第 4 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:由题意知,该数列分子等于各自的序号数,且奇数位置为正,偶数位置为负,

而分母是以 1 为首项,2 为公差的等差数列,…,第 n 项的分母为 $2n-1$,故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$.故选 D.

2.C

提示:由题意可得,当 $n=1$ 时,$2S_1=2a_1=4+\lambda$,即 $a_1=\frac{4+\lambda}{2}$,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$,因为数列$\{a_n\}$为等比数列,所以 $a_1=1=\frac{4+\lambda}{2}$,解得 $\lambda=-2$.故选 C.

3.A

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为$\{a_n\}$为等差数列,$a_3+a_9=28$,所以 $a_6=\frac{a_3+a_9}{2}=14$.

所以 $a_{13}-\frac{1}{2}a_{20}=(a_1+12d)-\frac{1}{2}(a_1+19d)=\frac{1}{2}(a_1+5d)=\frac{1}{2}a_6=7$.故选 A.

4.B

提示:因为 $S_3=7$,$a_1a_5=1$,所以$\begin{cases}a_1\cdot a_1q^4=1,\\ a_1+a_1q+a_1q^2=7,\end{cases}$因为$\{a_n\}$是正项等比数列,解得 $q=\frac{1}{2}$或 $q=-\frac{1}{3}$(舍去),所以 $a_1=\frac{1}{q^2}=4$,所以 $S_6=\frac{4\times\left(1-\frac{1}{64}\right)}{1-\frac{1}{2}}=8-\frac{1}{8}=\frac{63}{8}$.

故选 B.

5.C

提示:因为等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,又$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+33}{n+3}$,

所以$\frac{a_5}{b_5}=\frac{2a_5}{2b_5}=\frac{a_1+a_9}{b_1+b_9}=\frac{S_9}{T_9}=5$.故选 C.

6.C

提示:由题意可知,将每层灯的盏数按第一层,第二层,…,最后一层排列组成数列$\{a_n\}$,则数列$\{a_n\}$是以 3 为首项,2 为公比的等比数列,设数列$\{a_n\}$的项数为 n,则$\frac{3(1-2^n)}{1-2}=381$,解得 $n=7$,所以 $a_7=3\times 2^6=192$,即童谣中的玲珑塔的顶层灯的盏数为 192.故选 C.

7.B

提示:由 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8=0$,得 $a_8=0$,故②正确;

因为 $S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}<0$,所以 $a_1+a_{16}<0$,从而 $a_8+a_9<0$,即 $a_9<0$,所以 $d=a_9-a_8<0$,故①正确;

因为 $a_8=0$,$a_9<0$,所以$(S_n)_{\max}=S_7=S_8$,故④错误;

因为 $S_9-S_6=a_7+a_8+a_9=3a_8=0$,所以 $S_9=S_6$,故③错误.

故选 B.

8.D

提示:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$,由 $a_3=a_2+2a_1$,得 $a_1q^2=a_1q+2a_1$,即 $q^2-q-2=0$,解得 $q=2$ 或 $q=-1$(舍去),若存在 a_m,a_n,使得 $a_m\cdot a_n=16a_1^2$,则 $a_1^2q^{m+n-2}=16a_1^2$,

所以 $2^{m+n-2}=16$,即 $m+n=6$,又 $m,n\in\mathbf{N}_+$,所以$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{6}(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)=\frac{1}{6}\left(5+\frac{n}{m}+\frac{4m}{n}\right)\geqslant\frac{1}{6}\left(5+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{4m}{n}}\right)=\frac{3}{2}$,当且仅当 $m=2$,$n=4$ 时,等号成立,故$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$有最小值$\frac{3}{2}$.故选D.

二、多项选择题

9.AD

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

则$\begin{cases}4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=0,\\ a_1+4d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-3,\\ d=2,\end{cases}$

所以 $a_n=-3+2(n-1)=2n-5$,$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n(n-4)=n^2-4n$.故选 AD.

10.ABC

提示:在公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中,S_n 为其前 n 项和,$a_1=1$,$a_5=27a_2$,

所以 $1\times q^4=27\times 1\times q$,解得 $q=3$,故 A 正确;

$S_n=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$,所以 $2S_n-3^n=-1$,

所以数列$\{2S_n-3^n\}$是等差数列,故 B 正确;$a_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$,所以 $a_n-3^n=3^{n-1}-3^n=-2\times 3^{n-1}$,所以数列$\{a_n-3^n\}$是等比数列,故 C 正确;$\lg a_n-3^n=(n-1)\lg 3-3^n$,所以数列$\{\lg a_n-3^n\}$不是等比数列,故 D 错误.故选 ABC.

11.BD

提示:设方程$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四根分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,

则数列 a_1,a_2,a_3,a_4 是首项为$\frac{1}{4}$的等差数列,设其公差为 d,由等差数列的性质,得 $a_1+a_4=a_2+a_3$,

①若 a_1,a_4 为方程 $x^2-2x+m=0$ 的两根,则 a_2,a_3 为方程 $x^2-2x+n=0$ 的两根,

由韦达定理可得 $a_1+a_4=\frac{1}{4}+a_4=2$,所以 $a_4=\frac{7}{4}$,$d=\frac{a_4-a_1}{3}=\frac{1}{2}$,则 $a_2=\frac{3}{4}$,$a_3=\frac{5}{4}$,

此时 $m=a_1a_4=\frac{7}{16}$,$n=a_2a_3=\frac{15}{16}$,则 $m-n=-\frac{1}{2}$;

②若 a_1,a_4 为 $x^2-2x+n=0$ 的两根,则 a_2,a_3 为方程 $x^2-2x+m=0$ 的两根,

同理可得 $m=\frac{15}{16}$,$n=\frac{7}{16}$,则 $m-n=\frac{1}{2}$.

综上所述,$m-n=\pm\frac{1}{2}$.故选 BD.

12.AD

提示:对于 A,因为等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,且 $a_1>1$,$a_{1010}a_{1011}>1$,$(a_{1010}-1)(a_{1011}-1)<0$,所以 $a_{1010}>1$,$0<a_{1011}<1$,所以 $q\in(0,1)$,故 A 正确;

对于 B,因为 $a_{1010}a_{1012}=a_{1011}^2<1$,所以 $a_{1010}a_{1012}-1<0$,故 B 错误;对于 C,当 $n\leqslant 1010$ 时,$a_n>1$,当 $n\geqslant 1011$ 时,$a_n<1$,则 T_n 的最大值为 T_{1010},故 C 错误;

对于 D,$T_{2019}=a_{1010}^{2019}>1$,$T_{2020}=(a_{1010}a_{1011})^{1010}>1$,$T_{2021}=(a_{1011})^{2021}<1$,所以使 $T_n<1$ 成立的最小自然数 $n=2021$,故 D 正确.故选 AD.

