第8期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：根据根式的性质可知，$\sqrt{(-4)^2}=4$，$\sqrt[4]{m^4}=|m|$，$\sqrt{3^2}=3$，而$a^0=1$成立时，需$a\neq0$，故选C.

2.D

提示：原式$=[(-3)^3]^{\frac{2}{3}}\times(3^2)^{-\frac{3}{2}}=(-3)^2\times3^{-3}=9\times\frac{1}{27}=\frac{1}{3}$.故选D.

3.B

提示：因为$a^0=1$，所以$y=a^0+3=4$，所以该函数的图象恒过定点$(0,4)$.故选B.

4.A

提示：$f(x)=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$，由$f(-2)>f(-3)$，得$f(x)$是增函数，所以$\frac{1}{a}>1$，解得$0<a<1$.故选A.

5.B

提示：根据指数函数$y=a^x$的图象，当$a>1$时，函数单调递增，当$0<a<1$时，函数单调递减；当$a>1$时，a越大，函数的图象在$x>0$时越靠近y轴，则③是函数$y=3^x$的图象，④是函数$y=2^x$的图象，根据对称性，①是函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的图象，故选B.

6.A

提示：因为$a=(\sqrt{2})^3=2^{\frac{3}{2}}$，$b=2^{\sqrt{3}}$，$\frac{3}{2}<\sqrt{3}$，所以$a<b$.因为$b^{\sqrt{3}}=(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=2^3=8$，$c^{\sqrt{2}}=(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=3^2=9$，所以$b^{\sqrt{3}}<c^{\sqrt{2}}$，又$\sqrt{3}>\sqrt{2}$，所以$b<c$.所以$a<b<c$.故选A.

7.C

提示：当$a>1$时，函数$y=a^x-2$是增函数，由$-1\leqslant x\leqslant1$，得$\begin{cases}\frac{1}{a}-2=-\frac{5}{3},\\a-2=1\end{cases}\Rightarrow a=3$；当$0<a<1$时，函数$y=a^x-2$是减函数，由$-1\leqslant x\leqslant1$，得$\begin{cases}\frac{1}{a}-2=1,\\a-2=-\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$.

综上，$a=3$或$\frac{1}{3}$.故选C.

8.D

提示：因为$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，

所以$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，

则不等式$f(a^2-2a-m)+f(1-2a)<0$可化为$f(a^2-2a-m)<f(2a-1)$.(＊)

又$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，由$y=2^x$是$\mathbf{R}$上的增函数且恒大于0，可得$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，

所以(＊)式可转化为$a^2-2a-m<2a-1$，即$m>a^2-4a+1$对$a\in[-1,4]$恒成立，只需$m>(a^2-4a+1)_{max}$.

因为$a^2-4a+1=(a-2)^2-3$，当$a=-1$时，$(a^2-4a+1)_{max}=6$，所以$m>6$，结合选项可知选D.

二、多项选择题

9.CD

提示：由$2^x\leqslant4$，解得$x\leqslant2$，所以不等式$2^x\leqslant4$成立的充分不必要条件是集合$\{x|x\leqslant2\}$的真子集，故选CD.

10.BD

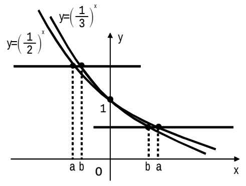
提示：对于A，原式$=a^{\frac{5}{2}+\frac{1}{3}+\frac{13}{6}}=a^5$，故A错误；对于B，原式$=a^{6\times\left(-\frac{2}{3}\right)}b^{-9\times\left(-\frac{2}{3}\right)}=a^{-4}b^6$，故B正确；对于C，原式$=-\frac{3}{5}a^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}c^{-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}=-\frac{3}{5}ac^{-2}$，故C错误；对于D，原式$=24x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=24y$，故D正确.故选BD.

11.ABD

提示：对于A，定义域为$\mathbf{R}$，值域为$(0,+\infty)$，符合要求；对于B，定义域为$\{x|x\neq1\}$，值域为$\{y|y\neq0\}$，符合要求；对于C，由$x-1>0$，得定义域为$(1,+\infty)$，由$\frac{1}{\sqrt{x-1}}>0$，得值域为$(1,+\infty)$，不符合要求；对于D，定义域为$\{x|x\neq0\}$，因为$\frac{1}{x}\neq0$，所以值域为$\{y|y>0且y\neq1\}$，符合要求.故选ABD.

12.ABD

提示：画出函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$和$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$的图象，如图所示，可知当$a,b$均为负数时，$a<b<0$；当$a,b$均为正数时，$a>b>0$；当$a=b=0$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^b=1$.故选ABD.



(第12题图)

三、填空题

13.$\frac{16}{15}$

提示：原式$=1+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}-0.1=\frac{16}{15}$.

14.$(1,2)$

提示：由已知，得$a-1\in(0,1)$，解得$a\in(1,2)$.

15.$(1,3]$

提示：根据题意，可得$a>1$且$a^0\geqslant3a-8$，解得$1<a\leqslant3$.

故实数a的取值范围是$(1,3]$.

