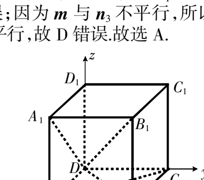
空间直角坐标系 $Axyz$,则 $C=(1,1,0)$,$P(0,0,1)$,$D(2,0,0)$,$Q\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{CQ}=\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$,取平面 $ABCD$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,设 CQ 与平面 $ABCD$ 所成角为 θ,则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CQ}\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CQ}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{CQ}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.故选 A.

8.A **提示**:在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AC\perp BD$,$DD_1\perp$平面 $ABCD$,因为 $EF\subset$平面 $ABCD$,所以 $EF\perp DD_1$,因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点,所以 $EF\parallel AC$,所以 $EF\perp BD$,又 $BD\cap DD_1=D$,所以 $EF\perp$平面 BDD_1,又 $EF\subset$平面B_1EF,所以平面 $B_1EF\perp$平面 BDD_1,故 A 正确;如图,以点D 为坐标原点,以 DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,设$AB=2$,则$B_1(2,2,2)$,$E(2,1,0)$,$F(1,2,0)$,$B(2,2,0)$,$A_1(2,0,2)$,$A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$C_1(0,2,2)$,则$\overrightarrow{EB_1}=(0,1,2)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$,设平面 B_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=-x_1+y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EB_1}=y_1+2z_1=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(2,2,-1)$,同理可得平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,-1)$,平面 A_1AC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,0)$,平面 A_1C_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}_3=(1,1,-1)$,则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}_1=1\neq0$,所以平面 B_1EF 与平面 A_1BD 不垂直,故 B 错误;因为 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 不平行,所以平面 B_1EF 与平面 A_1AC 不平行,故 C 错误;因为 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}_3$ 不平行,所以平面 B_1EF 与平面 A_1C_1D 不平行,故 D 错误.故选 A.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.ABD **提示**:因为向量$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$构成空间的一个基底,对于 A,因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,故 A 符合题意;对于 B,因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,故 B 符合题意;对于 C,因为不存在 $m,n\in\mathbf{R}$,使 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\neq m(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+n\boldsymbol{c}$,故 C 不符合题意;对于 D,因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,故 D 符合题意.故选 ABD.

10.AC **提示**:由题意,得 $B(1,0,0)$,$D_1(0,1,1)$,$\overrightarrow{BD_1}=(-1,1,1)$,所以直线 BD_1 的一个方向向量为 $(-2,2,2)$,故 A 正确,B 错误;由 $C(1,1,0)$,$B_1(1,0,1)$,得 $\overrightarrow{CB_1}=(0,-1,1)$,$\overrightarrow{CD_1}=(-1,0,1)$,设平面 B_1CD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=-y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD_1}=-x+z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,则 $y=z=1$,所以平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$,故 C 正确;$D(0,1,0)$,$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$,设平面 B_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB_1}=-b+c=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-a=0,\end{cases}$ 取 $b=1$,则 $a=0$,$c=1$,所以平面 B_1CD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$,故 D 错误.故选 AC.

11.ACD **提示**:因为 P,Q 分别为棱 BC 和 CC_1 的中点,所以 $PQ\parallel BC_1$,因为 $PQ\subset$平面 AQP,$BC_1\not\subset$平面 AQP,所以 $BC_1\parallel$平面 AQP,故 A 正确;若 $A_1D\perp$平面 AQP,则 $A_1D\perp AP$,又 $A_1D\perp AB$,$AB\cap AP=A$,所以 $A_1D\perp$平面 $ABCD$,与 A_1D 与平面 $ABCD$ 不垂直矛盾,故 B 错误;由 $A_1B_1\perp BC_1$,$B_1C\perp BC_1$,$A_1B_1\cap B_1C=B_1$,得 $BC_1\perp$平面A_1B_1CD,则 $A_1C\perp BC_1$,又 $PQ\parallel BC_1$,所以 $A_1C\perp PQ$,即异面直线 A_1C 与 PQ 所成角为 90°,故 C 正确;平面 AQP 截正方体所得截面为四边形 $APQD_1$,其为等腰梯形,故 D 正确.故选 ACD.

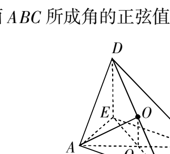
12.BC **提示**:因为 P,Q 分别是 A_1D_1,D_1C_1 的中点,所以 $PQ\parallel A_1C_1$,又 $BC\parallel B_1C_1$,$A_1C_1\cap B_1C_1=C_1$,故 PQ 与 BC 异面,故 A 错误;由正方体的性质得 $PQ\perp B_1D_1$,$PQ\perp B_1B$,又 $B_1D_1\cap B_1B=B_1$,所以 $PQ\perp$平面 B_1D_1DB,因为 $B_1M\subset$平面 B_1D_1DB,所以 $PQ\perp B_1M$,故 B 正确;易知 M 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离 d 为定值,且 $d=2$,又 $S_{\triangle PQB_1}$为定值,所以 $V_{P-QMB_1}=V_{M-PQB_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle PQB_1}\cdot d$ 为定值,故 C 正确;以 D 为坐标原点,以 DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $M(1,1,0)$,$P(1,0,2)$,$Q(0,1,2)$,所以$\overrightarrow{PQ}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{QM}=(1,0,-2)$,设平面 PQM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PQ}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{QM}=x-2z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$,则 $x=y=2$,所以平面 PQM 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$,易知平面 PQB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,设二面角 $M-PQ-B_1$ 的平面角为 α,所以 $\cos\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{3}$,则 $\alpha\neq60°$,故 D 错误.故选 BC.

三、填空题

13.$\sqrt{2}$ **提示**:因为 $A(1,0,0)$,$B(2,3,1)$,$C(3,0,2)$,所以$\overrightarrow{AB}=(1,3,1)$,$\overrightarrow{AC}=(2,0,2)$,所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$,$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$,所以$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影为$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\sqrt{2}$.

14.$\frac{\sqrt{14}}{2}$ **提示**:由题意,得 OC,OB,OP 两两垂直,以 O 为坐标原点,以 OC,OB,OP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,$A(0,-2,0)$,$C(2,0,0)$,$D(0,-1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{CD}=(-2,-1,\sqrt{3})$,所以 AC 在 CD 上投影的长度 $l=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,所以 A 到 CD 的距离 $d=\sqrt{AC^2-l^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

15.$\frac{\sqrt{6}}{3}$ **提示**:因为 BD 是球 O 的直径,所以 O 是 BD 的中点,取 AC 的中点 O_1,连接 BO_1 并延长到点 E,使 $O_1E=BO_1$,连接 OO_1,DE,AE,CE,如图,则 $DE\parallel OO_1$,且四边形 $ABCE$ 是平行四边形,$AE=BC=2$,由 $AB\perp BC$,得 O_1 是平面 ABC 截球 O 所得截面小圆的圆心,所以 $OO_1\perp$平面 ABC,$DE\perp$平面 ABC,所以$\angle DAE$ 是直线 AD 与平面 ABC 所成角,由球 O 的表面积为 16π,得球 O 半径 $OA=2$,因为 $AB=BC=2$,所以 $AO_1=\sqrt{2}$,又 $OO_1\perp AC$,所以 $OO_1=\sqrt{2}$,$DE=2OO_1=2\sqrt{2}$,所以在 Rt$\triangle ADE$ 中,$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=2\sqrt{3}$,$\sin\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{6}}{3}$.



(第 15 题图)

16.$\frac{\sqrt{30}}{3}$ **提示**:因为 $CC_1\parallel AA_1$,$AA_1\perp$平面ABC,所以 $CC_1\perp$平面 ABC,所以 $CC_1\perp CA$,$CC_1\perp CB$,又$\angle ACB=90°$,即 $CA\perp CB$,所以 CA,CB_1,CC_1 两两垂直,以C 为坐标原点,以 CA,CB,CC_1 所在直线分别为 x 轴,y轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A_1(2,0,2)$,$E(0,0,1)$,$B(0,2,0)$,$A(2,0,0)$,点 P 在棱 CC_1 上,设 $P(0,0,t)$,$t\in(0,2]$.则 $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{PA}=(2,0,-t)$,$\overrightarrow{A_1B}=(-2,2,-2)$,$\overrightarrow{A_1E}=(-2,0,-1)$,设平面 A_1BE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x+2y-2z=0,\\ -2x-z=0,\end{cases}$取 $x=1$,则 $y=-1$,$z=-2$,所以平面 A_1BE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-1,-2)$.设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2a+2b=0,\\ 2a-tc=0,\end{cases}$取 $a=1$,则 $b=1$,$c=\frac{2}{t}$,则平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,\frac{2}{t}\right)$,由题意可得$\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{4}{t}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+1+\frac{4}{t^2}}}=\cos60°=\frac{1}{2}$,解得 $t=\frac{\sqrt{30}}{3}$.所以$CP=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

四、解答题

17.(1)**解**:以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 辆,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$B(2,2,0)$,$A_1(2,0,2)$,$D_1(0,0,2)$,由 E,F 分别为 AB,A_1C 的中点,得 $E(2,1,0)$,$F(1,1,1)$,则$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,2)$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CD_1}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{CD_1}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,所以$\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD_1}\rangle=\frac{\pi}{3}$,所以异面直线 EF 与 CD_1 所成角为$\frac{\pi}{3}$.