三、填空题

13.3

提示:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$,

由 $a_1=1$,$a_2+a_3=12$,得 $q+q^2=12$,解得 $q=3$ 或 $q=-4$(舍去).

14.32

提示:因为数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列,$\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1+a_2}-\sqrt{a_1}=\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$,

所以数列$\{\sqrt{S_n}\}$的公差为$\sqrt{2}$,$\sqrt{S_1}=\sqrt{2}$,

所以$\sqrt{S_4}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\times(4-1)=4\sqrt{2}$,

所以 $S_4=32$.

15.$\frac{8}{3}$

提示:因为等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=-1$,公差 $d=1$,所以 $a_n=-1+n-1=n-2$,$S_n=-n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-3n}{2}$,所以 $b_n=\frac{2S_n+8}{a_n+2}=\frac{n^2-3n+8}{n}=n+\frac{8}{n}-3$,结合对勾函数的性质及 $n\in\mathbf{N}_+$知,当 $n=3$ 时,b_n 取得最小值,最小值为$\frac{8}{3}$.

16.$\frac{2022}{4045}$

提示:已知等比数列$\{a_n\}$各项均为正数,a_2,a_4 为方程 $x^2+mx+16=0$(m 为常数)的两根,则 $a_2a_4=16$,即 $a_1^2q^4=16$,又 $a_1=1$,$q>0$,所以 $q=2$,所以 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$,则 $b_n=\log_{\sqrt{2}}2^n=2n$,

所以$\frac{1}{b_n^2-1}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

所以数列$\left\{\frac{1}{b_n^2-1}\right\}$的前 2022 项和为$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4043}-\frac{1}{4045}\right)\right]=\frac{2022}{4045}$.

四、解答题

17.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq 0)$,

由 a_1,a_{11},a_{13} 成等比数列,得 $a_{11}^2=a_1a_{13}$,即$(a_1+10d)^2=a_1(a_1+12d)$,化简为 $d(2a_1+25d)=0$,

又 $a_1=25$,$d\neq 0$,所以 $d=-2$,

所以 $a_n=25+(n-1)\times(-2)=-2n+27$.

(2)由(1)可知,$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{58}=25+19+13+\cdots+(-89)=\frac{20}{2}\times(25-89)=-640$.

18.(1)**证明**:由题意知,$2S_n+n^2=2na_n+n$,①

把 n 换成 $n+1$,$2S_{n+1}+(n+1)^2=2(n+1)a_{n+1}+n+1$,②

由②-①得 $2a_{n+1}=2(n+1)a_{n+1}-2na_n-2n$,整理得,$a_{n+1}-a_n=1$,由等差数列定义知$\{a_n\}$为等差数列.

(2)**解**:由已知有 $a_7^2=a_4\cdot a_9$,由(1)知,$\{a_n\}$公差为 1,故$(a_1+6)^2=(a_1+3)(a_1+8)$,解得 $a_1=-12$,

所以 $a_n=-12+(n-1)\times 1=n-13$,故可得 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{12}<0$,$a_{13}=0$,$a_{14}>0$,故当 $n=12$ 或 $n=13$ 时,S_n 取最小值,$S_{12}=S_{13}=\frac{(-12+0)\times 13}{2}=-78$,故 S_n 的最小值为 -78.

19.**解**:(1)按方案一闯过各关所得积分构成常数数列,故 $A_n=40n$;

按方案二闯过各关所得积分构成首项为 5,公差为 5 的等差数列,故 $B_n=5n+\frac{n(n-1)}{2}\times 5=\frac{5n^2+5n}{2}$;

按方案三闯过各关所得积分构成首项为$\frac{1}{2}$,公比为 2 的等比数列,故 $C_n=\frac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2}=\frac{1}{2}(2^n-1)$.

(2)令 $A_n>B_n$,则 $40n>\frac{5n^2+5n}{2}$,解得 $0<n<15$,而当 $n=15$ 时,$A_n=B_n$,

又因为 $n\leqslant 15$ 且 $n\in\mathbf{N}_+$,故 $A_n\geqslant B_n$ 恒成立,故方案二不予考虑.

令 $A_n>C_n$,则 $40n>\frac{1}{2}(2^n-1)$,解得 $0<n<10$,$n\in\mathbf{N}_+$,

综上,当 $0<n<10$,$n\in\mathbf{N}_+$时,$A_n>C_n$;当 $10\leqslant n\leqslant 15$,$n\in\mathbf{N}_+$,$A_n<C_n$,故当能闯过的关数小于 10 时,应选择方案一;当能闯过的关数大于等于 10 时,应选择方案三.小明通过试验后觉得自己至少能闯过 12 关,则他应该选择方案三.

20.(1)**解**:因为 $a_1=1$,$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列,

所以$\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$,

整理得,$S_n=\frac{1}{3}na_n+\frac{2}{3}a_n$,①

故当 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n-1}=\frac{1}{3}(n-1)a_{n-1}+\frac{2}{3}a_{n-1}$,②

由①-②得,$\frac{1}{3}a_n=\frac{1}{3}na_n-\frac{1}{3}na_{n-1}-\frac{1}{3}a_{n-1}$,

故$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$,

化简得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$,$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n}{n-2}$,…,$\frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{2}$,$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{1}$.

以上各式相乘,得$\frac{a_n}{a_1}=\frac{n(n+1)}{2}$,故 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{1\times 2}{2}=1$,满足上式,所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,$n\in\mathbf{N}_+$.

(2)**证明**:因为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,所以$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$.

21.(1)**证明**:由条件 $a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}_+)$,

得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,

因为 $a_1+1=2\neq 0$,所以$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$,$n\in\mathbf{N}_+$,即$\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$,$n\in\mathbf{N}_+$,

所以数列$\{b_n\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列.

(2)**解**:由(1)知,数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$,$n\in\mathbf{N}_+$,

选①,$b_n+\log_2 b_n=2^n+n$,则 $S_n=(2+1)+(2^2+2)+(2^3+3)+\cdots+(2^n+n)=(2+2^2+\cdots+2^n)+(1+2+\cdots+n)=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(n+1)}{2}=2^{n+1}+\frac{n^2+n-4}{2}$.