16.$\frac{17}{12}$

提示：$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}$

$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}$，

舍去$\sqrt{2}-1$得到逼近$\sqrt{2}$的一个有理数为$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}$.

四、解答题

17.**解**：(1)由$f(x)=g(x)$，

得$2x-1=4x+1$，解得$x=-1$.

(2)由$f(x)>g(x)$，

当$0<a<1$时，可化为$2x-1<4x+1$，解得$x>-1$；

当$a>1$时，可化为$2x-1>4x+1$，解得$x<-1$.

综上，当$0<a<1$时，x的取值范围为$(-1,+\infty)$；当$a>1$时，x的取值范围为$(-\infty,-1)$.

18.**解**：(1)由$x^2-mx+1=0$，知$x\neq0$，所以$m=\frac{x^2+1}{x}=x+x^{-1}$.所以$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=m^2-2$.

(2)由(1)知$x^2+x^{-2}=m^2-2$，所以$x-x^{-1}=\pm\sqrt{(x-x^{-1})^2}=\pm\sqrt{x^2+x^{-2}-2}=\pm\sqrt{m^2-4}$.

19.**解**：(1)由$f(2)=a^2=4$，$a>0$，且$a\neq1$，解得$a=2$.

(2)设$t=2^x$，则$y=g(x)=2^{2x}-2^x-1=t^2-t-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$.因为$x\in[0,2]$，所以$t\in[1,4]$.

所以当$t=1$时，y取得最小值为-1；当$t=4$时，y取得最大值为11.故$g(x)$的值域为$[-1,11]$.

20.**解**：(1)因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，

所以$f(-x)=-f(x)$，

即$\frac{a-2^{-x}}{1+2^{-x}}=-\frac{a-2^x}{1+2^x}\Rightarrow\frac{a\cdot2^x-1}{1+2^x}=\frac{2^x-a}{1+2^x}\Rightarrow a\cdot2^x-1=2^x-a\Rightarrow a(2^x+1)=2^x+1$，所以$a=1$.

(2)$f(x)$为$\mathbf{R}$上的减函数，证明如下：

由(1)知$f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$.$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1-2^{x_1}}{1+2^{x_1}}-\frac{1-2^{x_2}}{1+2^{x_2}}$

$=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}$.

由$x_1<x_2$，得$0<2^{x_1}<2^{x_2}$，所以$2^{x_2}-2^{x_1}>0$，$1+2^{x_1}>0$，$1+2^{x_2}>0$.所以$f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$.所以$f(x)$为$\mathbf{R}$上的减函数.

(3)由(2)知，$f(x)$在$[0,2]$上是减函数，

所以$f(2)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$，即$-\frac{3}{5}\leqslant f(x)\leqslant0$.

所以$f(x)$在$[0,2]$上的值域为$\left[-\frac{3}{5},0\right]$.

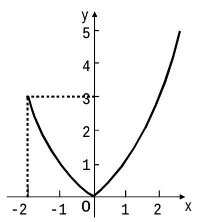
21.**解**：(1)当$x<0$时，$-x>0$，则$f(-x)=2^{-x}-1$，

又$f(x)$为偶函数，所以$f(x)=f(-x)=2^{-x}-1$.

故$f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1,x<0,\\2^x-1,x\geqslant0.\end{cases}$

(2)由(1)知$f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1,x<0,\\2^x-1,x\geqslant0,\end{cases}$

其在区间$[-2,+\infty)$上的图象如图所示.



(第21题图)

当$-2<a<0$时，$f(x)$在$[-2,a]$上单调递减，$f(x)_{max}=f(-2)=3$，$f(x)_{min}=f(a)=2^{-a}-1$；

当$0\leqslant a\leqslant2$时，$f(x)$在$[-2,0]$上单调递减，在$[0,a]$上单调递增，$f(x)_{max}=f(-2)=3$，$f(x)_{min}=f(0)=0$；

当$a>2$时，$f(x)$在$[-2,0]$上单调递减，在$[0,a]$上单调递增，$f(x)_{max}=f(a)=2^a-1$，$f(x)_{min}=f(0)=0$.

综上，当$-2<a<0$时，$f(x)$的最大值为3，最小值为$2^{-a}-1$；当$0\leqslant a\leqslant2$时，$f(x)$的最大值为3，最小值为0；当$a>2$时，$f(x)$的最大值为2^a-1，最小值为0.

22.(1)**解**：因为$f(x)$对一切$x,y\in\mathbf{R}$都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，

令$x=y=0$，得$f(0)=f(0)+f(0)$，解得$f(0)=0$.

令$y=-x$，得$f(x-x)=f(x)+f(-x)=f(0)=0$，

所以$f(-x)=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数.

(2)**证明**：令$x_2>x_1$，则$x_2-x_1>0$.

因为当$x>0$时，$f(x)<0$，所以$f(x_2-x_1)=f(x_2)+f(-x_1)<0$.

由(1)知$f(x)$是奇函数，所以$f(-x_1)=-f(x_1)$，

所以$f(x_2)-f(x_1)<0$，即$f(x_2)<f(x_1)$.

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上是减函数.