(2)**证明**:因为$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$,$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$,所以$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$,$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,则 $EF\perp DA_1$,$EF\perp DC$,因为 $DA_1\cap DC=D$,所以 $EF\perp$平面 A_1CD.

18.(1)**证明**:连接 BD 交 AC 于点 F,因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以点 F 是 BD 的中点,又 E 是 PD 的中点,所以 $EF\parallel PB$.又 $EF\subset$平面 AEC,$PB\not\subset$平面 AEC,所以 $PB\parallel$平面 AEC.

(2)**解**:因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB$,$PA\perp AC$,又 $AB\perp AC$,所以 AC,AB,AP 两两垂直,以 A 为坐标原点,射线 AC,AB,AP 分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系 $Axyz$.则 $C(2,0,0)$,$P(0,0,3)$,$D(2,-3,0)$,则 $E\left(1,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{CE}=\left(-1,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.平面 PAB 的一个法向量为$\overrightarrow{AC}=(2,0,0)$.设直线 CE 与平面 PAB 所成角为 θ,则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{CE},\overrightarrow{AC}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{22}}{11}$.所以直线 CE 与平面 PAB 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{22}}{11}$.

19.(1)**证明**:连接 AE,与 BD 交于点 N,连接 MN.因为侧面 $ABED$ 是平行四边形,所以点 N 是 AE 的中点.因为点 M 是棱 EF 的中点,所以 $MN\parallel AF$.因为 $AF\not\subset$平面 BDM,$MN\subset$平面 BDM,所以 $AF\parallel$平面 BDM.

(2)**解**:因为三棱锥 $B-DEF$ 的体积为 4,所以三棱柱 $ABC-DEF$ 的体积为 12,所以四棱锥 $B-ADFC$ 的体积为 $12-4=8$.因为侧面 $ADFC$ 是边长为 2 的正方形,所以侧面 $ADFC$ 的面积为 $2\times2=4$.

设点 B 到平面 $ADFC$ 的距离为 h,则$\frac{1}{3}\times4h=8$,解得 $h=6$.故点 B 到平面 $ADFC$ 的距离为 6.

20.(1)**证明**:因为 $PD\perp$底面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $PD\perp BD$,$PD\perp AD$,取 AB 中点 E,连接 DE,则 $BE=DC=1$,又 $CD\parallel AB$,所以四边形 $DEBC$ 是平行四边形,所以 $CB=DE=1$,又 $AB=2$,所以 $DE=\frac{1}{2}AB$,所以$\triangle ABD$ 为直角三角形,且 AB 为斜边,所以 $BD\perp AD$,又 $PD\cap AD=D$,$PD\subset$平面 PAD,$AD\subset$平面 PAD,所以 $BD\perp$平面 PAD,又 $PA\subset$平面 PAD,所以 $BD\perp PA$.

(2)**解**:由(1)知,DP,DA,DB 两两互相垂直,故以 D 为坐标原点,以 DA,DB,DP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{3}$,$D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,所以$\overrightarrow{PD}=(0,0,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=x-\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$则可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$,设 PD 与平面 PAB 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PD},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 PD 与平面 PAB 所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

21.**解**:(1)设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h,由题意,得 $V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{2\sqrt{2}}{3}h$,$V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1A=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{4}{3}$,则$\frac{2\sqrt{2}}{3}h=\frac{4}{3}$,解得 $h=\sqrt{2}$,所以点 A 到平面 A_1BC 的距离为$\sqrt{2}$.

(2)连接 AB_1,交 A_1B 于点 E,因为 $AA_1=AB$,四边形 ABB_1A_1 是矩形,所以 $AB_1\perp A_1B$,又平面 $A_1BC\perp$平面 ABB_1A_1,平面 $A_1BC\cap$平面 $ABB_1A_1=A_1B$,且 $AB_1\subset$平面 ABB_1A_1,所以 $AB_1\perp$平面 A_1BC,所以 $AB_1\perp BC$,因为在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$BB_1\perp$平面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,所以 $BB_1\perp BC$,又 AB_1,$BB_1\subset$平面 ABB_1A_1,$AB_1\cap BB_1=B_1$,所以 $BC\perp$平面 ABB_1A_1,所以 $BC\perp AB$,所以 BC,BA,BB_1 两两垂直.以 B 为坐标原点,以 BC,BA,BB_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,由(1)得 $h=AE=\sqrt{2}$,所以 $AA_1=AB=2$,$A_1B=2\sqrt{2}$,所以 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=2\times\frac{1}{2}\times2\times BC=4$,则 $BC=2$,所以 $B(0,0,0)$,$A(0,2,0)$,$A_1(0,2,2)$,$C(2,0,0)$,所以 $D(1,1,1)$,$\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$,$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$,设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=x+y+z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}=2y=0,\end{cases}$则 $y=0$,取 $x=1$,则 $z=-1$,所以平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$.设平面 BDC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=a+b+c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2a=0,\end{cases}$则 $a=0$,取 $b=1$,则 $c=-1$,所以平面 BDC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为$\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22.(1)**证明**:由 $AC_1=2\sqrt{2}$,$AC=A_1C_1=AA_1=2$,得 $AC_1^2=AA_1^2+A_1C_1^2$,所以 $AA_1\perp A_1C_1$.又 $CC_1\parallel A_1A$,所以 $CC_1\perp A_1C_1$.因为$\triangle BCC_1$ 是正三角形,所以$\triangle BB_1C_1$ 是正三角形.因为 P 是 BB_1 的中点,所以 $C_1P\perp B_1B$,因为 $C_1C\parallel B_1B$,所以 $C_1P\perp C_1C$.因为 $C_1P\cap A_1C_1=C_1$,C_1P,$A_1C_1\subset$平面 A_1C_1P,所以 $CC_1\perp$平面 A_1C_1P.

(2)**解**:由(1)知 $C_1C\perp A_1C_1$,又 $AC\parallel A_1C_1$,所以 $AC\perp C_1C$,又 $AC\perp BC$,$BC\cap C_1C=C$,BC,$C_1C\subset$平面 BCC_1B_1,所以 $AC\perp$平面 BCC_1B_1,又 $AC\subset$平面 ABC,所以平面$ABC\perp$平面 BCC_1B_1.取 BC 的中点 O,由$\triangle BCC_1$ 为正三角形,得 $C_1O\perp BC$,因为平面 $BCC_1B_1\cap$平面 $ABC=BC$,$C_1O\subset$平面 BCC_1B_1,所以 $C_1O\perp$平面 ABC,以 O 为坐标原点,以OB,OC_1 分别为 y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A(2,-1,0)$,$B(0,1,0)$,$C_1(0,0,\sqrt{3})$,$C(0,-1,0)$,$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{BC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$.设平面 ABC_1 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$取 $z=1$,得平面 ABC_1 的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$.由(1)知 $CC_1\perp$平面 A_1C_1P,所以平面 A_1C_1P 的一个法向量为$\overrightarrow{CC_1}=(0,1,\sqrt{3})$,所以$|\cos\langle\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.所以平面 ABC_1 与平面 A_1C_1P 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 13 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A **提示**:因为等比数列$\{a_n\}$为递减数列,$a_3+a_6=9$,$a_4\cdot a_5=a_3\cdot a_6=8$,所以 $a_3=8$,$a_6=1$,则 $q^3=\frac{a_6}{a_3}=\frac{1}{8}$,所以 $q=\frac{1}{2}$.故选 A.

2.C **提示**:因为$\{a_n\}$是等比数列,所以 $a_4a_7=a_5a_6$,因为 $a_4a_7+a_5a_6=20$,所以 $a_5a_6=10$,所以 $\lg a_1+\lg a_2+\cdots+\lg a_{10}=\lg(a_1a_2\cdots a_{10})=\lg(a_5a_6)^5=5\lg10=5$.故选 C.

3.C **提示**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,又 $S_2=3$,$S_6=21$,所以 $q\neq1$,所以$\begin{cases}\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}=3,\\ \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=21,\end{cases}$解得 $q^2=2$,所以$\frac{S_8}{S_4}=\frac{1-q^8}{1-q^4}=1+q^4=5$.故选 C.

4.C **提示**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,由 $a_4+a_7=2$,$a_4a_7=a_5a_6=-8$,得 $a_4=4$,$a_7=-2$,或 $a_4=-2$,$a_7=4$,所以 $q^3=\frac{a_7}{a_4}=-\frac{1}{2}$或$-2$,所以 $a_{10}=a_4\cdot q^6=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$,或 $a_{10}=a_4\cdot q^6=-2\times(-2)^2=-8$.故选 C.