选②,$\frac{1}{\log_2 b_n\cdot\log_2 b_{n+1}}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

则 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

选③,$nb_n=n\cdot 2^n$,则 $S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$,

$2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$,

两式相减得,$S_n=-(2+2^2+\cdots+2^n)+n\cdot 2^{n+1}=-\frac{2(1-2^n)}{1-2}+n\cdot 2^{n+1}=(n-1)2^{n+1}+2$.

22.**解**:(1)因为$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}+6$,则当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{b_n}{a_n}+6$,

两式相减得,$\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{b_n}{a_n}$,即$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=2\times\frac{b_n}{a_n}$,

而当 $n=1$ 时,$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}+6$,$a_1=1$,$b_1=2$,得$\frac{b_2}{a_2}=-4$,

$\frac{b_2}{a_2}\neq 2\times\frac{b_1}{a_1}$,因此,当 $n\geqslant 2$ 时,数列$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$是公比为 2 的等比数列,则$\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}2,n=1,\\ -2^n,n\geqslant 2,\end{cases}$

又$\{a_n\}$是首项为 1,公差为 2 的等差数列,所以 $a_n=2n-1$,

所以数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=\begin{cases}2,n=1,\\ -(2n-1)\times 2^n,n\geqslant 2.\end{cases}$

(2)当 $n=1$ 时,$S_1=2$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$S_n=2-3\times 2^2-5\times 2^3-\cdots-(2n-1)\times 2^n$,

$2S_n=4-3\times 2^3-5\times 2^4-\cdots-(2n-1)\times 2^{n+1}$,

两式相减得 $-S_n=-2-3\times 2^2-2\times(2^3+\cdots+2^n)+(2n-1)\times 2^{n+1}=-14-\frac{2\times 2^3(1-2^{n-2})}{1-2}+(2n-1)\times 2^{n+1}=2+(2n-3)\times 2^{n+1}$,则 $S_n=-2-(2n-3)\times 2^{n+1}$,而 $S_1=2$ 满足上式,所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=-2-(2n-3)\times 2^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:该数列的通项公式为 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$,所以 $a_{10}=\frac{(-1)^{11}}{2^9}=-\frac{1}{512}$.故选 A.

2.C

提示:因为 $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$,所以 $a_5=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5+2}+\frac{1}{5+3}+\frac{1}{5+4}+\frac{1}{2\times 5}$,$a_4=\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4+2}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{4\times 2}$,

故 $a_5-a_4=\frac{1}{5+4}+\frac{1}{2\times 5}-\frac{1}{4+1}=\frac{1}{90}$,故选 C.

3.D

提示:因为数列$\{a_n\}$的前 6 项为 $1,-\frac{2}{3},\frac{3}{5},-\frac{4}{7},\frac{5}{9},-\frac{6}{11}$,

所以分子等于各自的序号数,且奇数位置为正,偶数位置为负,而分母是正奇数 1,3,5,7,9,11,…第 n 项的分母为 $2n-1$,故数列$\{a_n\}$的通项公式可能为 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$,故选 D.

4.B

提示:对于①,$\{1,2,3\}$是集合,不是数列,故①错误;

对于②,数列是有序的,故数列 1,2,3 与数列 3,2,1是不同的数列,故②错误;

对于③,数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的第 $k-1$ 项是$\frac{1}{k-1}$,故③正确;

对于④,数列的通项公式可以有多个,不一定唯一,故④正确.故选 B.

5.D

提示:根据题意,数列 0,2,4,8,12,18,24,32,40,50,…,

其通项公式可以为 $a_n=\begin{cases}\frac{n^2-1}{2},n为奇数,\\ \frac{n^2}{2},n为偶数,\end{cases}$ 则 $a_{11}=60$,$a_{12}=72$,$a_{13}=84$,$a_{14}=98$,故选 D.

6.A

提示:由题意知,$x+y=2^3$,$\sqrt{x-y}=\sqrt{7}$,解得 $x=\frac{15}{2}$,$y=\frac{1}{2}$,故有序实数对(x,y)是$\left(\frac{15}{2},\frac{1}{2}\right)$.故选 A.

7.A

提示:依题意数列$\{a_n\}$:$1,4,\frac{9}{4},\frac{16}{9},\frac{25}{16},\frac{36}{25},\cdots$,可得数列$\{a_n\}$有最大项 4,有最小项 1,故选 A.

8.C

提示:因为函数 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-4,x\leqslant 8,\\ a^{x-7},x>8,\end{cases}$ $a_n=f(n)$,$n\in\mathbf{N}_+$,所以当 $1\leqslant n\leqslant 8$ 时,$a_n=(3-a)n-4$;当 $n>8$ 时,$a_n=a^{n-7}$.因为$\{a_n\}$是递增数列,所以$\begin{cases}3-a>0,\\ a>1,\\ a_9>a_8,\end{cases}$即$\begin{cases}a<3,\\ a>1,\\ a^2>(3-a)\times 8-4,\end{cases}$解得 $2<a<3$.故选 C.

二、多项选择题

9.AD

提示:根据题意,分析可得该数列的周期为 4,连续 4 项依次为 0,1,0,-1,

分析可得 A,D 选项符合题意.故选 AD.

10.BD

提示:对于 A,$a_n=\frac{1}{n}$,$a_1=1$,$a_2=\frac{1}{2}$,不是递增数列,不符合题意;

对于 B,$a_n=n^2+n$,$a_n-a_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n>0$,是递增数列,符合题意;

对于 C,$a_n=1-2n$,$a_n-a_{n-1}=(1-2n)-[1-2(n-1)]=-2$,不是递增数列,不符合题意;

对于 D,$a_n=2^n+1$,函数 $y=2^x+1$ 为递增函数,则 $a_n=2^n+1$ 是递增数列,符合题意.故选 BD.

11.BC

提示:因为数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3n+1,n为奇数,\\ 2-2n,n为偶数,\end{cases}$

所以 $a_1=4$,$a_3=10$,$a_5=16$,$a_7=22$,$a_2=-2$,$a_4=-6$,$a_6=-10$,$a_8=-14$,故 A 错误;

$a_7>a_6$,故 B 正确;$S_5=4-2+10-6+16=22$,故 C 正确;

$S_6=4-2+10-6+16-10=12$,$S_8=4-2+10-6+16-10+22-14=20$,$S_6<S_8$,故 D 错误.故选 BC.

