x+1)$,即$2x-y+2=0$.

由$g'(x)=2x=2$,可得$x=1$,

则$g(x)$的切点坐标为$(1,1+a)$,

由于切点在直线$2x-y+2=0$上,故$2-(1+a)+2=0$,解得$a=3$.

(2)由题意得$f'(x)=3x^2-1$,则$y=f(x)$在点$(x_1,f(x_1))$处的切线方程为$y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$,

整理得$y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$,与$y=x^2+a$联立得$x^2+(1-3x_1^2)x+a+2x_1^3=0$,

由于直线$y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$,与曲线$y=g(x)$也相切,

所以$\Delta=(1-3x_1^2)^2-4(a+2x_1^3)=0$有解,此时$4a=9x_1^4-8x_1^3-6x_1^2+1$有解,

令$h(x_1)=9x_1^4-8x_1^3-6x_1^2+1$,则$h'(x_1)=36x_1^3-24x_1^2-12x_1=12x_1(x_1-1)(3x_1+1)$,

由$h'(x_1)>0$,得$-\dfrac{1}{3}<x_1<0$或$x_1>1$,由$h'(x_1)<0$,得$x_1<-\dfrac{1}{3}$,或$0<x<1$,

所以$h(x_1)$在$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$单调递减,在$\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$单调递增,在$(0,1)$单调递减,在$(1,+\infty)$单调递增,

又$h\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{20}{27}$,$h(1)=-4$,所以$h(x_1)\geqslant-4$,即$4a\geqslant-4$,得$a\geqslant-1$,所以$a$的取值范围为$[-1,+\infty)$.

22.解:(1)当 $a=0$ 时,$f(x)=-\dfrac{1}{x}-\ln x$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}$,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<1$,令 $f'(x)<0$,得 $x>1$,

所以函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,

所以 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极大值,同时也是最大值,所以函数 $f(x)$的最大值为 $f(1)=-1$.

(2)$f'(x)=a+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{a+1}{x}=\dfrac{(x-1)(ax-1)}{x^2}$,

①当 $a=0$ 时,由(1)可知,函数 $f(x)$无零点;

②当 $a<0$ 时,易知函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,

又 $f(1)=a-1<0$,故此时函数 $f(x)$无零点;

③当 $0<a<1$ 时,易知函数 $f(x)$在$(0,1)$,$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$单调递减,

且 $f(1)=a-1<0$,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)<f(1)<0$,且当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一零点;

④当 $a=1$ 时,$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant0$,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且 $f(1)=0$,故此时函数 $f(x)$有唯一零点;

⑤当 $a>1$ 时,易知函数 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$,$(1,+\infty)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{a},1\right)$上单调递减,且 $f(1)=a-1>0$,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)>f(1)>0$,$x\to0$ 时,$f(x)\to-\infty$,故函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一零点.

综上,实数 $a$ 的取值范围为$(0,+\infty)$.

## 第 7 期

### 第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A 提示:对于A,$y=x^3-3x$,其导数$y'=3x^2-3$,在区间$(1,+\infty)$上,$y'>0$,函数单调递增,符合题意;对于B,$y=\ln x-x$,其导数$y'=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$,在区间$(1,+\infty)$上,$y'<0$,函数单调递减,不符合题意;对于C,$y=x+\dfrac{4}{x}$,其导数$y'=1-\dfrac{4}{x^2}$,在区间$(1,2)$上,$y'<0$,函数单调递减,不符合题意;对于D,$y=x^2-3x+1$是二次函数,在区间$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$上单调递减,不符合题意.故选A.

2.A 提示:$f'(x)=x+\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{(x-1)^2}{x}\geqslant0$,故原函数单调递增,$f(x)$无极值点.故选A.

3.D 提示:令$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$,则$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$,故当$x>1$时,$f'(x)>0$,故$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

而$a=\dfrac{2}{3}+\ln\dfrac{3}{2}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$,$b=1+\dfrac{1}{e}=f(e)$,$c=\dfrac{1}{2}+\ln2=f(2)$,因为$1<\dfrac{3}{2}<2<e$,所以$f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f(2)<f(e)$,即$a<c<b$,故选D.