5.D **提示**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,$q\neq0$,若 $q=1$,则 $a_2-a_5=0$,不符合题意,所以 $q\neq1$,由题意,得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168,\\ a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=42,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=96,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$所以 $a_6=a_1q^5=3$.故选 D.

6.A **提示**:由题意可知,乌龟每次爬行的距离构成等比数列,记为$\{a_n\}$,$a_1=10$,$q=0.1$,$a_n=0.001$,所以 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_n\cdot q}{1-q}=\frac{10-0.001\times0.1}{1-0.1}=11.111$.故选 A.

7.B **提示**:因为 $S_6=2S_3+4$,所以 $a_1+a_2+a_3+(a_4+a_5+a_6)=S_3+q^3(a_1+a_2+a_3)=S_3(1+q^3)=2S_3+4$,所以 $q^3=1+\frac{4}{S_3}$,所以 $a_7+a_8+a_9=q^6(a_1+a_2+a_3)=S_3\left(1+\frac{4}{S_3}\right)^2=S_3+\frac{16}{S_3}+8\geqslant2\sqrt{S_3\cdot\frac{16}{S_3}}+8=16$,当且仅当 $S_3=\frac{16}{S_3}$,即 $S_3=4$ 时,等号成立,所以 $a_7+a_8+a_9$ 的最小值为 16.故选 B.

8.C **提示**:因为 $2a_{n+1}=3a_n+b_n+2$,$2b_{n+1}=a_n+3b_n-2$,所以 $2a_{n+1}+2b_{n+1}=a_n+3b_n-2+3a_n+b_n+2=4(a_n+b_n)$,所以 $a_{n+1}+b_{n+1}=2(a_n+b_n)$,又 $a_1+b_1=2$,所以$\{a_n+b_n\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列,所以 $a_n+b_n=2^n$,又 $2a_{n+1}=3a_n+b_n+2$,则 $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n+1$,所以 $a_{n+1}+b_n=\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n+1+b_n=\frac{3}{2}(a_n+b_n)+1=\frac{3}{2}\times2^n+1=3\times2^{n-1}+1$,所以 $a_{2022}+b_{2021}=3\times2^{2020}+1$.故选 C.

二、多项选择题

9.CD **提示**:由题意,得 $256=1\times q^4$,解得 $q=\pm4$.故选 CD.

10.AD **提示**:因为公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$,满足 $a_1>1$,$a_{2021}\cdot a_{2022}>1$,$\frac{a_{2021}-1}{a_{2022}-1}<0$,所以 $a_{2021}>1$,$0<a_{2022}<1$,$0<q<1$,故 A 正确;因为当 $1\leqslant n\leqslant2021$ 时,$a_n>1$,当 $n>2021$ 时,$0<a_n<1$,所以当 $n=2021$ 时,T_n 取得最大值,故 D 正确;因为数列$\{a_n\}$的各项都为正数,所以 S_n 没有最大值,故 C 错误;由题意得,$0<a_{2022}<1$,$0<a_{2023}<1$,所以 $0<a_{2021}\cdot a_{2023}=a_{2022}^2<1$,故 B 错误.故选 AD.

11.BC **提示**:由 $a_1=2$,$a_2+a_3=12$,得 $2q+2q^2=12$,即 $q^2+q-6=0$,解得 $q=2$ 或 $q=-3$(舍去),故 B 正确;$S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{2\times(1-2^5)}{1-2}=62$,故 A 错误;$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$,则 $S_n+2=2^{n+1}$,所以数列$\{S_n+2\}$是以 4 为首项,2 为公比的等比数列,故 C 正确;$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$,则 $\lg a_n=\lg2^n=n\lg2$,则 $\lg a_{n+1}-\lg a_n=(n+1)\lg2-n\lg2=\lg2$,所以数列$\{\lg a_n\}$是以 lg2 为公差的等差数列,故 D 错误.故选 BC.

12.ACD **提示**:因为数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_n+a_{n+1}=2^{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$,所以 $a_2=2$,$a_3=6$,$a_4=10$,故 A 正确,B 错误;由 $a_n+a_{n+1}=2^{n+1}$,得 $a_{n+1}+a_{n+2}=2^{n+2}$,两式相减,得 $a_{n+2}-a_n=2^{n+1}$,故 $a_{2022}=(a_{2022}-a_{2020})+(a_{2020}-a_{2018})+\cdots+(a_4-a_2)+a_2=2^{2021}+2^{2019}+\cdots+2^3+2=\frac{2\times(1-4^{1011})}{1-4}=\frac{2^{2023}-2}{3}$,故 C 正确;$a_1+a_2+\cdots+a_{2021}=a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2020}+a_{2021})=2+2^3+2^5+\cdots+2^{2021}=\frac{2\times(1-4^{1011})}{1-4}=\frac{2^{2023}-2}{3}$,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.$\frac{1}{3}$ **提示**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,因为 $a_2=9$,$a_4=3$,所以 $q^2=\frac{a_4}{a_2}=\frac{1}{3}$,所以 $a_8=a_4q^4=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$.

14.-16 **提示**:因为 $S_n=2a_n+1$,所以 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n+1-(2a_{n-1}+1)$,即 $a_n=2a_{n-1}$,当 $n=1$ 时,$S_1=a_1=2a_1+1$,解得 $a_1=-1$,所以数列$\{a_n\}$是首项为-1,公比为 2 的等比数列,所以 $a_5=-2^4=-16$.

15.12 **提示**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,因为 $a_n>0$,所以 $q>0$,因为 $a_3+a_4=a_1+a_2+3$,所以 $a_3+a_4-(a_1+a_2)=(q^2-1)(a_1+a_2)=3$,因为 $a_n>0$,所以 $q>1$,所以 $a_1+a_2=\frac{3}{q^2-1}$,所以 $S_6-S_4=a_5+a_6=q^4(a_1+a_2)=q^4\cdot\frac{3}{q^2-1}=3\left[(q^2-1)+\frac{1}{q^2-1}+2\right]\geqslant6+3\times2\sqrt{(q^2-1)\cdot\frac{1}{q^2-1}}=12$,当且仅当 $q^2-1=\frac{1}{q^2-1}$,即 $q=\sqrt{2}$ 时,等号成立,所以 S_6-S_4 的最小值为 12.

16.$\frac{4}{3}$ **提示**:因为数列$\{a_n\}$是正项等比数列,且 $a_2=6$,$a_1a_3+2a_2a_4+a_3a_5=900$,所以 $a_2^2+2a_2^2q^2+a_2^2q^4=900$,所以 $q^4+2q^2-24=0$,解得 $q=2$,所以 $a_1=3$,所以 $a_n=a_1q^{n-1}=3\times2^{n-1}$,$S_n=\frac{3(1-2^n)}{1-2}=3\times2^n-3$,因为不等式 $\lambda a_n\leqslant1+S_n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$恒成立,所以 $\lambda\leqslant\frac{1+S_n}{a_n}=\frac{3\times2^n-2}{3\times2^{n-1}}$恒成立,因为 $2-\frac{2}{3\times2^{n-1}}\geqslant2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$,所以 $\lambda\leqslant\frac{4}{3}$,即实数 λ 的最大值为$\frac{4}{3}$.

四、解答题

17.(1)**证明**:因为$\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$,即 $2S_n+n^2=2na_n+n$,①

当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)$,②

①−②得 $2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$,即 $2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$,即 $2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$,所以 $a_n-a_{n-1}=1$,$n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}_+$,所以$\{a_n\}$是以 1 为公差的等差数列.

(2)**解**:由(1)可得 $a_4=a_1+3$,$a_7=a_1+6$,$a_9=a_1+8$,因为 a_4,a_7,a_9 成等比数列,所以 $a_7^2=a_4\cdot a_9$,即$(a_1+6)^2=(a_1+3)\cdot(a_1+8)$,解得 $a_1=-12$,所以 $a_n=n-13$,所以 $S_n=-12n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2-\frac{625}{8}$,所以当 $n=12$ 或 $n=13$ 时,S_n 取得最小值-78.

18.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $2a_2+a_5=0$,$a_7=2a_4-2$,所以 $2(a_1+d)+a_1+4d=0$,$a_1+6d=2(a_1+3d)-2$,解得 $a_1=2$,$d=-1$,所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-n+3$.

(2)因为 $b_n=2^{a_n}=2^{-n+3}$,所以数列$\{b_n\}$是以 4 为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,故数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{4\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=8-2^{-n+3}$.

19.**解**:(1)由已知,得 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}=\frac{3}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$,所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}=\frac{1}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$,所以 $q=2$.由 $a_5+2a_4=a_2a_4$,得 $a_3q^2+2a_3q=a_3^2$,即 $q^2+2q=a_3$,所以 $a_3=8$,所以 $a_n=a_3q^{n-3}=2^n$.

(2)因为$\{b_n\}$是递增数列,所以 $b_{n+1}>b_n$ 对 $n\in\mathbf{N}_+$恒成立,即 $n\in\mathbf{N}_+$时,$(n+1-\lambda)2^{n+1}>(n-\lambda)2^n$,得 $\lambda<n+2$ 对 $n\in\mathbf{N}_+$恒成立,即 $\lambda<3$.所以实数 λ 的取值范围是$(-\infty,3)$.