12.AB

提示:因为数列$\{a_n\}$是递减数列,所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)+k}{2^{n+1}}-\frac{3n+k}{2^n}<0$ 恒成立,

即$\frac{3n+3+k-6n-2k}{2^{n+1}}<0$ 恒成立,即 $k>3-3n$ 恒成立,又 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $k>0$.故选 AB.

三、填空题

13.12

提示:因为 $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$,所以观察可知数列 $\sqrt{6}$,$\sqrt{10}$,$\sqrt{14}$,$3\sqrt{2}$,$\sqrt{22}$,…的通项公式为 $a_n=\sqrt{4n+2}$,令$\sqrt{4n+2}=5\sqrt{2}$,所以 $n=12$,所以 $5\sqrt{2}$ 是这个数列的第 12 项.

14.-3

提示:因为 $a_1=2$,$a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$,

所以当 $n=1$ 时,$a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=\frac{1+2}{1-2}=-3$,

当 $n=2$ 时,$a_3=\frac{1+a_2}{1-a_2}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$,依此类推,$a_4=\frac{1}{3}$,$a_5=2$,所以数列$\{a_n\}$为周期数列,周期 $T=4$,所以 $a_{2022}=a_2=-3$.

15.9

提示:根据所给的数据,不难发现:在 n^2 中所分解的最大的数是 $2n-1$.根据发现的规律可求 5^2 分裂中,最大数是 $5\times 2-1=9$.

16.11,$\frac{17}{12}$

提示:根据题意,数列$\{a_n\}$的各项为$\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$,共 11 项,且 $a_8+a_9=\frac{17}{12}$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为 $a_n=\frac{1}{n^2}$,故前 5 项分别为 $1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25}$.

(2)因为 $a_n=(-1)^n(n^2-1)$,故前 5 项分别为 0,3,-8,15,-24.

(3)因为 $a_n=|2n-7|$,故前 5 项分别为 5,3,1,1,3.

18.**解**:(1)数列为$\frac{2\times 1-1}{2^2},\frac{2\times 2-1}{2^3},\frac{2\times 3-1}{2^4},\frac{2\times 4-1}{2^5}$,所以数列通项公式为 $a_n=\frac{2n-1}{2^{n+1}}$.

(2)数列为$\frac{3\times 1+2}{1+1},\frac{3\times 2+2}{2+1},\frac{3\times 3+2}{3+1},\frac{3\times 4+2}{4+1}$,所以数列通项公式为 $a_n=\frac{3n+2}{n+1}$.

(3)数列为$(-1)^{1+1}\left(2\times 1-1+\frac{1}{2}\right)$,$(-1)^{2+1}\left(2\times 2-1+\frac{1}{2^2}\right)$,$(-1)^{3+1}\left(2\times 3-1+\frac{1}{2^3}\right)$,$(-1)^{4+1}\left(2\times 4-1+\frac{1}{2^4}\right)$,所以数列通项公式为 $a_n=(-1)^{n+1}\left(2n-1+\frac{1}{2^n}\right)$.

(4)数列为$\frac{1}{3}(10^2-1)+1$,$\frac{1}{3}(10^3-1)+1$,$\frac{1}{3}(10^4-1)+1$,$\frac{1}{3}(10^5-1)+1$,

所以数列通项公式为 $a_n=\frac{1}{3}(10^{n+1}-1)+1$.

19.**解**:(1)因为数列的通项公式为 $a_n=n^2+4n-12(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以令 $n^2+4n-12=48$,解得 $n=6$ 或 $n=-10$(舍去),所以 48 是这个数列中的项,是第 6 项.

(2)$a_n=n^2+4n-12=(n+2)^2-16(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以由 $a_n=(n+2)^2-16\geqslant 0$,得 $n\geqslant 2$,所以该数列中的负数项是 $a_1=3^2-16=-7$.

20.**解**:(1)由题意知,$a_n=12n+13$,$b_n=n^2$.

(2)令 $a_n=b_n$,得 $12n+13=n^2$,解得 $n=13$ 或 $n=-1$(舍去).

所以这两个数列有序号与项都相同的项,它们是第 13 项.

21.(1)**解**:根据题意可得 $a_{10}=\frac{3\times 10-2}{3\times 10+1}=\frac{28}{31}$.

(2)**解**:$\frac{7}{10}$是该数列中的项.

令 $a_n=\frac{7}{10}$,即$\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{7}{10}$,解得 $n=3$,所以$\frac{7}{10}$为数列$\{a_n\}$中的项,是第 3 项.

(3)**证明**:由题意知,$a_n=\frac{3n-2}{3n+1}=1-\frac{3}{3n+1}$,因为 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $3n+1>3$,所以 $0<\frac{3}{3n+1}<1$,所以 $0<1-\frac{3}{3n+1}<1$,即 $0<a_n<1$.

22.**解**:(1)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2-30=-28$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-30n-[2(n-1)^2-30(n-1)]=4n-32$.

当 $n=1$ 时,上式成立.所以 $a_n=4n-32(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)$S_n=2n^2-30n=2\left(n-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{225}{2}$.所以当 $n=7$ 或 $n=8$ 时,S_n 取得最小值.

①

第 2 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:因为等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=2,S_3=9$,所以$3a_1+3d=9$,所以$d=1$,故选 B.

2.D

提示:因为数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_1+a_5+a_9=3a_5=15$,所以$a_5=5$,

所以$a_2+a_8=2a_5=10$.故选 D.

3.D

提示:根据题意,等差数列$\{a_n\}$中,若$a_7=2a_6-4$,则$2a_6-a_7=4$,即$a_5=4$,

则$S_9=\frac{(a_1+a_9)\times9}{2}=9a_5=36$,故选 D.

4.D

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$10\times19+\frac{10\times9}{2}d=10$,解得$d=-4$,

故$S_n=19n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-4)=21n-2n^2=-2\left(n-\frac{21}{4}\right)^2+\frac{441}{8}$,又$n\in\mathbf{N}_+$,

所以当$n=5$时,S_n取得最大值$S_5=55$.故选 D.

5.C

提示:设这八个孩子分得棉花的斤数构成等差数列$\{a_n\}$,由题设知,公差$d=17$,

则由题意可得$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=8a_1+\frac{8\times7}{2}\times17=996$,解得$a_1=65$,

故前五个孩子共分得的棉花斤数为$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}\times17=495$,故选 C.