4.B 提示:由题意得,$f'(x)=\cos x-a\sin x\leqslant0$在区间$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$上恒成立,所以$a\geqslant\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\tan x}$在区间$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$上恒成立,因为当$x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$0<\dfrac{1}{\tan x}<1$,所以$a\geqslant1$.故选B.

5.A 提示:设$g(x)=f(x)-2\ln x-1$,所以$g'(x)=f'(x)-\dfrac{2}{x}>0$,所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

因为$f(e)=3$,所以$g(e)=f(e)-2\ln e-1=3-2-1=0$,所以不等式$f(x)>2\ln x+1$等价于$g(x)>0=g(e)$,所以$x>e$,即不等式的解集为$(e,+\infty)$.故选A.

6.D 提示:$f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$,$x\in[0,2\pi]$,则$f'(x)=-\sin x+\sin x+(x+1)\cos x=(x+1)\cos x$,

令$f'(x)=0$,得$x=\dfrac{\pi}{2}$或$\dfrac{3\pi}{2}$,所以$f(x)$的最值必在$f(0)$,$f(2\pi)$,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$,$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$中,

而$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2$,$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\dfrac{3\pi}{2}$,$f(0)=2$,$f(2\pi)=2$,

所以函数$f(x)$在区间$[0,2\pi]$的最小值为$-\dfrac{3\pi}{2}$,最大值为$\dfrac{\pi}{2}+2$,故选D.

7.D 提示:因为$f(x)+f(-x)=0$,可得$f(x)$是奇函数,且在$x\in\mathbf{R}$上是减函数,由$f(a\cdot e^x)+f(1-2x)\leqslant0$,

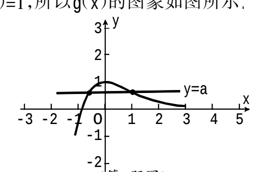
即$f(a\cdot e^x)\leqslant-f(1-2x)=f(2x-1)$,即$a\geqslant\dfrac{2x-1}{e^x}$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立,令$h(x)=\dfrac{2x-1}{e^x}$,

由$h'(x)=\dfrac{3-2x}{e^x}$,令$h'(x)>0$,解得$x<\dfrac{3}{2}$,令$h'(x)<0$,解得$x>\dfrac{3}{2}$,故$h(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$单调递增,在$\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$单调递减,故$h(x)$的最大值为$h\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$,可得$a\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$.故选D.

8.B 提示:由$f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x=0$,得到$a=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$,令$g(x)=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$,则问题等价于直线$y=a$与函数$g(x)$的图象有两个交点,$g'(x)=\dfrac{e^x(2e^x+1)(-e^x-x+1)}{(e^{2x}+e^x)^2}$,

其中$e^x>0$,$2e^x+1>0$,$-e^x-x+1$是单调递减的,并且$x=0$时,$-e^x-x+1=0$,

因此函数$g'(x)=\dfrac{e^x(2e^x+1)(-e^x-x+1)}{(e^{2x}+e^x)^2}$存在唯一零点$x=0$,当$x>0$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,且此时$g(x)>0$;当$x<0$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增且$x\to-\infty$时,$g(x)\to-\infty$,又$g(0)=1$,所以$g(x)$的图象如图所示.



(第8题图)

显然,当$0<a<1$时,$y=a$与$g(x)$有两个交点,故选B.

二、多项选择题

9.AD 提示:$f'(x)=3x^2+2ax+a$,因为$f(x)$有两个不同的极值点,所以$\Delta=4a^2-12a>0$,

即$4a(a-3)>0$,解得$a<0$,或$a>3$.故选AD.