20.(1)**证明**:因为 $2a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$,所以 $2(a_{n+2}-a_{n+1})=a_{n+1}-a_n$,又 $b_n=a_{n+1}-a_n$,所以 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$,又 $a_1=3$,$a_2=5$,所以 $b_1=a_2-a_1=2$,所以数列$\{b_n\}$是以 2 为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

(2)**解**:设数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n,由(1)知 $b_n=a_{n+1}-a_n=\frac{2}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}$,则当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_n-a_{n-1}=a_n-a_1=\frac{2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=4-\frac{1}{2^{n-3}}$,所以 $a_n=7-\frac{1}{2^{n-3}}$,$n\geqslant2$,且 $a_1=3$ 也满足上式,所以 $a_n=7-\frac{1}{2^{n-3}}<7$,因为 $a_n\leqslant m$ $(n\in\mathbf{N}_+)$,所以 $m\geqslant7$,即实数 m 的取值范围是$[7,+\infty)$.

21.(1)**解**:由 $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$,得$[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.因为$\{a_n\}$是正项数列,所以 $S_n>0$,所以 $S_n-(n^2+n)=0$,即 $S_n=n^2+n$.所以 $a_1=S_1=2$,当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.当 $n=1$ 时,上式也成立,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明**:因为 $a_n=2n$,$b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$,所以 $b_n=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.$T_n=\frac{1}{16}\times\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\times\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{1}{16}\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}$.

22.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,因为 $b_3=2a_2$,$a_3=b_4+1$,$a_1=1$,$d=2$,所以 $b_1+4=2q$,$q^2=b_1+7$,解得 $b_1=2$,$q=3$,所以 $a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$,$b_n=2+(n-1)\times2=2n$.

(2)若选择①,$c_n=3a_n+(b_n-1)=3^n+(2n-1)$,所以 $S_n=(3^1+1)+(3^2+3)+(3^3+5)+\cdots+[3^n+(2n-1)]=(3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n)+(1+3+5+\cdots+2n-1)=\frac{3(1-3^n)}{1-3}+\frac{(1+2n-1)n}{2}=\frac{1}{2}\cdot3^{n+1}+n^2-\frac{3}{2}$.

若选择②,$c_n=\frac{b_n-1}{3a_n}=\frac{2n-1}{3^n}$,所以 $S_n=\frac{1}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$,所以$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\cdots+\frac{2n-3}{3^n}+\frac{2n-1}{3^{n+1}}$,两式作差,得$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+2\times\frac{\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{2n+2}{3^{n+1}}$,所以 $S_n=1-\frac{n+1}{3^n}$.

第 14 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C **提示**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $a_2=3$,所以 $a_3+a_4=2a_2+3d=6+3d=12$,解得 $d=2$,所以 $a_1=a_2-d=1$,$S_9=9a_1+\frac{1}{2}\times9\times8\times d=81$.故选 C.

2.D **提示**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,由 $a_2a_4=4a_3-4$,得 $a_3^2=4a_3-4$,解得 $a_3=2$,因为 $a_3=a_1q^2$,$a_1=\frac{1}{2}$,所以$\frac{1}{2}q^2=2$,则 $q^2=4$,所以 $a_5=a_3q^2=2\times4=8$.故选 D.

3.A **提示**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $a_4=11$,且 a_1,a_3,a_{11} 成等比数列,所以$\begin{cases}a_1+3d=11,\\ (a_1+2d)^2=a_1(a_1+10d),\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\ d=3.\end{cases}$所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$,所以 $S_m=\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{2}m=40$,解得 $m=5$(舍负).故选 A.

4.D **提示**:因为 $a_1=1$,$a_{n+1}=2S_n(n\geqslant1)$,①

所以 $a_2=2S_1=2$,$a_n=2S_{n-1}(n\geqslant2)$,②

由①−②,得 $a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$,所以数列$\{a_n\}$是从第二项起,构成首项为 2,公比为 3 的等比数列,所以 $a_{2022}=2\times3^{2020}$.故选 D.

5.D **提示**:由题意,得该女子每天织布的尺数成等比数列,设为$\{a_n\}$,其公比 $q=2$,则第一天织布的尺数为 a_1,第五天织布的尺数为 a_5,前 5 天共织布为 $S_5=5$,则 $S_5=\frac{a_1(1-2^5)}{1-2}=5$,解得 $a_1=\frac{5}{31}$,所以 $a_5=a_1q^4=\frac{80}{31}$.故选 D.

6.A **提示**:因为 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)\cdot2^n+1$,①

所以当 $n\geqslant2$ 时,

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-2)\cdot2^{n-1}+1$,②

由①−②,得 $na_n=[(n-1)\cdot2^n+1]-[(n-2)\cdot2^{n-1}+1]=n\cdot2^{n-1}(n\geqslant2)$,则 $a_n=2^{n-1}(n\geqslant2)$,所以 $a_7=2^6=64$.故选 A.

7.B **提示**:易知函数 $f(x)=x^3+\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $f(-x)+f(x)=[(-x)^3+\lg(\sqrt{(-x)^2+1}-x)]+[x^3+\lg(\sqrt{x^2+1}+x)]=0+\lg1=0$,所以 $f(-x)=-f(x)$,所以函数 $f(x)$为奇函数,因为 $f(a_n-1)=-10$,$f(2-a_{n+1})=10$,即 $f(a_n-1)+f(2-a_{n+1})=0$,所以 $a_n-1+2-a_{n+1}=0$,即 $a_{n+1}-a_n=1$,所以数列$\{a_n\}$是公差 $d=1$ 的等差数列,因为 $S_5=5$,所以 $5a_1+\frac{5\times4}{2}\times1=5$,解得 $a_1=-1$,所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n-2$.所以 $b_n=2a_n+4=2n$,所以$\frac{4}{b_nb_{n+1}}=\frac{4}{2n\times2(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,所以数列$\left\{\frac{4}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 $T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.故选 B.

8.A **提示**:由 $F_n=2^{2^n}+1(n\in\mathbf{N}_+)$,得 $a_n=\log_2(F_n-1)-1=2^n-1$,则$\frac{2^n}{a_na_{n+1}}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$,则$\frac{2}{a_1a_2}+\frac{2^2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{2^n}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}<1$,因为不等式$\frac{2}{a_1a_2}+\frac{2^2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{2^n}{a_na_{n+1}}<\lambda^2-4\lambda+4$ 恒成立,所以 $\lambda^2-4\lambda+4\geqslant1$,解得 $\lambda\leqslant1$ 或 $\lambda\geqslant3$,即实数 λ 的取值范围是$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.故选 A.

二、多项选择题

9.AD **提示**:由 $a_1=2$,$a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$,得 $a_2=-3$,$a_3=-\frac{1}{2}$,$a_4=\frac{1}{3}$,$a_5=2$,…,所以$\{a_n\}$是周期为 4 的周期数

④ 列，若 $a_n=-\frac{1}{2}$，则 $n=3+4n'$，$n'\in\mathbf{N}$，令 $2019=3+4n'$，解得 $n'=504$；令 $2021=3+4n'$，解得 $n'=504.5$（舍去）；令 $2022=3+4n'$，解得 $n'=504.75$（舍去）；令 $2023=3+4n'$，解得 $n'=505$.故选 AD.

10.AD **提示：**设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，首项为a_1，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，首项为为b_1，由$2a_2-a_4=1$，得$2(a_1+d)-(a_1+3d)=1$，则$a_1-d=1$，故A正确，B错误；由$b_3=-8$，$b_6=64$，得$q^3=\frac{b_6}{b_3}=-8$，则$q=-2$，又$b_3=-8$，即$b_1q^2=-8$，所以$b_1=-2$，故C错误，D正确.故选AD.

11.BCD **提示：**因为对任意$n\geqslant2$且$n\in\mathbf{N}_+$恒有$\frac{a_n+3^n}{a_{n-1}-3^{n-1}}=3$成立，即$a_n+3^n=3a_{n-1}-3^n(n\geqslant2)$，所以$a_n=3a_{n-1}-2\times3^n(n\geqslant2)$，变形可得$\frac{a_n}{3^n}-\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}=-2(n\geqslant2)$，又$a_1=3$，所以数列$\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$是首项为$\frac{a_1}{3}=1$，公差为$-2$的等差数列，故B正确；$\frac{a_n}{3^n}=-2n+3$，所以$a_n=(3-2n)\cdot3^n$.对于A，$a_n=(3-2n)\cdot3^n$，则$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3(3-2n)}{5-2n}$，所以数列$\{a_n\}$不是等比数列，故A错误；对于C，$a_n=(3-2n)3^n$，则$a_n-a_{n-1}=(4-4n)\cdot3^{n-1}(n\geqslant2)$，所以$a_n-a_{n-1}<0$，即$a_n<a_{n-1}$，所以$\{a_n\}$为递减数列，故C正确；对于D，$a_n=(3-2n)\cdot3^n$，则$S_n=1\times3+(-1)\times3^2+(-3)\times3^3+\cdots+(3-2n)\times3^n$，①

则$3S_n=1\times3^2+(-1)\times3^3+(-3)\times3^4+\cdots+(3-2n)\times3^{n+1}$，②

由①-②，得$-2S_n=3+(-2)\times(3^2+3^3+\cdots+3^n)-(3-2n)\times3^{n+1}=3+(-2)\times\frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(3-2n)\times3^{n+1}=12-(4-2n)\times3^{n+1}$，所以$S_n=(2-n)3^{n+1}-6$，故D正确.故选BCD.