(3)**解**：关于x的不等式$f(4^x-3\cdot2^x)+f(4^x-k)\leqslant0$在$x\in[0,1]$上有解，

即$f(4^x-3\cdot2^x)\leqslant f(k-4^x)$在$x\in[0,1]$上有解.

又$f(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数，所以$4^x-3\cdot2^x\geqslant k-4^x$在$x\in[0,1]$上有解，

即$k\leqslant2\cdot4^x-3\cdot2^x$在$x\in[0,1]$上有解.

设$g(x)=2\cdot4^x-3\cdot2^x=2\left(2^x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$，

当$x\in[0,1]$时，$2^x\in[1,2]$，所以当$2^x=2$，即$x=1$时，$g(x)$取得最大值2，所以$k\leqslant2$.

故实数k的取值范围是$(-\infty,2]$.

扫码免费下载习题讲解ppt

第5期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：对于A，是两个非空数集之间的关系，且每一个变量x都有唯一的y和其相对应，故是函数关系；同理可知B，D都是函数关系；对于C，每一个x的值，对应的y值不唯一，不是函数关系.故选C.

2.B

提示：要使函数有意义，则$\begin{cases}x-3\neq0,\\x-1\geqslant0,\end{cases}$解得$x\neq3$且$x\geqslant1$.所以函数$y$的定义域为$[1,3)\cup(3,+\infty)$.故选B.

3.C

提示：对于A，函数的定义域为$\{x|x\geqslant0\}$，而$y=|x|$的定义域为$\mathbf{R}$，故二者不是同一函数；对于B，函数$y=\sqrt[3]{x^3}=x$，与$y=|x|$的对应关系不同，故二者不是同一函数；对于C，$y=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant0,\\-x,x<0,\end{cases}$二者的定义域相同，对应关系也相同，故是同一函数；对于D，函数的定义域为$\{x|x\neq0\}$，与$y=|x|$的定义域不同，二者不是同一函数.故选C.

4.C

提示：对于A，设$F(x)=f(x)+f(-x)$，可得$F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$，所以$F(x)$为偶函数，故A不符合；对于B，设$F(x)=f(|x|)$，可得$F(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=F(x)$，所以$F(x)$为偶函数，故B不符合；对于C，设$F(x)=f(x)-f(-x)$，可得$F(-x)=f(-x)-f(x)=-F(x)$，所以$F(x)$为奇函数，故C符合；对于D，设$F(x)=f(x^4)$，可得$F(-x)=f((-x)^4)=f(x^4)=F(x)$，所以$F(x)$为偶函数，故D不符合.故选C.

5.C

提示：当$x\geqslant2$时，$f(x)=x(x-2)=x^2-2x=(x-1)^2-1$，可知此时$f(x)$单调递增；当$x<2$时，$f(x)=-x(x-2)=-x^2+2x$，函数图象的对称轴为$x=1$，抛物线开口向下，可知当$1<x<2$时，$f(x)$单调递减，即$f(x)$的单调递减区间为$(1,2)$.故选C.

6.D

提示：因为$f(x)=(m-2)x^m$是幂函数，所以$m-2=1$，解得$m=3$，所以$f(x)=x^3$，可知$f(x)$在定义域$\mathbf{R}$上是增函数.

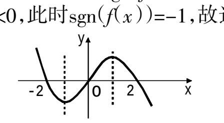
因为点$(n,8)$在$f(x)=x^3$的图象上，所以$n^3=8$，解得$n=2$.又$f(2)=8$，$f(3)=27$，所以$f(x)$在区间$[2,3]$上的值域为$[8,27]$.故选D.

7.B

提示：由题意，可设$f(x)-2x=c$，则$f(x)=2x+c$，所以$f(c)=2c+c=6$，解得$c=2$，所以$f(x)=2x+2$.所以$f(6)=14$.故选B.

8.C

提示：由符号函数的表达式可知$\mathrm{sgn}(f(x))=\begin{cases}1,f(x)>0,\\0,f(x)=0,\\-1,f(x)<0.\end{cases}$因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，所以$f(x)$的图象关于原点对称，结合当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=-x^2+2x$，画出$f(x)$的大致图象如图所示，可知当$x<-2$或$0<x<2$时，$f(x)>0$，此时$\mathrm{sgn}(f(x))=1$；当$x=-2,0,2$时，$f(x)=0$，此时$\mathrm{sgn}(f(x))=0$；当$-2<x<0$或$x>2$时，$f(x)<0$，此时$\mathrm{sgn}(f(x))=-1$，故选C.



(第8题图)

二、多项选择题

9.BC

提示：当$a\geqslant0$时，$f(a)=\frac{a}{2}+1=a$，解得$a=2$；当$a<0$时，$f(a)=\frac{2}{a}=a$，解得$a=-\sqrt{2}$，或$a=\sqrt{2}$(舍去).故选BC.

10.BC

提示：$f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}=\frac{2(x^2+1)-2}{x^2+1}=2-\frac{2}{x^2+1}$.