10.AC 提示:$f'(x)=-x^3+a$,若函数$f(x)$在$[1,2]$上单调递增,则$-x^3+a\geqslant0$恒成立,

故$a\geqslant x^3$在$[1,2]$上恒成立,故$a\geqslant8$,故C正确,D错误;若函数$f(x)$在$[1,2]$上单调递减,则$-x^3+a\leqslant0$恒成立,

故$a\leqslant x^3$在$[1,2]$上恒成立,故$a\leqslant1$,故A正确,B错误.故选AC.

11.AD 提示:$f(x)=x\sin x$,$f'(x)=\sin x+x\cos x$,令$g(x)=\sin x+x\cos x$,$g'(x)=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$.

对于A,$f(x)$在$(0,\pi)$上连续,$f(0)=f(\pi)=0$,所以$f(x)$在$(0,\pi)$上不单调,故A正确;

对于B,因为$g'(x)=2\cos x-x\sin x$,当$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

因为$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1>0$,$g(\pi)=f'(\pi)=-\pi<0$,

所以存在唯一$x_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,使得$f'(x_0)=0$.

随着$x$的变化,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下:

| $x$ | $\left(\dfrac{\pi}{2},x_0\right)$ | $x_0$ | $(x_0,\pi)$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ |

所以$f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$内有且只有一个极值点,故B错误;

对于C,令$f(x)=x\sin x=0$,得$x=0$或$x=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以在$[-2\pi,2\pi]$上有5个零点,故C错误;

对于D,由选项B可知,$f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},x_0\right)$内单调递增,在$(x_0,\pi)$内单调递减,

又因为$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0$,$f(\pi)=0$,所以当$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$时,$\ln\dfrac{\pi}{2}<\ln x\leqslant\ln\pi$,所以$g(x)=\dfrac{f(x)+1}{\ln x}\geqslant\dfrac{1}{\ln\pi}$,当且仅当$x=\pi$时取等号,所以$g(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上的最小值为$\dfrac{1}{\ln\pi}$,故D正确.故选AD.

12.ABC 提示:对于A,令$f(x)=e^x-(x+1)$,$f'(x)=e^x-1$,所以当$x>0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,当$x<0$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,所以$f(x)\geqslant f(0)=0$,所以$e^x\geqslant x+1$,所以$e^{x+2}\geqslant x+3$,故A正确;

对于B,令$f(x)=x^2-\ln x$,$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$,所以在$\left(0,\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$上,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,在$\left(\dfrac{\sqrt2}{2},+\infty\right)$上,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以$f(x)\geqslant f\left(\dfrac{\sqrt2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt2}{2}=\ln\sqrt{e}-\ln\dfrac{\sqrt2}{2}>0$,所以$x^2>\ln x$,所以$(x+1)^2>\ln(x+1)(x>-1)$,故B正确;

对于C,令$f(x)=\ln x-(x-1)$,$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$,当$x>1$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当$0<x<1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以$f(x)\leqslant f(1)=0$,所以$\ln x-(x-1)\leqslant0$,所以$\ln x\leqslant x-1$,所以$\ln(x+2)\leqslant x+1(x>-2)$,故C正确;

对于D,取$x=-\pi$,得$e^{-\pi}=\dfrac{1}{e^{\pi}}<\dfrac{1}{8}=\sin(-\pi)+\dfrac{1}{8}$,故D错误.故选ABC.

三、填空题

13.1 提示:$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}+x-1=\dfrac{(x-1)(e^x-1)}{e^x}$,

令$f'(x)>0$,得$x>1$或$x<0$,令$f'(x)<0$,得$0<x<1$,所以$f(x)$在$(-\infty,0)$,$(1,+\infty)$上单调递增,在$(0,1)$上单调递减,所以$f(x)$的极大值为$f(0)=1$.

14.3(答案不唯一) 提示:由题意得,$f'(x)=2-\dfrac{a}{x^2}$在$[1,2]$上有变号零点,

故$a=2x^2$在$(1,2)$上有解,所以$2<a<8$.故可填3(答案不唯一).