6.D

提示:设$S_7=m$,则$S_{21}=6m$,因为数列$\{a_n\}$为等差数列,所以$S_7,S_{14}-S_7,S_{21}-S_{14},S_{28}-S_{21}$成等差数列,即$m,S_{14}-m,6m-S_{14},S_{28}-6m$成等差数列,所以$2(S_{14}-m)=m+6m-S_{14}$,

所以$S_{14}=3m$,所以$2(6m-3m)=3m-m+S_{28}-6m$,所以$S_{28}=10m$,所以$S_{28}:S_{14}=10:3$,故选 D.

7.D **提示**:因为等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$S_2<S_3<0$,所以$S_3-S_2=a_3>0$,故 A 错误;

因为$S_3=3a_2<0$,所以$a_2<0$,公差$d=a_3-a_2=a_2-a_1>0$,故 B 错误;

因为$d>0$,所以等差数列$\{a_n\}$是递增数列,所以$a_4>0,a_5>0,a_3\neq a_5$,

所以$a_3+a_5>2\sqrt{a_3\cdot a_5}$,所以$2a_4=a_3+a_5>2\sqrt{a_3\cdot a_5}$,所以$a_4>\sqrt{a_3\cdot a_5}$,故 D 正确;

当$a_1=-3,d=2$时,$a_2=-1,a_3=1,S_2=-4<S_3=-3<0$,此时$a_2+a_3=0$,故 C 错误.故选 D.

8.D

提示:对于 A,因为等差数列$\{a_n\}$中,$a_9+a_{10}<0,a_{10}>0$,所以$a_9<0$,所以公差$d=a_{10}-a_9>0$,故 A 正确;

对于 B,因为$a_9<0,a_{10}>0,d>0,a_1<0$,所以前 9 项均为负数,所以当$n=9$时,S_n取得最小值,故 B 正确;

对于 C,$a_4+a_5+a_{18}=a_1+3d+a_1+4d+a_1+17d=3(a_1+8d)=3a_9<0$,故 C 正确;

对于 D,因为$a_9<0,a_{10}>0$,所以$S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9<0$,$S_{18}=\frac{18(a_1+a_{18})}{2}=\frac{18(a_9+a_{10})}{2}<0$,$S_{19}=\frac{19(a_1+a_{19})}{2}=19a_{10}>0$,又$d>0$,所以使得$S_n<0$成立的最大自然数$n$是 18,所以 D 错误.故选 D.

二、多项选择题

9.ABD

提示:由$4-1=7-4=10-7=3$,得数列 1,4,7,10 是等差数列,故 A 正确;

由$\lg4-\lg2=\lg8-\lg4=\lg16-\lg8=\lg2$,得数列$\lg2,\lg4,\lg8,\lg16$是等差数列,故 B 正确;

因为$2^4-2^5=-16\neq2^3-2^4=-8$,所以数列$2^5,2^4,2^3,2^2$不是等差数列,故 C 错误;

由$8-10=6-8=4-6=2-4=-2$,得数列 10,8,6,4,2 是等差数列,故 D 正确.故选 ABD.

10.AB

提示:等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,公差$d\in[1,2]$,且$a_3+\lambda a_9+a_{15}=15$,

所以$1+2d+\lambda(1+8d)+1+14d=15$,整理得$d=\frac{13-\lambda}{16+8\lambda}$,

因为$d\in[1,2]$,所以$\begin{cases}\frac{13-\lambda}{16+8\lambda}\geqslant1,\\ \frac{13-\lambda}{16+8\lambda}\leqslant2,\end{cases}$

解得$-\frac{19}{17}\leqslant\lambda\leqslant-\frac{1}{3}$,所以结合选项实数$\lambda$的可能取值为$-\frac{1}{3},-\frac{19}{17}$.故选 AB.

11.AB

提示:由$\frac{S_n}{T_n}=\frac{n+1}{2n}$,不妨设$S_n=kn(n+1),T_n=2kn^2$ $(k\neq0)$,

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=kn(n+1)-kn(n-1)=2kn$,$b_n=T_n-T_{n-1}=2kn^2-2k(n-1)^2=k(4n-2)$,所以$\frac{a_3}{b_3}=\frac{2\times3}{4\times3-2}=\frac{3}{5}$,$\frac{a_3}{b_2}=\frac{2\times3}{4\times2-2}=1$,故 A,B 正确;

等差数列$\{a_n\}$由于k的取值不同单调性不同,$k>0$时,$\{a_n\}$是单调递增数列,$k<0$时,$\{a_n\}$是单调递减数列,因此 C,D 不正确.

故选 AB.

12.ACD

提示:对于 A,等差数列$\{a_n\}$,则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,则$\frac{S_n}{n}=\frac{n-1}{2}\times d+a_1$,易得$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=\frac{d}{2}$,数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,故 A 正确;

对于 B,若等差数列$a_n=2n-1$,则前n项和$S_n=n^2$,所以$\frac{S_n}{n^2}=1$,此时数列$\left\{\frac{S_n}{n^2}\right\}$是等差数列,故 B 错误;

对于 C,因为$\{a_n\}$为等差数列,所以S_3,S_6-S_3,S_9-S_6也是等差数列,则$S_9-S_6+S_3=2(S_6-S_3)$,变形可得$S_9=3\cdot(S_6-S_3)$,故 C 正确;

对于 D,若公差$d>0$,且$3a_5=5a_8$,则$3(a_1+4d)=5(a_1+7d)$,所以$a_1=-\frac{23}{2}d$,

所以$a_1<0$,所以$a_{12}=a_1+11d=-\frac{1}{2}d<0$,$a_{13}=a_1+12d=\frac{1}{2}d>0$,所以当$n=12$时,$S_n$取得最小值,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.5

提示:依题意有$\frac{a_5+a_6}{2}=8$,则$a_5+a_6=16$,故$a_1+a_{10}=a_5+a_6=16$,又$a_1=-1$,

故$a_{10}=17$,所以等差数列$\{a_n\}$的公差为$d=\frac{a_{10}-a_1}{10-1}=\frac{17+1}{9}=2$,所以$a_4=a_1+3d=-1+3\times2=5$.

14.$\frac{n+10}{2}$

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

由题意知,$d=\frac{25-24}{40-38}=\frac{1}{2}$,所以$a_n=a_{40}+(n-40)d=25+\frac{n-40}{2}=\frac{n+10}{2}$.