12.ABD **提示：**由题意可知，第1次得到数列1,3,2,此时$k=1$,第2次得到数列1,4,3,5,2,此时$k=3$,第3次得到数列1,5,4,7,3,8,5,7,2,此时$k=7$,第4次得到数列1,6,5,9,4,11,7,10,3,11,8,13,5,12,7,9,2,此时$k=15$,第n次得到数列$1,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_k,2$,此时$k=2^n-1$,所以$k+1=2^n$,故A正确；结合A项中列出的数列可得$a_1=3+3$,$a_2=3+3+9$,$a_3=3+3+9+27$,$a_4=3+3+9+27+81$,…,$a_n=3+3^1+3^2+\cdots+3^n(n\in\mathbf{N}_+)$，所以$a_n=3+\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}}{2}+\frac{3}{2}$，则$a_{n+1}=\frac{3^{n+2}}{2}+\frac{3}{2}$，又$3a_n-3=3\left(\frac{3^{n+1}}{2}+\frac{3}{2}\right)-3=\frac{3^{n+2}}{2}+\frac{3}{2}$，所以$a_{n+1}=3a_n-3$，故B正确；因为$a_n=\frac{3^{n+1}}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(3^n+1)$，故C错误；$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\left(\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{2}+\cdots+\frac{3^{n+1}}{2}\right)+\frac{3}{2}n=\frac{3^2(1-3^n)}{2\times(1-3)}+\frac{3}{2}n=\frac{3}{4}(3^{n+1}+2n-3)$，故D正确.故选ABD.

三、填空题

13.45 **提示：**因为数列$\{a_n\}$为等差数列，所以$a_3+a_7=2a_5$，因为$a_3+a_7-a_5^2+15=0$，所以$a_5^2-2a_5-15=0$，因为$a_n>0$，所以$a_5=5$，所以$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=45$.

14.-1(答案不唯一) **提示：**易知数列$\{a_n\}$是递减数列，$\{b_n\}$是递增数列，因为集合$A=\{n\in\mathbf{N}_+|a_n>b_n\}$中恰有3个元素，所以$a_1>b_1,a_2>b_2,a_3>b_3,a_n\leqslant b_n$($n\geqslant4$，$n\in\mathbf{N}_+$)，此时只需$\begin{cases}a_3>b_3,\\a_4\leqslant b_4,\end{cases}$即$\begin{cases}16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2>b_1+4,\\16\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\leqslant b_1+6,\end{cases}$解得$-4\leqslant b_1<0$，故符合题意的$b_1$的一个取值为$-1$(答案不唯一).

15.$[4,+\infty)$ **提示：**由$n(a_{n+1}-a_n)=a_n$，得$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，则$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n-2}\times\frac{n}{n-1}$，所以$\frac{a_n}{a_1}=n$，又$a_1=\frac{1}{2}$，所以$a_n=\frac{n}{2}$，所以$\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{4}{n(n+1)}=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以$S_n=4\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<4$，因为不等式$S_n<t$恒成立，所以$t\geqslant4$，即实数$t$的取值范围为$[4,+\infty)$.

16.$\frac{3n-1}{3n-4}$；$-\frac{1}{3}$ **提示：**因为$a_na_{n-1}=2a_{n-1}-1(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，所以$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，又$b_n=\frac{1}{a_n-1}$，所以当$n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+$时，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{a_{n-1}}-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=1$，所以数列$\{b_n\}$为等差数列，又$a_1=-2$，所以$b_1=\frac{1}{a_1-1}=-\frac{1}{3}$，所以$b_n=b_1+(n-1)\times1=n-\frac{4}{3}$，又$b_n=\frac{1}{a_n-1}$，所以$a_n=\frac{1}{n-\frac{4}{3}}+1=\frac{3n-1}{3n-4}$.所以数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n=-\frac{1}{3}n+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n=\frac{1}{2}\left(n^2-\frac{5}{3}n\right)=\frac{1}{2}\left[\left(n-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]$，所以当$n=1$时，$S_n$取得最小值$-\frac{1}{3}$.

四、解答题

17.(1)**证明：**设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$，所以$\begin{cases}a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1,\\a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d),\end{cases}$解得$b_1=a_1=\frac{d}{2}$，所以原命题得证.

(2)**解：**由(1)知，$b_1=a_1=\frac{d}{2}$，所以$b_k=a_m+a_1\Leftrightarrow b_1\times2^{k-1}=a_1+(m-1)d+a_1$，即$2^{k-1}=2m$，所以$m=2^{k-2}\in[1,500]$，解得$2\leqslant k\leqslant10$，所以满足等式的$k=2,3,4,\cdots,10$，故集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant500\}$中的元素个数为9.

18.**解：**(1)因为$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-n+1(n\in\mathbf{N}_+)$，所以$a_2=2a_1-1+1=4$，$a_n-n=2a_{n-1}-(n-1)+1-n=2[a_{n-1}-(n-1)](n\geqslant2)$，又$a_1-1=1$，所以数列$\{a_n-n\}$是首项为1，公比为2的等比数列.

(2)由(1)得$a_n-n=2^{n-1}$，所以$a_n=n+2^{n-1}$，所以数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=(1+2+3+\cdots+n)+(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1+\frac{n(n+1)}{2}$.

19.(1)**解：**因为$a_{n+1}^2-(2n+1)a_{n+1}=a_n^2+(2n+1)a_n$，即$a_{n+1}^2-a_n^2-(2n+1)(a_{n+1}+a_n)=0$，所以$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2n-1)=0$，又$a_n>0$，所以$a_{n+1}-a_n=2n+1$，即$a_n-a_{n-1}=2n-1(n\geqslant2$且$n\in\mathbf{N}_+)$.所以当$n\geqslant2$时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，当$n=1$时，$a_1=1$，上式成立，所以$a_n=n^2(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明：**当$n\geqslant2$时，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，

$T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2$.当$n=1$时，$T_1=\frac{1}{a_1}=1<2$成立.

综上，$T_n<2$.

20.**解：**(1)$A_n=n^2$，所以$n\geqslant2$时，$a_n=A_n-A_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.当$n=1$时，$a_1=A_1=1$.所以$n=1$时，适合上式.所以$a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}_+)$.因为$a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$，所以$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\times2=1$，又$b_1=2$，所以数列$\{b_n\}$是首项为2，公差为1的等差数列，所以$B_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{n^2+3n}{2}$.

(2)因为对任意$n\in\mathbf{N}_+$，都有$a_n=B_n$，所以$a_{n+1}-a_n=B_{n+1}-B_n=b_{n+1}$.所以$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{2}b_{n+1}$.所以$b_{n+1}=2b_n$，$b_1>0$.所以数列$\{b_n\}$是等比数列，公比为2.所以$B_n=\frac{1-2^n}{1-2}b_1=(2^n-1)b_1$.又$\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{B_{n+1}-B_n}{B_{n+1}B_n}=\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_{n+1}}$，$\frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_2a_3}+\frac{b_4}{a_3a_4}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}<\frac{1}{3}$成立，所以$\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_2}+\frac{1}{B_2}-\frac{1}{B_3}+\cdots+\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_{n+1}}=\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_{n+1}}=\frac{1}{b_1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\frac{1}{3}$，所以$b_1>3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$，因为对任意$n\in\mathbf{N}_+$，上式都成立，且$3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<3$，所以$b_1\geqslant3$.所以正实数$b_1$的取值范围是$[3,+\infty)$.

21.**解：**(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

若选择①，由$2a_5-a_3=13$，$a_2=3$，得$2(a_2+3d)-(a_2+d)=13$，解得$d=2$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_2+(n-2)d=2n-1$.

若选择②，由$S_4=16$，$a_2=3$，得$\begin{cases}4a_1+6d=16,\\a_1+d=3,\end{cases}$解得$a_1=1$，$d=2$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

若选择③，由$S_3+a_6=20$，$a_2=3$，得$\begin{cases}3a_1+3d+a_1+5d=20,\\a_1+d=3,\end{cases}$解得$a_1=1$，$d=2$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)\cdot d=2n-1$.

因为$T_n=2b_n-2$，所以当$n\geqslant2$时，$T_{n-1}=2b_{n-1}-2$，两式相减，得$b_n=(2b_n-2)-(2b_{n-1}-2)$，即$b_n=2b_{n-1}(n\geqslant2)$，在$T_n=2b_n-2$中，令$n=1$，得$b_1=2$，所以数列$\{b_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，所以数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$.