15.3 提示:由$x\ln x+\lambda>(\lambda-1)x$对$\forall x\in(1,+\infty)$恒成立,得$\lambda<\dfrac{x+x\ln x}{x-1}$在$x>1$时恒成立,

令$f(x)=\dfrac{x+x\ln x}{x-1}$,$x>0$,则$f'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x-1}$,令$g(x)=x-\ln x-2$,$x>1$,则$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$,则$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,$g(3)=1-\ln3<0$,$g(4)=2-\ln4>0$,

故存在$x_0\in(3,4)$,使得$g(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$,

当$1<x<x_0$时,$g(x)<0$,即$f'(x)<0$,函数$f(x)$单调递减;当$x>x_0$时,$g(x)>0$,即$f'(x)>0$,函数$f(x)$单调递增,故当$x=x_0$时,函数$f(x)$取得最小值$f(x_0)=\dfrac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1}=x_0>3$,

故$\lambda\leqslant3$,因为$\lambda\in\mathbf{Z}$,则$\lambda$的最大值为3.

16.$(1,+\infty)$ 提示:不等式$f(2-x)>f(x)\cdot3^{2-2x}$,变形为$f(2-x)>f(x)\cdot3^{2-x}\cdot3^{-x}$,

所以$\dfrac{f(2-x)}{3^{2-x}}>\dfrac{f(x)}{3^x}$,令$F(x)=\dfrac{f(x)}{3^x}$,则$F(2-x)>F(x)$,

$F'(x)=\dfrac{f'(x)3^x-3^x\ln3f(x)}{(3^x)^2}=\dfrac{f'(x)-\ln3f(x)}{3^x}$,

又因为"$\forall x\in\mathbf{R}$,$f'(x)<\ln3\cdot f(x)$"是真命题,所以$x\in\mathbf{R}$,$f'(x)-\ln3\cdot f(x)<0$,

即$F'(x)<0$,所以$F(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减,又$F(2-x)>F(x)$,所以$2-x<x$,

所以$x>1$,所以不等式$f(2-x)>f(x)\cdot3^{2-2x}$的解集为$(1,+\infty)$.

四、解答题

17.解:设每月的生产数量$S(x)=\dfrac{k}{e^x}$,

当$x=50$时,$S(50)=20$,则$k=20e^{50}$,

所以$y=\dfrac{20e^{50}}{e^x}(x-40-m)$.

(1)当$m=8$时,$y=\dfrac{20e^{50}}{e^x}(x-48)$,$46\leqslant x\leqslant51$,

$y'=\dfrac{20e^{50}}{e^x}(49-x)$,令$y'=0$,则$x=49$.

当$x\in[46,49)$时,$y'>0$,该函数单调递增;当$x\in(49,51]$时,$y'<0$,该函数单调递减.所以当$x=49$时,$y$取得极大值,也是最大值,此时$y=20e\approx54.4$万元.

所以$x=49$时,该工厂每月的利润$y$最大,最大值为54.4万元.

(2)$y\geqslant20$恒成立,即$\dfrac{20e^{50}}{e^x}(x-40-m)\geqslant20$,

所以$m\leqslant x-40-\dfrac{e^x}{e^{50}}$在$x\in[46,51]$上恒成立.

设$f(x)=x-40-\dfrac{e^x}{e^{50}}$,$x\in[46,51]$,$f'(x)=1-\dfrac{e^x}{e^{50}}$,令$f'(x)=0$,解得$x=50$,所以$f(x)$的最小值在$f(46)$,$f(50)$,$f(51)$中取到,$f(46)=6-\dfrac{1}{e^4}$,$f(50)=9$,$f(51)=11-e$,易知$f(46)$最小,所以$m\leqslant6-\dfrac{1}{e^4}\approx5.98$,所以$m$最多可取5.9.

答:每件产品投入的资金最多为5.9元时,可使工厂每月利润至少达到20万元.