因为$x^2\geqslant0$，所以$x^2+1\geqslant1$，可得$0<\frac{1}{x^2+1}\leqslant1$，则$0\leqslant2-\frac{2}{x^2+1}<2$，所以$y=[f(x)]$的值域为$\{0,1\}$.故选BC.

11.ABC

提示：由已知，可得$\begin{cases}\frac{k}{2}\geqslant1,\\k-1>0,\\1-k+10\geqslant k-1,\end{cases}$

解得$2\leqslant k\leqslant6$，结合选项可知选ABC.

12.BD

提示：因为奇函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$f(3)=0$，所以$f(-x)=-f(x)$，$f(-3)=-f(3)=0$，且$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，所以$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)>0$，当$x>0$时，可得$x>3$；当$x<0$时，可得$-3<x<0$.故选BD.

三、填空题

13.4

提示：由函数的定义，集合A中的元素在集合B中都有唯一的元素与其对应，从A到B的函数情况有：(1)$f(1)=f(2)=3$；(2)$f(1)=f(2)=4$；(3)$f(1)=3$，$f(2)=4$；(4)$f(1)=4$，$f(2)=3$，共有4个.

14.0

提示：由已知，可得$f(-x)=-f(x)$，即$-ax^3+b=-ax^3-b$，则$b=-b$，得$b=0$.

15.$\frac{9}{2}$

提示：由$f(x)$的图象开口向上，对称轴为$x=1$，可知函数$f(x)$在定义域$[1,b]$上是增函数，所以$f(x)$的最小值为$f(1)=a-\frac{1}{2}=1$，最大值为$f(b)=\frac{1}{2}b^2-b+a=b$，解得$a=\frac{3}{2}$，$b=3$或$b=1$(舍去).所以$a+b=\frac{9}{2}$.

16.$f(x)=x$(答案不唯一)

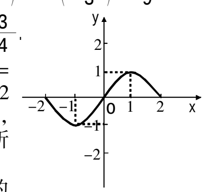
提示：由条件②知$f(x)$为奇函数，由条件③知$f(x)$为增函数，所以$f(x)=x$(答案不唯一).

四、解答题

17.**解**：(1)$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{9}$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

(2)当$-2\leqslant x<0$时，$f(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$；当$0\leqslant x\leqslant2$时，$f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$，由此可得$f(x)$的简图如图所示.



(第17题图)

(3)由简图可知$f(x)$的值域为$[-1,1]$.

(4)由简图知$f(x)$为奇函数，证明如下：

当$0<x\leqslant2$时，$-2\leqslant-x<0$，则$f(-x)=(-x)^2+2(-x)=x^2-2x=-f(x)$；

当$-2\leqslant x<0$时，$0<-x\leqslant2$，则$f(-x)=-(-x)^2+2(-x)=-x^2-2x=-f(x)$.

又$f(0)=0=-f(0)$，所以$f(x)$在定义域$[-2,2]$上是奇函数.

18.**解**：(1)要使函数有意义，则$\begin{cases}x-2\geqslant0,\\3-x\geqslant0,\end{cases}$解得$2\leqslant x\leqslant3$.所以函数$y$的定义域为$[2,3]$.

(2)要使函数有意义，则$\begin{cases}4-x^2\geqslant0,\\2x^2-3x-2\neq0,\end{cases}$

解得$-2\leqslant x<2$且$x\neq-\frac{1}{2}$.

所以函数y的定义域为$\left[-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

19.(1)**证明**：$\forall x_1,x_2\in(-\infty,0)$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\left(-\frac{3}{x_1}+1\right)-\left(-\frac{3}{x_2}+1\right)=\frac{3(x_1-x_2)}{x_1x_2}$.

由$x_1,x_2\in(-\infty,0)$，得$x_1x_2>0$；由$x_1<x_2$，得$x_1-x_2<0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$.

所以$y=f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增.

(2)**解**：因为$y=f(x)$是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数，所以$f(x)=f(-x)$.

当$x>0$时，$-x<0$，所以$f(-x)=-\frac{3}{-x}+1=\frac{3}{x}+1=f(x)$，

故当$x>0$时，$f(x)=\frac{3}{x}+1$.

20.**解**：(1)设$f(x)=kx+b(k\neq0)$，则$f(x-1)=k(x-1)+b=2x+a$，得$k=2$，$a=b-k=b-2$.所以$f(x)=2x+a+2$.

若选①：由$f(a)=5$，得$2a+a+2=5$，解得$a=1$.所以$f(x)=2x+3$.

若选②：由$f\left(\frac{1}{2}\right)=4a$，得$1+a+2=4a$，解得$a=1$.所以$f(x)=2x+3$.

若选③：由$4f(1)-2f(2)=6$，得$4(4+a)-2(6+a)=6$，解得$a=1$.所以$f(x)=2x+3$.

(2)由(1)可得$g(x)=xf(x)+\lambda f(x)+x=x(2x+3)+\lambda(2x+3)+x=2x^2+(4+2\lambda)x+3\lambda$，

则$g(x)$的图象开口向上，对称轴为$x=-\frac{2+\lambda}{2}$，

当$-\frac{2+\lambda}{2}\leqslant1$，即$\lambda\geqslant-4$时，$g(x)$在$[0,2]$上的最大值为$g(2)=16+7\lambda=2$，解得$\lambda=-2$；

当$-\frac{2+\lambda}{2}>1$，即$\lambda<-4$时，$g(x)$在$[0,2]$上的最大值为$g(0)=3\lambda=2$，解得$\lambda=\frac{2}{3}$(舍去).