15.–2022

提示:设等差数列$\{a_n\}$公差为d,

因为$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$,所以$\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}$,所以$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=\frac{a_1+a_n}{2}-\frac{a_1+a_{n-1}}{2}=\frac{d}{2}$是常数,所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,公差为$\frac{d}{2}$,因为$a_1=2020$,所以$\frac{S_1}{1}=2020$,因为$\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=-2=d$,所以$\frac{S_{2022}}{2022}=2020+2021\times(-1)=-1$,所以$S_{2022}=-2022$.

16.4

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

由题意知$\begin{cases}a_1+3d=-1,\\8a_1+28d=4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-10,\\d=3,\end{cases}$

则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{23}{2}n$,

而函数$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{23}{2}x$的零点为$x=0$和$x=\frac{23}{3}$,所以当$n=8$时,$|S_n|$取得最小值,最小值为 4.

四、解答题

17.**解**:(1)由$S_4-S_1=a_2+a_3+a_4=3a_3=3$,得$a_3=1$,所以$a_n=a_3+(n-3)d=1+2(n-3)=2n-5$.

(2)由(1)知,$a_3=1$,所以$a_1=1-2d$,

$S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d=10(1-2d)+45d=25d+10$,

因为$|S_{10}|<60$,所以$|25d+10|<60$,

所以$-60<25d+10<60$,解得$-\frac{14}{5}<d<2$,故d的取值范围为$\left(-\frac{14}{5},2\right)$.

18.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由等差数列前n项和公式,得$S_{12}=12a_1+\frac{12\times11}{2}d=12a_1+66d$,$S_{15}=15a_1+\frac{15\times14}{2}d=15a_1+105d$,

因为$a_1=-26,S_{12}=S_{15}$,所以$12\times(-26)+66d=15\times(-26)+105d$,解得$d=2$,

故$a_n=a_1+(n-1)d=2n-28$.

(2)由等差数列前n项和公式,得$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(-26+2n-28)n}{2}=n^2-27n$.因为$S_n=\left(n-\frac{27}{2}\right)^2-\frac{27^2}{4}$,

所以当$n=13$或$n=14$时,S_n取得最小值-182.

19.**解**:因为$20=3\times6+2$,故卡车至少运送 7 趟,因为路线重复越少则行驶距离最少,所以最佳方案是从最远处开始往回返,第一趟走了$2\times(500+50\times20)=3000$(米),第二趟走了$3000-150\times2=2700$(米),第三趟走了$2700-150\times2=2400$(米),…,每次走的路程组成首项为 3000,公差为–300 的等差数列,各项的和为$3000\times7+7\times6\times(-300)\div2=14\ 700$(米).所以卡车送完这批水泥杆,并最终返回库房,至少运送 7 趟,最少行驶 14 700 米.

20.**解**:(1)数列$\{a_n\}$是递增的等差数列,且$a_1=1$,$a_3a_5=91$,设公差为d,则$d>0$,

且$(1+2d)(1+4d)=91$,即$(4d+15)(d-3)=0$,解得$d=3$,或$d=-\frac{15}{4}$(舍去),

所以$a_n=1+3(n-1)=3n-2$.

(2)因为$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+5}=123$,

所以$3(a_m+a_{m+5})=123$,所以$a_m+a_{m+5}=41$,

所以$2a_1+(2m+3)d=41$,所以$2+3(2m+3)=41$,解得$m=5$.

21.**解**:(1)因为等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq0)$,又$a_2+a_3+a_7=-15$,所以$a_1=-5-3d$.

选①,$a_1+a_6+a_{10}=3a_1+14d=-15+5d=0$,得$d=3$,故$a_1=-14$,所以$a_n=-14+3(n-1)=3n-17$.

选②,$-2a_2=-2a_1-2d=a_1+12d=a_{13}$,得$3a_1=-15-9d=-14d$,得$d=3$,

故$a_1=-14$,所以$a_n=-14+3(n-1)=3n-17$.

选③,$a_3a_5=(a_1+2d)(a_1+4d)=(a_1+6d)^2=a_7^2$,

$(-5-d)(-5+d)=(-5+3d)^2$,得$d=3$,或$d=0$(舍去),故$a_1=-14$,所以$a_n=-14+3(n-1)=3n-17$.

(2)由(1)得$a_n=3n-17$,则$S_k=\frac{(-14+3k-17)k}{2}=-40$,解得$k=5$或$k=\frac{16}{3}$(舍去),所以$k$的值为 5.

22.(1)**证明**:当$n=1$时,$S_1+2T_1=1$,即$a_1+2a_1=1$,解得$a_1=\frac{1}{3}$;

当$n\geqslant2$时,由$S_n+2T_n=1$,得$\frac{T_n}{T_{n-1}}+2T_n=1$,所以$\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_{n-1}}=2$,

所以数列$\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$是以$\frac{1}{T_1}=\frac{1}{a_1}=3$为首项,2 为公差的等差数列.

(2)**解**:由(1)可知$\frac{1}{T_n}=3+2(n-1)=2n+1$,所以$T_n=\frac{1}{2n+1}$,当$n\geqslant2$时,$S_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}}=\frac{2n-1}{2n+1}$,

经检验,$S_1=a_1=\frac{1}{3}$,满足$S_n=\frac{2n-1}{2n+1}$,所以$S_n=\frac{2n-1}{2n+1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

当$n\geqslant2$,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2n-1}{2n+1}-\frac{2n-3}{2n-1}=\frac{4}{4n^2-1}$,由(1)可知$a_1=\frac{1}{3}$.

综上,$a_n=\begin{cases}\frac{1}{3},n=1,\\ \frac{4}{4n^2-1},n\geqslant2.\end{cases}$

第 3 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:由题意知,$q^3=\frac{a_5}{a_2}=\frac{\frac{1}{16}}{-4}=-\frac{1}{64}$,解得$q=-\frac{1}{4}$.故选B.

2.A

提示:因为$\{a_n\}$为正项等比数列,$a_4a_8a_{12}=a_8^3=8$,所以$a_8=2$,

则$\log_2a_2+\log_2a_{14}=\log_2(a_2\cdot a_{14})=\log_2a_8^2=2$.故选A.

3.D

提示:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,$q\neq0$,由题意知,$q\neq1$.因为前3项和为$a_1+a_2+a_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168$,$a_2-a_5=a_1\cdot q-a_1\cdot q^4=a_1\cdot q(1-q^3)=42$,

所以$q=\frac{1}{2}$,$a_1=96$,则$a_6=a_1\cdot q^5=96\times\frac{1}{32}=3$.故选D.