综上，$a_n=2n-1$，$b_n=2^n$.

(2)由(1)知，$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{2^n}$，所以$R_n=\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，$\frac{1}{2}R_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，两式相减，得$\frac{1}{2}R_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，所以$R_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

22.**解：**(1)因为数列$\{b_n\}$是等差数列，所以$b_1+b_8=b_4+b_5$，$b_4+b_5+b_6=3b_5$，由$\frac{b_5^2}{b_1+b_6+b_8}=1$，得$\frac{b_5^2}{3b_5}=1$，所以$b_5=3$，又$b_3=2$，设等差数列$\{b_n\}$的公差为$d$，所以$d=\frac{b_5-b_3}{5-3}=\frac{1}{2}$，所以$b_n=b_3+(n-3)d=2+\frac{1}{2}(n-3)=\frac{n+1}{2}$.所以$b_1=1$，则$S_n=b_1\cdot2^{n+2}-4=2^{n+2}-4$，当$n=1$时，$a_1=S_1=4$；当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+2}-4-2^{n+1}+4=2^{n+1}$，当$n=1$时，$a_1=4$，上式成立.所以$a_n=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)得$a_nb_n=2^{n+1}\cdot\frac{n+1}{2}=(n+1)\cdot2^n$，

因为$T_n=2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\cdot2^n$， ①

所以$2T_n=2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n+1)\cdot2^{n+1}$， ②

由①-②，得$-T_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot2^{n+1}=4+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\cdot2^{n+1}=-n\cdot2^{n+1}$，所以$T_n=n\cdot2^{n+1}$.因为$\frac{kT_n}{a_n}>\frac{6n^2}{n^2-9n+36}$对一切$n\in\mathbf{N}_+$恒成立，所以$k>\frac{6n}{n^2-9n+36}$对一切$n\in\mathbf{N}_+$恒成立，即$k>\frac{6}{n+\frac{36}{n}-9}$对一切$n\in\mathbf{N}_+$恒成立.令$g(n)=\frac{6}{n+\frac{36}{n}-9}(n\in\mathbf{N}_+)$，则$g(n)=\frac{6}{n+\frac{36}{n}-9}\leqslant\frac{6}{2\sqrt{36}-9}=2$，当且仅当$n=6$时，等号成立.所以$k>2$，所以实数$k$的取值范围是$(2,+\infty)$.

第15期

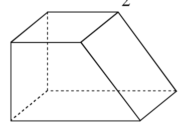
第2~3版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C **提示：**不共线三点确定一个平面，共线的三点确定无数个平面，故A错误；空间中两两相交但不经过同一点的三条直线在同一个平面内，故B错误；过直线外一点有且仅有一条直线与该直线平行，故C正确；过直线外一点有无数条直线与该直线垂直，故D错误.故选C.

2.C **提示：**对于A，由$m\parallel n$，$m\perp\alpha$，得$n\perp\alpha$，又$n\perp\beta$，所以$\alpha\parallel\beta$，故A错误；对于B，由$m\perp n$，$m\perp\alpha$，得$n\subset\alpha$或$n\parallel\alpha$，又$n\parallel\beta$，则$\alpha\parallel\beta$或α与β相交，相交也不一定垂直，故B错误；对于C，由$m\parallel n$，$n\perp\beta$，得$m\perp\beta$，又$m\parallel\alpha$，则$\alpha\perp\beta$，故C正确；对于D，由$m\perp n$，$m\parallel\alpha$，得n与α平行，相交或$n\subset\alpha$，又$n\parallel\beta$，则$\alpha\parallel\beta$或α与β相交，相交也不一定垂直，故D错误.故选C.

3.B **提示：**由三视图得该多面体是如图所示的直四棱柱，则该直四棱柱的体积$V=\frac{2+4}{2}\times2\times2=12$.故选B.



（第3题图）

4.D **提示：**由$BC\perp$平面APC，可得$BC\perp AP$，故A正确；由$AP\perp PC$，$AP\perp PB$，$PB\cap PC=P$，可得$AP\perp$平面PBC，则$AP\perp BC$，故B正确；因为$PC\perp BC$，平面$APC\perp$平面BPC，平面$APC\cap$平面$BPC=PC$，所以$BC\perp$平面APC，则$BC\perp AP$，故C正确；由$BC\perp PC$，$AB\perp BC$，可得BC为异面直线AB，PC的公垂线，所以不能得到$AP\perp BC$，故D错误.故选D.

5.B **提示：**取B_1C_1的中点F，连接EF，A_1F，ED，C_1E，因为D，E分别是AB，AC的中点，所以$DE\parallel BC\parallel B_1C_1$，$DE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}B_1C_1=B_1F$，所以四边形$B_1FED$为平行四边形，所以$B_1D\parallel EF$，所以$B_1D$与$A_1E$所成角为$\angle FEA_1$或其补角.由$AC\perp BC$，设$CA=CB=CC_1=a$，易得$A_1E=A_1F=\frac{\sqrt5a}{2}$，$FE=\sqrt{C_1E^2+C_1F^2}=\frac{\sqrt6a}{2}$，由余弦定理的推论，得$\cos\angle FEA_1=\frac{A_1E^2+FE^2-A_1F^2}{2A_1E\cdot FE}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.故选B.

6.A **提示：**对于①，因为四边形$ABCD$是边长为2的菱形，所以$AB=AD=2$，又$AA_1=1$，$\cos\angle DAA_1=\cos\angle BAA_1=\frac{1}{4}$，所以由余弦定理，得$A_1D=A_1B=\sqrt{1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{4}}=2$，$BD=2$，连接$AC$，$BD$交于点$O$，连接$A_1O$，$A_1C$，则$AC\perp BD$，$A_1O\perp BD$，因为$AC\cap A_1O=O$，所以$BD\perp$平面$ACC_1A_1$，因为$A_1C\subset$平面$ACC_1A_1$，所以$A_1C\perp DB$，故①正确；对于②，因为$AA_1=1$，$A_1O=AO=\sqrt3$，所以在$\triangle AA_1O$中，由余弦定理的推论，得$\cos\angle A_1AC=\frac{\sqrt3}{6}$，又$AC=2\sqrt3$，所以$A_1C^2=AA_1^2+AC^2-2AA_1\cdot AC\cdot\cos\angle A_1AC=11$，则$A_1C=\sqrt{11}$，故②正确；对于③，因为$AA_1^2+A_1C^2=AC^2$，所以$AA_1\perp A_1C$，因为$DD_1\parallel AA_1$，所以$DD_1\perp A_1C$，又$A_1C\perp BD$，$DD_1\cap BD=D$，所以$A_1C\perp$平面$B_1BDD_1$，故③正确；对于④，$S_{四边形ABCD}=2\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt3=2\sqrt3$，$A_1$到平面$ABCD$的距离$d=AA_1\cdot\sin\angle A_1AC=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt3}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{6}$，所以四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积$V=S_{四边形ABCD}\cdot d=2\sqrt3\times\frac{\sqrt{33}}{6}=\sqrt{11}$，故④正确.故选A.

7.D **提示：**设$AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$，由题意及长方体的结构特征可知，B_1D与平面$ABCD$所成的角为$\angle B_1DB$，B_1D与平面AA_1B_1B所成角为$\angle DB_1A$，所以$\sin30°=\frac{c}{B_1D}=\frac{b}{B_1D}=\frac{1}{2}$，则$b=c$，$B_1D=2c=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，得$a=\sqrt2c=\sqrt2b$.

对于A，$AB=\sqrt2AD$，故A错误；对于B，过B作$BE\perp AB_1$于E，易知$BE\perp$平面AB_1C_1D，所以AB与平面AB_1C_1D所成的角为$\angle BAE$，因为$\tan\angle BAE=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt2}{2}$，所以$\angle BAE\neq30°$，故B错误；对于C，因为$AC=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt3c$，$CB_1=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt2c$，所以$AC\neq CB_1$，故C错误；对于D，$B_1D$与平面$BB_1C_1C$所成角为$\angle DB_1C$，$\sin\angle DB_1C=\frac{CD}{B_1D}=\frac{a}{2c}=\frac{\sqrt2}{2}$，又$0<\angle DB_1C<90°$，所以$\angle DB_1C=45°$，故D正确.故选D.

8.B **提示：**因为$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$AC=BC=2$，所以$\triangle ABC$的外接圆的圆心为AB的中点，设为点O_1，且$AO_1=\sqrt2$，连接O_1与A_1B_1的中点E，则$O_1E\parallel AA_1$，因为$AA_1\perp$平面ABC，所以$O_1E\perp$平面ABC，设三棱锥$D-ABC$的外接球的球心为O，由球的截面性质可得，O在O_1E上，设$OO_1=x$，$DE=t(0\leqslant t\leqslant\sqrt2)$，球$O$的半径为$R$，因为$OA=OD=R$，所以$R=\sqrt{2+x^2}=\sqrt{(4-x)^2+t^2}$，所以$t^2=8x-14$，又$0\leqslant t\leqslant\sqrt2$，所以$\frac{7}{4}\leqslant x\leqslant2$，因为$R^2=2+x^2$，所以$\frac{81}{16}\leqslant R^2\leqslant6$，所以三棱锥$D-ABC$的外接球表面积的最大值为$4\pi R^2=24\pi$.故选B.