综上，$\lambda=-2$.

21.**解**：(1)由图可得，当$x<0$时，$f(x)=3$；

当$0\leqslant x\leqslant4$时，设$f(x)=a(x-2)^2-1$，把点$(1,0)$代入，求得$a=1$，所以$f(x)=(x-2)^2-1$；

当$x>4$时，设$f(x)=mx+n$，把点$(4,3)$，$(5,0)$代入，得$\begin{cases}4m+n=3,\\5m+n=0,\end{cases}$解得$m=-3$，$n=15$，所以$f(x)=-3x+15$.

所以$f(x)=\begin{cases}3,x<0,\\(x-2)^2-1,0\leqslant x\leqslant4,\\-3x+15,x>4.\end{cases}$

(2)由$f(x)\leqslant\frac{1}{2}x+1$，当$x<0$时，得$3\leqslant\frac{1}{2}x+1$，

解得$x\geqslant4$，不符合要求，舍去；

当$0\leqslant x\leqslant4$时，得$(x-2)^2-1\leqslant\frac{1}{2}x+1$，

解得$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant4$；

当$x>4$时，得$-3x+15\leqslant\frac{1}{2}x+1$，

解得$x\geqslant4$，则$x>4$.

综上，原不等式的解集为$\left\{x\middle|x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$.

22.**解**：(1)因为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1,0<x<1,\\(x-1)^2,x\geqslant1,\end{cases}$

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$[1,+\infty)$上单调递增.

由$0<a<b$，且$f(a)=f(b)$，可得$0<a<1<b$，且$\frac{1}{a}-1=(b-1)^2$，故$\left(\frac{1}{a}\right)^2+(b-1)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}-1$.

令$u=\frac{1}{a}$，则$u>1$，函数$y=u^2+u-1$的图象开口向上，对称轴为$u=-\frac{1}{2}$，

所以$y=u^2+u-1$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$y>1$，即$\left(\frac{1}{a}\right)^2+(b-1)^2$的取值范围为$(1,+\infty)$.

(2)假设存在满足条件的正实数a,b且$a<b$，

当$a,b\in(0,1)$时，$f(x)=\frac{1}{x}-1$在$(0,1)$上单调递减，则$\begin{cases}f(a)=\frac{1}{a}-1=b-1,\\f(b)=\frac{1}{b}-1=a-1,\end{cases}$解得$ab=1$，与$a,b\in(0,1)$矛盾；

当$a,b\in[1,+\infty)$时，$f(x)=(x-1)^2$在$[1,+\infty)$上单调递增，则$\begin{cases}f(a)=(a-1)^2=a-1,\\f(b)=(b-1)^2=b-1,\end{cases}$解得$a=1$，或$a=2$，$b=1$，或$b=2$，又$a<b$，所以$a=1$，$b=2$；

当$a\in(0,1)$，$b\in[1,+\infty)$时，由于$a-1<0$，而$f(x)\geqslant0>a-1$，故此时不存在满足条件的实数a,b.

综上所述，存在满足条件的正实数a,b，且$a=1$，$b=2$.

第 6 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:因为$|\pm2|=2$,而$|-1|\neq2$,故选C.

2.B

提示:由表得$g(f(2))=g(4)=2$,$g(f(3))=g(2)=4$,$g(f(4))=g(5)=4$,$g(f(5))=g(2)=4$,所以$g(f(x))$的值域为$\{2,4\}$.故选B.

3.B

提示:因为$f(x)=2x+3$,所以$g(x+2)=f(x-1)=2(x-1)+3=2x+1=2(x+2)-3$,所以$g(x)=2x-3$.故选B.

4.B

提示:对于A,定义域为$\{x|x<0\}$,不关于原点对称,不具备奇偶性;对于B,定义域为$\mathbf{R}$,$f(-x)=\frac{2}{x^2+1}=f(x)$,是偶函数;对于C,函数图象不关于$y$轴对称,不是偶函数;对于D,定义域为$\mathbf{R}$,$f(-x)=|x-1|\neq f(x)$,不是偶函数.故选B.

5.C

提示:要使函数有意义,则$x^2-5x+4\geqslant0$,解得$x\leqslant1$,或$x\geqslant4$.又$y=\sqrt{t}$在定义域上是增函数,抛物线$t=x^2-5x+4$的开口向上,对称轴为$x=\frac{5}{2}$,由复合函数的单调性原则,知函数$y=\sqrt{x^2-5x+4}$的单调递增区间是$[4,+\infty)$.故选C.

6.B

提示:由幂函数$y=x^3$在$\mathbf{R}$上是增函数,可知$f(x)=-x^3+m$在$\mathbf{R}$上是减函数,所以$g(x)=f(x)+x^3+x^2-kx=x^2-kx+m$在$[-1,1]$上单调递减,则必有$x=\frac{k}{2}\geqslant1$,解得$k\geqslant2$.故选B.