4.D

提示:当$q=2,a_1=-1$时,$a_{n+1}>a_n$显然不成立,当$a_1=-1$,$q=\frac{1}{2}$时,$a_{n+1}>a_n$成立,但$q>1$不成立.故“$q>1$”是“$a_{n+1}>a_n$ $(n\in\mathrm{N}_+)$”的既不充分也不必要条件.故选D.

5.A

提示:因为S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和,根据等比数列的性质可知$S_2,S_4-S_2,S_6-S_4,S_8-S_6$成新的等比数列,又$S_2=4,S_4=6$,所以$S_4-S_2=6-4=2$,所以新公比为$\frac{1}{2}$,所以$S_6-S_4=1,S_8-S_6=\frac{1}{2}$,所以$S_8=S_2+S_4-S_2+S_6-S_4+S_8-S_6=4+2+1+\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$.故选A.

6.D

提示:因为等比数列$\{a_n\}$的公比为2,$a_1+a_3=5$,所以$a_1(1+q^2)=5$,得$a_1=1$,则$a_n=2^{n-1}$,$a_na_{n+1}=2^{2n-1}=2\cdot4^{n-1}$,则$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{99}a_{100}=\frac{2(1-4^{99})}{1-4}=\frac{2}{3}(4^{99}-1)$.故选D.

7.D

提示:若$a_1=-1$,公比为-2,满足$S_{2022}>S_{2021}$,但是数列$\{a_n\}$不是递增数列,故A错误;若$a_1=-1$,公比为$-\frac{1}{2}$,满足$T_{2022}>T_{2021}$,但是数列$\{a_n\}$不是递增数列,所以B错误;

若$a_1=1$,公比为$\frac{1}{2}$,$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$,数列$\{S_n\}$是递增数列,但是$a_{2022}<a_{2021}$,故C错误;若数列$\{T_n\}$是递增数列,可知$T_n>T_{n-1}$,可得$a_n>1$,所以$q\geqslant1$,可得$a_{2022}\geqslant a_{2021}$,故D正确.故选D.

8.D

提示:第一次操作去掉了区间长度的$\frac{1}{3}$,

第二次去掉2个长度为$\frac{1}{9}$的区间,即$\frac{2}{9}$,

第三次去掉了4个长度为$\frac{1}{27}$的区间,即和为$\frac{4}{27}$,

依此类推,

第n次将去掉2^{n-1}个长度为$\frac{1}{3^n}$的区间,即长度和为$\frac{2^{n-1}}{3^n}$.设第n次操作所去掉长度和满足数列$\{a_n\}$,其通项公式$a_n=\frac{2^{n-1}}{3^n}$,则$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$,由题意知,$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\geqslant\frac{26}{27}$,$\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\frac{1}{27}$,两边同取对数,得$n(\lg2-\lg3)\leqslant-3\lg3$,解得$n\geqslant\frac{3\lg3}{\lg3-\lg2}\approx8.13$.所以满足题意的$n$的最小值为9.故选D.

二、多项选择题

9.ABC

提示:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则$a_1\neq0,q\neq0$,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,所以$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|q|>0$,故$\{|a_n|\}$是以$|a_1|$为首项,$|q|$为公比的等比数列,故A正确;

由$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=q^2$,得$\{a_na_{n+1}\}$是以$a_1a_2$为首项,$q^2$为公比的等比数列,故B正确;由$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=q^2$,得$\{a_n^2\}$是以$a_1^2$为首项,$q^2$为公比的等比数列,故C正确;

当$q=-1$时,$a_n+a_{n+1}=0$,此时$\{a_n+a_{n+1}\}$不是等比数列,故D错误.故选ABC.

10.AC

提示:对于A,$a_3+a_7=\frac{a_5}{q^2}+a_5q^2=\frac{1}{q^2}+q^2\geqslant2\sqrt{\frac{1}{q^2}\times q^2}=2$,当且仅当$q=\pm1$时,等号成立,故A正确;对于B,$a_4+a_6=\frac{a_5}{q}+a_5q$,当$q<0$时,$a_4+a_6\geqslant2$不成立,故B错误;

对于C,$a_5=1$,则$a_7-2a_6+1=q^2-2q+1=(q-1)^2\geqslant0$,故C正确;对于D,$a_5=1$,则$a_3-2a_4-1=\frac{1}{q^2}-\frac{2}{q}-1=\left(\frac{1}{q}-1\right)^2-2$,则$a_3-2a_4-1\geqslant0$不恒成立,故D错误.故选AC.

11.ACD

提示:因为$a_1=1$,数列$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$是公比为2的等比数列,所以$\frac{1}{a_n}+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$,所以$a_n=\frac{1}{2^n-1}$,故A正确,B错误;根据指数函数的性质及反比例函数性质,可知$\{a_n\}$为递减数列,故C正确;

$S_3=a_1+a_2+a_3=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}>\frac{7}{8}$,故D正确.故选ACD.

12.AD

提示:因为公比为q的等比数列$\{a_n\}$,满足$a_1>1$,$a_{2021}\cdot a_{2022}>1$,$\frac{a_{2021}-1}{a_{2022}-1}<0$,所以$a_{2021}>1$,$0<a_{2022}<1$,$0<q<1$,故A正确;当$n=2021$时,$T_n$取得最大值,故D正确;因为数列$\{a_n\}$各项都为正数,所以$S_n$没有最大值,故C错误;由题意得,$0<a_{2022}<1$,所以$a_{2021}\cdot a_{2023}=a_{2022}^2<1$,故B错误.故选AD.

三、填空题

13.12

提示:等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2+\cdots+a_8=3$,$a_9+a_{10}+\cdots+a_{16}=6$,则由等比数列的性质得

$a_{17}+a_{18}+\cdots+a_{24}=(a_1+a_2+\cdots+a_8)\times\left(\frac{a_9+a_{10}+\cdots+a_{16}}{a_1+a_2+\cdots+a_8}\right)^2=3\times\left(\frac{6}{3}\right)^2=12$.

14.$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$(答案不唯一)

提示:根据题意,要求数列为不单调的无穷等比数列,数列$\{a_n\}$的公比为负值,而数列$\{|a_n|\}$单调递减,可以首项为正,公比绝对值在(0,1)上,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式可以为$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

15.$(-1,+\infty)$

提示:由$a_{n+1}=2a_n+1$,得$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,所以$\{a_n+1\}$是以2为公比的等比数列,

又$\{a_n\}$是递增数列,所以$\{a_n+1\}$也是递增数列,所以$a_1+1>0$,解得$a_1>-1$,所以a_1的取值范围是$(-1,+\infty)$.