18.解:(1)当$a=0$时,$f(x)=x^3-3x^2+2$,

所以$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$,

当$x$变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

| $x$ | $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,2)$ | 2 | $(2,+\infty)$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$,$(2,+\infty)$,单调递减区间为$(0,2)$.

所以函数$f(x)$的极大值为$f(0)=2$,极小值为$f(2)=-2$.

(2)$f'(x)=3x^2-6x+a$,因为函数$f(x)$在区间$[-1,a]$上单调递增,

所以$f'(x)\geqslant0$对$x\in[-1,a]$恒成立,因为函数$f'(x)=3x^2-6x+a$图象的对称轴为$x=1$,

①当$-1<a\leqslant1$时,$f'(x)$在$[-1,a]$上的最小值为$f'(a)$,

由$f'(a)=3a^2-5a\geqslant0$,得$a\geqslant\dfrac{5}{3}$或$a\leqslant0$,所以$-1<a\leqslant0$;

②当$a>1$时,$f'(x)$在$[-1,a]$上的最小值为$f'(1)$,由$f'(1)=3-6+a\geqslant0$,解得$a\geqslant3$.

所以实数$a$的取值范围为$(-1,0]\cup[3,+\infty)$.

19.(1)解:当$n=2$时,$f(x)=x^2\ln x(x>0)$,

所以$f'(x)=x(1+2\ln x)$,

令$f'(x)=0$,得$x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$,

当$x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$时,$f'(x)<0$,

当$x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,

所以函数$f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$上单调递减,在区间$\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$上单调递增,

所以函数$f(x)$有极小值$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\dfrac{1}{2e}$,无极大值,所以函数$f(x)$有最小值$-\dfrac{1}{2e}$,无最大值.

(2)证明:当$n=1$时,$f(x)=x\ln x$,要证当$x>1$时,$f(x)<\dfrac{1}{2}(x^2-1)$,只需证当$x>1$时,$x\ln x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x^2<0$成立.

令$g(x)=x\ln x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x^2(x>1)$,$g'(x)=\ln x+1-x$,$g''(x)=\dfrac{1}{x}-1<0$,

所以$g'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,所以$g'(x)<g'(1)=0$,所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,所以$g(x)<g(1)=0$,所以当$x>1$时,$f(x)<\dfrac{1}{2}(x^2-1)$.

20.(1)解:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{(e^x+x)(x-1)}{x^2}$,

令$f'(x)>0$,解得$x>1$,故函数$f(x)$在$(0,1)$单调递减,$(1,+\infty)$单调递增,

故$f(x)_{min}=f(1)=e+1-a$,要使得$f(x)\geqslant0$恒成立,只需$e+1-a\geqslant0$,

故$a\leqslant e+1$,故$a$的取值范围是$(-\infty,e+1]$.

(2)证明:由(1)知$f(x)$有两个零点,必有$f(1)=e+1-a<0$,得$a>e+1$,

不妨设$0<x_1<1<x_2$,要证明$x_1x_2<1$,即证明$1<x_2<\dfrac{1}{x_1}$,

因为$0<x_1<1$,所以$\dfrac{1}{x_1}>1$,又因为$f(x)$在$(1,+\infty)$单调递增,只需证$f(x_2)<f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)$,也就是$f(x_1)<f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)$.

构造函数$h(x)=f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$0<x<1$,

则$h'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(x-1)(e^x+x-xe^{\frac{1}{x}}-1)}{x^2}$,

令$m(x)=e^x+x-xe^{\frac{1}{x}}-1$,则$m'(x)=e^x+1-e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$,

因为$0<x<1$,所以$\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}>e^{\frac{1}{x}}$,所以$m'(x)>e^x+1>0$,

所以$m(x)$在$(0,1)$单调递增,所以$m(x)<m(1)=0$,又$x-1<0$,所以$h'(x)>0$,所以$h(x)$在$(0,1)$单调递增,所以$h(x_1)<h(1)=0$,故$f(x_1)<f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)$,原式得证.