7.C

提示:由题意,该学生离开家的过程中,y随着x的增大而增大;返回家的过程中,y随着x的增大而减小;最后由家乘坐出租车以更快的速度赶往学校的过程中,y随着x的增大而增大,且y增加的速度比第一次离开家增大的快,由此可知选C.

8.D

提示:由已知,当$x>0$时,$-x<0$,所以$f(-x)=(-x-1)^3=-f(x)$,所以$f(x)=(x+1)^3$.

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数.当$x\in[1,2]$时,$27f(x)=27(x+1)^3=[(3x+2)+1]^3=f(3x+2)$,

所以$f(x+m)\leqslant27f(x)$,即$f(x+m)\leqslant f(3x+2)$,所以$x+m\leqslant3x+2$,即$m\leqslant2x+2$在$x\in[1,2]$上有解.

因为当$x\in[1,2]$时,$2x+2\in[4,6]$,所以$m\leqslant6$.所以实数m的最大值是6.故选D.

二、多项选择题

9.CD

提示:对于A,$y=|x|-1=\begin{cases}-x-1,x<0,\\x-1,x\geqslant0\end{cases}$与$y=x-1$对应法则不相同,不表示同一函数,故A错误;对于B,$y=\frac{x^2-9}{x-3}$的定义域是$\{x|x\neq3\}$,$y=x+3$的定义域是$\mathbf{R}$,不表示同一函数,故B错误;对于C,$y=(\sqrt{x+2})^2=x+2(x\geqslant-2)$与$y=x+2(x\geqslant-2)$对应法则相同,定义域相同,表示同一函数,故C正确;对于D,$y=x^0=1(x\neq0)$与$y=1(x\neq0)$对应法则相同,定义域相同,表示同一函数,故D正确.故选CD.

10.AB

提示:根据题意,当$f(a)\leqslant0$时,$f(f(a))=3f(a)+5=2$,解得$f(a)=-1$,

若$a\leqslant0$,则$f(a)=3a+5=-1$,解得$a=-2$;

若$a>0$,则$f(a)=a+\frac{1}{a}=-1$,即$a^2+a+1=0$,此方程无解.

当$f(a)>0$时,$f(f(a))=f(a)+\frac{1}{f(a)}=2$,解得$f(a)=1$,

若$a\leqslant0$,则$f(a)=3a+5=1$,解得$a=-\frac{4}{3}$;

若$a>0$,则$f(a)=a+\frac{1}{a}=1$,即$a^2-a+1=0$,此方程无解.

故选AB.

11.AC

提示:由题意,对于$g(x)$,有$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant9,\\1\leqslant x^2\leqslant9,\end{cases}$解得$1\leqslant x\leqslant3$,即$g(x)$的定义域为$[1,3]$.

由$g(x)=[f(x)]^2+f(x^2)=(x+1)^2+x^2+1=2x^2+2x+2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$,可知$g(x)$在$[1,3]$上是增函数,所以$g(x)$的最小值为$g(1)=6$,最大值为$g(3)=26$.故选AC.

12.ABC

提示:$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f(0)=0$,当$x>0$时,$-x<0$,则$f(-x)=\frac{-x}{1-(-x)}=-\frac{x}{1+x}=-f(x)$,当$x<0$时,$-x>0$,则$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)}=-\frac{x}{1-x}=-f(x)$,所以$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=-f(x)$,故$f(x)$为奇函数,A正确;当$x\geqslant0$时,$f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$,此时$f(x)$单调递增,因为$f(x)$为奇函数,其图象关于原点对称,所以$f(x)$在$(-\infty,0]$上也单调递增,故$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数,B正确;当$x\geqslant0$时,$f(x)=1-\frac{1}{1+x}\in[0,1)$,则当$x\leqslant0$时,$f(x)=-f(-x)\in(-1,0]$,故$f(x)\in(-1,1)$,即$|f(x)|<1$,故C正确,D错误.故选ABC.

三、填空题

13.$x=\frac{1}{2}$

提示:结合$y=|x|$的图象,可得$f(x)$图象的对称轴方程为$x=\frac{1}{2}$.

14.2

提示:因为$f(x)$,$g(x)$分别是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数和奇函数,所以$f(1)=f(-1)$,$-g(1)=g(-1)$.

又$f(x)+g(x)=x^2-x$,所以$f(1)-g(1)=f(-1)+g(-1)=(-1)^2-(-1)=2$.

15.4

提示:因为$f(x)$是幂函数,所以$m^2-m-1=1$,解得$m=-1$或$m=2$.

当$m=-1$时,$f(x)=\frac{1}{x}$,图象不关于y轴对称,舍去;当$m=2$时,$f(x)=x^2$,图象关于y轴对称,故$f(m)=2^2=4$.