16.$\frac{2}{3}+3n-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

提示:因为$2a_n=-a_{n-1}+9(n\geqslant2)$,所以$(a_n-3)=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-3)(n\geqslant2)$,又$a_1-3=1$,所以$\{a_n-3\}$是以1为首项,$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列,

所以$a_n-3=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,所以$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3$,所以$S_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+3n=\frac{2}{3}+3n-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

四、解答题

17.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,因为$S_2-3a_1=0$,所以$a_2=2a_1=2$,

所以$q=2,a_1=1$,所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

(2)因为$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$,所以$S_n+a_n=2^n-1+2^{n-1}=3\cdot2^{n-1}-1>48$,

所以$3\cdot2^{n-1}>49$,所以$2^{n-1}>\frac{49}{3}$,又$n\in\mathrm{N}_+$,所以$n\geqslant6$,故n的最小值为6.

18.**解**:(1)由题意可知$q\neq1$,因为$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$,所以$\frac{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=1+q^5=\frac{31}{32}$,解得$q=-\frac{1}{2}$.

(2)由(1)可得$a_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,则$a_n^2=\frac{1}{4^{n-1}}$,所以$\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}=\frac{1}{4}$,所以数列$\{a_n^2\}$是首项为1,公比为$\frac{1}{4}$的等比数列,

所以$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot4^{n-1}}$.

19.(1)**证明**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由$a_2-b_2=a_3-b_3$,得$a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1$,所以$d=2b_1$.

由$a_2-b_2=b_4-a_4$,得$a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d)$,即$a_1+d-2b_1=4d-(a_1+3d)$,所以$a_1=b_1$.

(2)**解**:由(1)知,$d=2b_1=2a_1$,因为$b_k=a_m+a_1$,所以$b_1\cdot2^{k-1}=a_1+(m-1)d+a_1$,

所以$b_1\cdot2^{k-1}=b_1+(m-1)\cdot2b_1+b_1$,所以$2^{k-1}=2m$,又$1\leqslant m\leqslant500$,故$2\leqslant2^{k-1}\leqslant1000$,则$2\leqslant k\leqslant10$,故集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant500\}$中元素个数为9个.

20.**解**:若选①.

$S_n=ma_{n+1}(m\neq0)$,则当$n\geqslant2$时,$S_{n-1}=ma_n$,

两式相减,得$S_n-S_{n-1}=a_n=ma_{n+1}-ma_n$,即$\frac{a_{n+1}}{m+1}=\frac{a_n}{m}$ $(n\geqslant2)$,

结合$a_1=1$,可知$a_n\neq0$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{m+1}{m}(n\geqslant2)$.

由$S_n=ma_{n+1}(m\neq0)$,得$a_1=ma_2$,即$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{m}\neq\frac{m+1}{m}$,故数列$\{a_n\}$不是等比数列.

若选②.

$S_n=ka_n-\frac{1}{2}$,由$a_1=1$,得$1=k-\frac{1}{2}$,即$k=\frac{3}{2}$,于是$S_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}$,

当$n\geqslant2$时,$S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}-\frac{1}{2}$,

两式相减得$S_n-S_{n-1}=a_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}$,

即$a_n=3a_{n-1}$,又$a_1=1\neq0$,所以数列$\{a_n\}$是首项为 1,公比为 3 的等比数列,所以$a_n=3^{n-1}$.

若选③.

$2a_n-a_1=S_1S_n$,由$a_1=1$,得$S_n=2a_n-1$,

当$n\geqslant2$时,$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$,两式相减得$S_n-S_{n-1}=a_n=2a_n-2a_{n-1}$,即$a_n=2a_{n-1}$,又$a_1=1\neq0$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列,所以$a_n=2^{n-1}$.

21.**解**:(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q,由题意可得$a_3=a_1q^2>0$,因为a_1,a_5的等比中项为 16,所以$a_3=16$,

因为$a_3-a_2=8$,所以$a_2=8$,所以$q=2$,所以$a_n=a_3\cdot q^{n-3}=2^{n+1}$.

(2)因为$b_n=\log_22^n=n$,

所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

因为$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=2\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$,

所以存在满足要求的正整数k,且k的最小值为2

22.**解**:(1)因为$a_0=5\%$,$b_0=95\%$,$a_0+b_0=1$,所以$a_1=\frac{19}{20}\cdot a_0+(1-a_0)\frac{1}{5}=\frac{19}{80}$,$b_1=1-a_1=\frac{61}{80}$.

(2)由题意,可知5G商用初期,该区域市场中采用H公司与G公司技术的智能终端产品的占比分别为$a_0=5\%=\frac{1}{20}$,$b_0=95\%=\frac{19}{20}$,易知经过n次技术更新后$a_n+b_n=1$,

则$a_{n+1}=(1-5\%)a_n+20\%b_n=\frac{19}{20}a_n+\frac{1}{5}(1-a_n)=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{5}$,所以$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{5}(n\in\mathrm{N})$,①

由①式,可设$a_{n+1}+\lambda=\frac{3}{4}(a_n+\lambda)\Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n-\frac{\lambda}{4}$,对比①式可知,$-\frac{\lambda}{4}=\frac{1}{5}\Rightarrow\lambda=-\frac{4}{5}$.

由(1)可得$a_1=\frac{19}{80}$,故$a_1-\frac{4}{5}=\frac{19}{80}-\frac{4}{5}=-\frac{9}{16}$.

从而当$\lambda=-\frac{4}{5}$时,$\left\{a_n-\frac{4}{5}\right\}$是以$-\frac{9}{16}$为首项,$\frac{3}{4}$为公比的等比数列.

(3)由(2)可知$a_n-\frac{4}{5}=-\frac{9}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$,所以经过$n$次技术更新后,该区域市场采用H公司技术的智能终端产品占比$a_n=\frac{4}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$,

令$a_n>75\%$,得$\frac{4}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}>\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}<\frac{1}{20}\Leftrightarrow(n+1)\lg\frac{3}{4}<\lg\frac{1}{20}\Leftrightarrow n>\frac{1+\lg3-\lg2}{2\lg2-\lg3}\approx\frac{1+0.477-0.301}{2\times0.301-0.477}=\frac{1.176}{0.125}=9.408$.故$n\geqslant10$,即至少经过10次技术更新,该区域市场采用H公司技术的智能终端产品占比能达到75%以上.