21.(1)解:对函数求导可得,$f'(x)=e^x\left[\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\right]$,

将$x=0$代入原函数可得$f(0)=0$,将$x=0$代入导函数可得$f'(0)=1$,

故在$x=0$处切线斜率为1,故所求的切线方程为$y-0=x-0$,化简得,$y=x$.

(2)解:由(1)知,$g(x)=f'(x)=e^x\left[\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\right]$,

$g'(x)=e^x\left[\ln(x+1)+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]$,

令$h(x)=\ln(x+1)+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$,令$x+1=k(k\geqslant1)$,

设$m(k)=\ln k+\dfrac{2}{k}-\dfrac{1}{k^2}$,$m'(k)=\dfrac{(k-1)^2+1}{k^3}>0$恒成立,

故$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,又因为$h(0)=1$,

所以$h(x)>0$在$[0,+\infty)$上恒成立,故$g'(x)>0$在$[0,+\infty)$上恒成立,故$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

(3)证明:由(2)知,$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,又$g(0)=1$,故$g(x)>0$在$[0,+\infty)$上恒成立,故$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,

设$w(x)=f(x+t)-f(x)$,$x\geqslant0$,$t>0$,$w'(x)=f'(x+t)-f'(x)$,

因为$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,又因为$x+t>x$,所以$f'(x+t)>f'(x)$,

故$w(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,因为$s>0$,所以$w(s)>w(0)$,即$f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)$,因为$f(0)=0$,故$f(s+t)>f(s)+f(t)$,得证.

22.(1)解:因为$f(x)=(x+2)\ln(x+2)(x>-2)$,$f'(x)=\ln(x+2)+1$,

由$f'(x)>0$,得$x\in\left(\dfrac{1}{e}-2,+\infty\right)$,$f(x)$单调递增;由$f'(x)<0$,得$x\in\left(-2,\dfrac{1}{e}-2\right)$,$f(x)$单调递减.所以当$x=\dfrac{1}{e}-2$时,$f(x)$取得极小值,极小值为$f\left(\dfrac{1}{e}-2\right)=-\dfrac{1}{e}$,无极大值.

(2)解:因为不等式$f(x)\leqslant g(x)$在$x\in(-2,+\infty)$上恒成立,所以$(x+2)\ln(x+2)\leqslant x^2+(3-a)x+2(1-a)$,

即$(x+2)\ln(x+2)\leqslant(x+2)(x+1-a)$,

因为$x\in(-2,+\infty)$,所以$a\leqslant x+1-\ln(x+2)$在$x\in(-2,+\infty)$上恒成立,

设$h(x)=x+1-\ln(x+2)$,$x\in(-2,+\infty)$,则$h'(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$,

令$h'(x)=0$,得$x=-1$,

所以$h(x)$在$(-2,-1)$上单调递减,在$(-1,+\infty)$上单调递增,所以$h(x)_{min}=h(-1)=0$,即$a\leqslant0$,

所以实数$a$的取值范围为$(-\infty,0]$.

(3)证明:由(2)得,$x+1>\ln(x+2)$在$(-1,+\infty)$上恒成立,令$x=\dfrac{1}{4^n}-1$,则$\ln\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)<\dfrac{1}{4^n}$,

所以$\ln\left(1+\dfrac{1}{4}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{4^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$,

即$\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)\right)<\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$,

因为$n\in\mathbf{N}_+$,所以$\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)<\dfrac{1}{3}$,

即$\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)\right)<\dfrac{1}{3}$,

所以$\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)<e^{\frac{1}{3}}$.

## 第 8 期

### 第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.A 提示:因为函数$f(x)$在$x=x_0$处的导数为12,则$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-\dfrac{1}{3}f'(x_0)=-\dfrac{1}{3}\times12=-4$.故选A.

2.B 提示:因为$y'=4x^3-3$,所以$y'|_{x=1}=1$,设直线的倾斜角为$\alpha$,则$\tan\alpha=1$,因为$\alpha\in(0,\pi)$,

所以$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.故选B.