16.$(-\infty,2]$

提示:当$a-1\leqslant0$,即$a\leqslant1$时,y在$[1,+\infty)$上单调递增,则$y\geqslant1+\frac{a-1}{1}=a$,满足题设;当$a-1>0$,即$a>1$时,若$a-1\geqslant1$,即$a\geqslant2$,则$y$在$[1,\sqrt{a-1})$上单调递减,在$(\sqrt{a-1},+\infty)$上单调递增,所以当$x=\sqrt{a-1}$时,$y=2\sqrt{a-1}=a$,解得$a=2$;若$a-1<1$,即$1<a<2$,则$y$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以$y\geqslant1+\frac{a-1}{1}=a$,满足题设.综上,$a$的取值范围是$(-\infty,2]$.

四、解答题

17.**解**:(1)由已知,得$f(2)=2^\alpha=\sqrt{2}$,解得$\alpha=\frac{1}{2}$.所以$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

(2)由(1)知$f(x)$在定义域$[0,+\infty)$上单调递增,

则$f(1+a)>f(3-a)$可化为$\begin{cases}1+a\geqslant0,\\3-a\geqslant0,\\1+a>3-a,\end{cases}$

解得$1<a\leqslant3$.

所以实数a的取值范围是$(1,3]$.

18.**解**:(1)要使函数有意义,则$x^2-4\neq0$,解得$x\neq\pm2$.所以函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq\pm2\}$.

(2)函数$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减.证明如下:

$\forall x_1,x_2\in(2,+\infty)$,且$x_1<x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1^2-4}-\frac{1}{x_2^2-4}=\frac{(x_1+x_2)(x_2-x_1)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}$.

由$x_1,x_2\in(2,+\infty)$,得$x_1^2-4>0$,$x_2^2-4>0$,$x_1+x_2>0$;由$x_1<x_2$,得$x_2-x_1>0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)>0$,即$f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减.

19.**解**:(1)若函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数,

则$f(-x)=f(x)$,

即$\frac{m(-x)+1}{1+(-x)^2}=\frac{mx+1}{1+x^2}$,解得$m=0$.

所以$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减.

(2)由(1)知$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,又$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数,所以$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增.所以$f(x)$在$[-3,0]$上单调递增,在$[0,2]$上单调递减.又$f(-3)=\frac{1}{10}$,$f(0)=1$,$f(2)=\frac{1}{5}$,所以$f(x)$的最大值为1,最小值为$\frac{1}{10}$.

20.**解**:(1)由$\sqrt{x}=|x-2|$,得$x^2-5x+4=0$,解得$x=1$,或$x=4$.

所以方程$f(x)=g(x)$的解集为$\{1,4\}$.

(2)当$f(x)\geqslant g(x)$,即$\sqrt{x}\geqslant|x-2|$时,得$x^2-5x+4\leqslant0$,解得$1\leqslant x\leqslant4$;

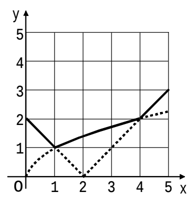
当$f(x)<g(x)$,即$\sqrt{x}<|x-2|$时,得$x^2-5x+4>0$,解得$x<1$,或$x>4$.

又$h(x)$的定义域为$[0,+\infty)$,

所以$h(x)=\begin{cases}\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant4,\\|x-2|,0\leqslant x<1,或x>4\end{cases}$

$=\begin{cases}2-x,0\leqslant x<1,\\\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant4,\\x-2,x>4.\end{cases}$

(3)$h(x)$的简图如图中实线所示,由图可知$h(x)$的单调递减区间是$[0,1]$,单调递增区间是$(1,+\infty)$,最小值为1.



(第 20 题图)

21.(1)**解**:因为对一切$m>0$,$n>0$,都有$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(m)-f(n)+2$,

令$m=n=1$,得$f(1)=f(1)-f(1)+2=2$.

(2)**证明**:设$0<x_1<x_2$,则$\frac{x_2}{x_1}>1$,所以$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)<2$,

所以$f(x_2)-f(x_1)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-2<0$,即$f(x_2)<f(x_1)$,

所以$f(x)$在定义域$(0,+\infty)$上是减函数.

(3)**解**:由$f(x-2)-f(8-2x)<-1$,得$f\left(\frac{x-2}{8-2x}\right)-2<-1$,即$f\left(\frac{x-2}{8-2x}\right)<1=f(4)$.

由(2)知$f(x)$在定义域$(0,+\infty)$上是减函数,

所以$\begin{cases}x-2>0,\\8-2x>0,\\\frac{x-2}{8-2x}>4,\end{cases}$解得$\frac{34}{9}<x<4$.

故不等式的解集为$\left\{x\middle|\frac{34}{9}<x<4\right\}$.

22.**解**:(1)由已知条件,知$f(x)$的图象开口向上,对称轴为$x=a>1$,所以$f(x)$在$[1,a]$上单调递减.

所以$f(x)$在$[1,a]$上的最大值为$f(1)=6-2a$,最小值为$f(a)=5-a^2$,所以$\begin{cases}6-2a=a,\\5-a^2=1,\end{cases}$解得$a=2$.

(2)因为$f(x)$的图象开口向上,对称轴为$x=a>1$,

所以$f(x)$在$[1,a+1]$上的最小值为$f(a)=5-a^2$.