二、多项选择题

9.ACD **提示：**对于A，$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，由线面垂直的性质，得$\alpha\parallel\beta$，故A正确；对于B，$m\parallel\alpha$，$\alpha\cap\beta=n$，则m与n平行或异面，故B错误；对于C，$m\perp\alpha$，$m\parallel\beta$，由面面垂直的判定定理，得$\alpha\perp\beta$，故C正确；对于D，$m\parallel n$，$m\perp\alpha$，由线面垂直的判定定理，得$n\perp\alpha$，故D正确.故选ACD.

10.AC **提示：**因为AQ垂直于MN所在的侧面，所以$AQ\perp MN$，故A符合题意；因为MN与AQ在底面内的射影MA不垂直，所以AQ与MN不垂直，故B不符合题意；在左侧面内连接两条对角线，交点为P，因为MN垂直于AQ在左侧面内的射影AP，所以$AQ\perp MN$，故C符合题意；因为MN与AQ在左侧面内的射影MQ不垂直，所以AQ与MN不垂直，故D不符合题意.故选AC.

11.CD **提示：**设$AB=ED=2FB=2a$，因为$ED\perp$平面$ABCD$，$FB\parallel ED$，则$V_1=\frac{1}{3}\cdot ED\cdot S_{\triangle ACD}=\frac{1}{3}\cdot2a\cdot\frac{1}{2}\cdot(2a)^2=\frac{4}{3}a^3$，$V_2=\frac{1}{3}\cdot FB\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{1}{2}\cdot(2a)^2=\frac{2}{3}a^3$，连接$BD$交$AC$于点$M$，连接$EM$，$FM$，易得$BD\perp AC$，又$ED\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，则$ED\perp AC$，又$ED\cap BD=D$，$ED$，$BD\subset$平面$BDEF$，所以$AC\perp$平面$BDEF$，又$BM=DM=\frac{1}{2}BD=\sqrt2a$，过$F$作$FG\perp DE$于$G$，易得四边形$BDGF$为矩形，则$FG=BD=2\sqrt2a$，$EG=a$，$EM=\sqrt6a$，$FM=\sqrt3a$，$EF=3a$，因为$EM^2+FM^2=EF^2$，所以$EM\perp FM$，$S_{\triangle EFM}=\frac{1}{2}EM\cdot FM=\frac{3\sqrt2}{2}a^2$，$AC=2\sqrt2a$，则$V_3=V_{A-EFM}+V_{C-EFM}=\frac{1}{3}AC\cdot S_{\triangle EFM}=2a^3$，所以$2V_3=3V_1$，$V_3=3V_2$，$V_3=V_1+V_2$，故A，B错误，C，D正确.故选CD.

12.ABD **提示：**对于A，因为$AB=2$，$\angle BAD=120°$，E为边BC的中点，所以$\angle B=60°$，且$BE=1$，所以$AE\perp EC$，$AE\perp B_1E$，因为$EC\cap B_1E=E$，所以$AE\perp$平面B_1EC，又$AE\subset$平面AB_1E，所以平面$AB_1E\perp$平面B_1EC，故A正确；对于B，取AB_1的中点G'，连接$G'F$，由F为B_1D的中点，得$G'F\parallel AD$，且$G'F=\frac{1}{2}AD$，又$EC\parallel AD$，且$EC=\frac{1}{2}AD$，所以$G'F\parallel EC$，且$G'F=EC$，所以$FG'EC$为平行四边形，所以$CF\parallel EG'$，所以AB_1与CF所成的角为$\angle AG'E$(或其补角).取AB的中点G，即$\angle AG'E=\angle AGE$，由A项得$\angle AGE=\frac{2\pi}{3}$，所以$AB_1$与$CF$所在的角为$\frac{\pi}{3}$，故B正确；对于C，在翻折过程中，当$B_1E\perp$平面$ABCD$时，$V_{B_1-AED}$取得最大值，此时$V_{B_1-AED}=\frac{1}{3}\times B_1E\times S_{\triangle AED}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times\sqrt3\times2=\frac{\sqrt3}{3}$，故C错误；对于D，由B项知，$EG'=CF$，且$EG'\parallel CF$，则点$F$的轨迹与点$G$到$G'$的轨迹相同，由A项知点$B$到$B_1$的轨迹为以$E$为圆心，$BE$为半径的半圆，又$G$为$AB$中点，所以点$G$到$G'$的轨迹为以$AE$的中点为圆心，$\frac{BE}{2}$为半径的半圆，所以点$F$的轨迹长度为$\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{BE}{2}=\frac{\pi}{2}$，故D正确.故选ABD.

三、填空题

13.2 **提示：**因为$PA\perp$底面$ABCD$，$AC\subset$底面$ABCD$，所以$PA\perp AC$，设$AB=1$，由题意，得$PA=1$，$AD=\sqrt3$，$AC=2$，所以$\tan\angle APC=\frac{AC}{PA}=2$.

14.①④ **提示：**连接B_1C，则$B_1C\cap BC_1=F$，且F为B_1C的中点，因为E，F分别是AB_1，B_1C的中点，所以$EF\parallel AC$，又$BB_1\perp AC$，所以$EF\perp BB_1$，故①正确；因为$EF\parallel AC$，AC不垂直于平面BCC_1B_1，所以EF不垂直于平面BCC_1B_1，故②不正确；因为$AB_1\parallel C_1D$，$EF\parallel AC$，所以EF与C_1D所成的角是$\angle B_1AC$，易知$\triangle AB_1C$是以AC为底边的等腰三角形，所以EF与C_1D所成的角不一定为45°，故③不正确；由$EF\parallel AC$，$AC\parallel A_1C_1$，得$EF\parallel A_1C_1$，所以$EF\parallel$平面$A_1B_1C_1D_1$，故④正确.

15.4 **提示：**连接AC，A_1C_1，取AC的中点E，过点M作$MF\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，则F为A_1C_1上一点，易知$\triangle APM\cong\triangle AEM$，则$PM=EM$，对于点$M$，当$MN\perp B_1C_1$时，$MN$最小，此时由$MF\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，可知$\triangle MFN$为等腰直角三角形，则$MF=\frac{\sqrt2}{2}MN$，所以$2PM+\sqrt2MN=2\cdot\left(PM+\frac{\sqrt2}{2}MN\right)=2(EM+MF)\geqslant2EF\geqslant2AA_1=4$，当且仅当$E$，$F$，$M$三点共线，且点$F$为$A_1C_1$的中点时，等号成立，则$2PM+\sqrt2MN$的最小值为4.

16.$\frac{2\sqrt5}{5}$；$\frac{20\sqrt5}{3}\pi$ **提示：**因为$\angle DAB=\angle DAC=\frac{\pi}{2}$，所以$DA\perp AB$，$DA\perp AC$，又$AB\cap AC=A$，所以$DA\perp$平面$ABC$，由$AB=AC=AD=2$，可得$BD=CD=2\sqrt2$，$BC=2\sqrt3$，取$BC$的中点$E$，连接$AE$和$DE$，则$DE\perp BC$，且$DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt5$.设点$A$到平面$BCD$的距离为$h$，又$V_{D-ABC}=V_{A-BCD}$，即$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sin\frac{2\pi}{3}\times2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt3\times\sqrt5\cdot h$，解得$h=\frac{2\sqrt5}{5}$，即点$A$到平面$BCD$的距离为$\frac{2\sqrt5}{5}$.在$\triangle ABC$中，$BC=2\sqrt3$，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，设$\triangle ABC$外接圆的圆心为$O_1$，半径为$r$，则外接圆的直径为$2r=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=4$，可得$r=2$，即$AO_1=2$，设外接球的球心为$O$，半径为$R$，因为$AD\perp$平面$ABC$，且$AD=2$，$AO=DO=R$，所以$OO_1=\frac{1}{2}AD=1$，在Rt$\triangle AOO_1$中，$R=AO=\sqrt{AO_1^2+OO_1^2}=\sqrt5$，所以外接球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt5)^3=\frac{20\sqrt5}{3}\pi$.

四、解答题

17.**证明：**(1)连接BC_1交CB_1于点O，连接OD，因为O，D分别是BC_1，AB的中点，则OD是$\triangle ABC_1$的中位线，所以$AC_1\parallel OD$，因为$AC_1\not\subset$平面CDB_1，$OD\subset$平面CDB_1，所以$AC_1\parallel$平面CDB_1.

(2)因为$AA_1\perp$平面ABC，$CD\subset$平面ABC，所以$AA_1\perp CD$，因为$AC=BC$，D是AB中点，所以$CD\perp AB$，因为$AA_1\cap AB=A$，所以$CD\perp$平面ABB_1A_1.

18.**证明：**(1)因为$AD\parallel BC$，F为AD中点，E在BC上，所以$DF\parallel CE$，$AF\parallel BE$，因为$BE\subset$平面BCE，$AF\not\subset$平面BCE，所以$AF\parallel$平面BCE，又$CE\subset$平面BCE，$DF\not\subset$平面BCE，所以$DF\parallel$平面BCE，因为$AF\cap DF=F$，所以平面$ADF\parallel$平面BCE.

(2)在图9中，因为$AD\parallel BC$，$EF\parallel AB$，$AB\perp AD$，所以$EF\perp BC$，所以在图10中，$EF\perp CE$，$EF\perp BE$，又$CE\cap BE=E$，所以$EF\perp$平面BCE，因为$EF\parallel AB$，所以$AB\perp$平面BCE，因为$AB\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面BCE.

19.(1)**证明：**连接AB_1，AC_1，因为四边形ABB_1A_1是矩形，所以E为AB_1的中点，又F为B_1C_1的中点，所以$EF\parallel AC_1$，因为$EF\not\subset$平面ACC_1A_1，$AC_1\subset$平面ACC_1A_1，所以$EF\parallel$平面ACC_1A_1.

(2)**解：**由(1)知$EF\parallel AC_1$，所以异面直线EF与BC_1的夹角是$\angle BC_1A$(或其补角)，因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱，所以$CC_1\perp AC$，$CC_1\perp CB$，又$CA=2$，$CB=3$，$CC_1=AA_1=1$，所以$AC_1=\sqrt5$，$BC_1=\sqrt{10}$，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=120°$，由余弦定理，得$AB=\sqrt{CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos\angle ACB}=\sqrt{19}$，在$\triangle AC_1B$中，由余弦定理的推论，得$\cos\angle BC_1A=\frac{AC_1^2+BC_1^2-AB^2}{2AC_1\cdot BC_1}=-\frac{\sqrt2}{5}$，所以异面直线$EF$与$BC_1$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt2}{5}$.

20.(1)**证明：**因为$SB=SC$，M是BC的中点，所以$SM\perp BC$，因为平面$ABCD\perp$平面SBC，平面$ABCD\cap$平面$SBC=BC$，所以$SM\perp$平面$ABCD$.因为$AM\subset$平面$ABCD$，所以$SM\perp AM$.因为四边形$ABCD$是矩形，M是BC的中点，$AB=1$，$BC=2$，所以$AM^2+MD^2=AD^2$，所以$AM\perp MD$，又$SM\cap MD=M$，所以$AM\perp$平面SMD，又$SD\subset$平面SMD，所以$AM\perp SD$.

(2)**解：**由(1)知$\triangle AMS$为直角三角形，$\angle AMS=90°$，$AM=\sqrt2$，因为$SM=\frac{\sqrt6}{3}$，所以$SA=SD=\frac{2\sqrt6}{3}$，因为$AM=MD=\sqrt2$，所以$S_{\triangle AMD}=\frac{1}{2}AM\cdot MD=1$，所以$V_{S-ADM}=\frac{1}{3}\cdot SM\cdot S_{\triangle AMD}=\frac{\sqrt6}{9}$.在$\triangle ADS$中，$SA=SD=\frac{2\sqrt6}{3}$，$AD=2$，设$AD$边上的高为$h$，则$h=\sqrt{SD^2-\left(\frac{AD}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以$S_{\triangle ADS}=\frac{1}{2}h\cdot AD=\frac{\sqrt{15}}{3}$.设点$M$到平面$ADS$的距离为$d$，由$V_{S-ADM}=V_{M-ADS}$，得$V_{M-ADS}=\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle ADS}=\frac{1}{3}d\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt6}{9}$，所以$d=\frac{\sqrt{10}}{5}$，故点$M$到平面$ADS$的距离为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

21.(1)**证明：**连接BD，由题意得$AC\cap BD=H$，$BH=DH$，又$BG=PG$，所以$GH\parallel PD$，因为$GH\not\subset$平面PAD，$PD\subset$平面PAD，所以$GH\parallel$平面PAD.

(2)**证明：**取棱PC中点N，连接DN，则$DN\perp PC$，又因为平面$PAC\perp$平面PCD，平面$PAC\cap$平面$PCD=PC$，所以$DN\perp$平面PAC，又$PA\subset$平面PAC，所以$DN\perp PA$，又$PA\perp CD$，$CD\cap DN=D$，所以$PA\perp$平面PCD.

(3)**解：**连接AN，由(2)中$DN\perp$平面PAC，知$\angle DAN$是直线AD与平面PAC所成角.因为$\triangle PCD$是等边三角形，$CD=2$，且N为PC中点，所以$DN=\sqrt3$.又$DN\perp AN$，在Rt$\triangle AND$中，$\sin\angle DAN=\frac{DN}{DA}=\frac{\sqrt3}{3}$.所以直线$AD$与平面$PAC$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt3}{3}$.

22.(1)**证明：**因为$AD=CD$，E是AC的中点，所以$AC\perp DE$，因为$AD=CD$，$\angle ADB=\angle CDB$，$BD=BD$，所以$\triangle ADB\cong\triangle CDB$，所以$AB=CB$，所以$AC\perp BE$，因为$DE\cap BE=E$，$DE$，$BE\subset$平面$BED$，所以$AC\perp$平面$BED$，因为$AC\subset$平面$ACD$，所以平面$BED\perp$平面$ACD$.

(2)因为$AB=BD=BC=2$，$\angle ACB=60°$，所以$\triangle ABC$是等边三角形，$AC=2$，$AE=CE=1$，$BE=\sqrt3$，因为$AD=CD$，$AD\perp CD$，所以$\triangle ACD$是等腰直角三角形，所以$DE=1$.因为$DE^2+BE^2=BD^2$，所以$DE\perp BE$，因为$AC\cap BE=E$，AC，$BE\subset$平面ABC，所以$DE\perp$平面ABC.因为$\triangle ADB\cong\triangle CDB$，所以$\angle FBA=\angle FBC$，又因为$BF=BF$，$AB=CB$，所以$\triangle FBA\cong\triangle FBC$，所以$AF=CF$.连接$EF$，所以$EF\perp AC$，因为$S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot EF=EF$，所以当$EF$最短时，$\triangle AFC$的面积取得最小值.过点$E$作$EF\perp BD$，垂足为$F$，在Rt$\triangle BED$中，$\frac{1}{2}\cdot BE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot EF$，得$EF=\frac{\sqrt3}{2}$，所以$DF=\frac{1}{2}$，$BF=\frac{3}{2}$，所以$\frac{BF}{BD}=\frac{3}{4}$.过点$F$作$FH\perp BE$，垂足为$H$，则$FH\parallel DE$，所以$FH\perp$平面$ABC$，且$\frac{FH}{DE}=\frac{BF}{BD}=\frac{3}{4}$，所以$FH=\frac{3}{4}$，所以$V_{F-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot FH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt3\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt3}{4}$.

第16期

第2~3版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C **提示：**因为向量$\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(x,2,-6)$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以$\frac{x}{2}=\frac{2}{-1}=\frac{-6}{3}$，解得$x=-4$.故选C.

2.C **提示：**因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+2x-9=0$，解得$x=4$，所以$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{26}$.故选C.

3.B **提示：**因为$\overrightarrow{PB}=4\overrightarrow{PD}$，所以$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\frac{3}{4}\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.故选B.

4.A **提示：**因为$\boldsymbol{a}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(x,1,-2)$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，所以$x-2=-3$，解得$x=-1$，设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$，所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-3}{\sqrt2\times\sqrt6}=-\frac{\sqrt3}{2}$，$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{5\pi}{6}$.故选A.

5.D **提示：**因为$PA\perp$底面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp CD$，又底面$ABCD$是矩形，所以$AD\perp CD$，又$PA\cap AD=A$，所以$CD\perp$平面PAD，因为$PD\subset$平面PAD，则$CD\perp PD$，所以二面角$P-CD-B$的平面角为$\angle PDA$.因为$PA=AB$，$AD=\sqrt3AB$，所以在Rt$\triangle PAD$中，$\tan\angle PDA=\frac{PA}{AD}=\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt3}{3}$，所以$\angle PDA=30°$，即二面角$P-CD-B$的大小为30°.故选D.

6.A **提示：**以A为坐标原点，AB，AD，AA_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，易知$A(0,0,0)$，$E(1,1,2)$，$F(1,2,1)$，$C(2,2,0)$，所以$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{AF}=(1,2,1)$，设平面$AEF$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+y+2z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=x+2y+z=0,\end{cases}$令$y=1$，则$z=1$，$x=-3$，所以平面$AEF$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(-3,1,1)$，故点$C$到平面$AEF$的距离为$\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{4\sqrt{11}}{11}$.故选A.

7.A **提示：**因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以$PA\perp AB$，$PA\perp AD$，又$\angle BAD=90°$，即$AB\perp AD$，所以以A为坐标原点，以AD，AB，AP所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立