因为$f(x)$在区间$(-\infty,2]$上单调递减,

所以$a\geqslant2$,

则$a-1\geqslant1=(a+1)-a$,

所以$f(x)$在$[1,a+1]$上的最大值为$f(1)=6-2a$.

因为$\forall x\in[1,a+1]$,总有$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant4$,所以$6-2a-(5-a^2)\leqslant4$,解得$-1\leqslant a\leqslant3$.

综上,实数a的取值范围是$[2,3]$.

第 7 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:由$x^{-\frac{2}{3}}=4$,得$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=4$,故$\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{4}$,所以$x^2=\frac{1}{64}$,得$x=\pm\frac{1}{8}$.故选A.

2.C

提示:原式$=\left[\left(m^{\frac{5}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$=\left(m^{\frac{3}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=m$.故选C.

3.C

提示:由已知,得$\frac{1}{2a-4}=\frac{1}{a}$,解得$a=4$.故选C.

4.A

提示:设$t=x^2-1$,则$y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$.因为$y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$在定义域$\mathbf{R}$上是减函数,且函数$t=x^2-1$的单调递减区间是$(-\infty,0]$,所以$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}$的单调递增区间是$(-\infty,0]$.故选A.

5.B

提示:因为$a,b\in(0,1)\cup(1,+\infty)$,且当$x<0$时,$b^x>1$,$a^x>1$,所以$0<b<1$,$0<a<1$.又当$x<0$时,$b^x<a^x$,结合指数函数的图象,可知$a<b$,即$0<a<b<1$.故选B.

6.D

提示:$f(x)=|2^x-2|=\begin{cases}2-2^x,x<1,\\2^x-2,x\geqslant1,\end{cases}$所以$f(x)$在$(-\infty,1)$内单调递减,在$[1,+\infty)$内单调递增,故选D.

7.C

提示:设该湖泊中原来的蓝藻数为a,由题意,得经过30天后的蓝藻数为$a(1+6.25\%)^{30}\approx6a\Rightarrow(1+6.25\%)^{30}\approx6$,所以经过60天后的蓝藻数量为$a(1+6.25\%)^{60}=a[(1+6.25\%)^{30}]^2\approx36a$.所以经过60天后该湖泊的蓝藻数大约为原来的36倍.故选C.

8.B

提示:由题意,得$4^x-(k+1)\cdot2^x+2>0$在$\mathbf{R}$上恒成立,即$4^x+2>(k+1)\cdot2^x$在$\mathbf{R}$上恒成立,又$2^x>0$,得$k+1<2^x+\frac{2}{2^x}$在$\mathbf{R}$上恒成立.

因为$2^x+\frac{2}{2^x}\geqslant2\sqrt{2^x\cdot\frac{2}{2^x}}=2\sqrt{2}$,当且仅当$2^x=\frac{2}{2^x}$,即$x=\frac{1}{2}$时,等号成立,

所以$k+1<2\sqrt{2}$,解得$k<2\sqrt{2}-1$.故选B.

二、多项选择题

9.AD

提示:$a^3\cdot a^4=a^{3+4}=a^7$,故A正确;$(-a^2)^3=-a^6$,故B错误;当$a\geqslant0$时,$\sqrt[8]{a^8}=a$,当$a<0$时,$\sqrt[8]{a^8}=-a$,故C错误;$\sqrt[5]{(-\pi)^5}=-\pi$,故D正确.故选AD.

10.ACD

提示:因为$y=0.09^x$是减函数,$2.2>1.8>0$,所以$0.09^{2.2}<0.09^{1.8}<1$,即$b<c<1$.又$a=2.01^{1.2}>1$,所以$b<c<a$.故选ACD.

11.AD

提示:函数$y=a^x+b-1(a>0,且a\neq1)$的图象是由函数$y=a^x(a>0,且a\neq1)$的图象向上或向下平移$|b-1|$个单位长度得到的,若$0<a<1$,则函数图象必经过第二象限,不符合题意;若$a>1$,则函数图象不经过第二象限时,需$b-1+1\leqslant0$,解得$b\leqslant0$.

故选AD.

12.AC

提示:令$1-x=0$,得$x=1$,此时$f(1)=a^0+1=2$,所以函数$f(x)$恒过定点$(1,2)$,故A正确;因为a的值不确定,所以$f(x)$的单调性无法确定,故B错误;因为$a^{1-x}>0$,所以$a^{1-x}+1>1$,即$f(x)$的值域为$(1,+\infty)$,故C正确;由指数函数的性质可知,函数$f(x)$不具有奇偶性,故D错误.故选AC.

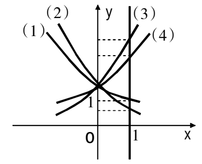
三、填空题

13.4

提示:$\sqrt[3]{x^5}\cdot x^{-1}=x^{\frac{5}{3}}\cdot x^{-1}=x^{\frac{2}{3}}=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2=2^2=4$.

14.$b<a<1<d<c$

提示:令$x=1$,如图所示,可得$b<a<1<d<c$.



(第 14 题图)

15.$-\frac{3}{2}$

提示:当$a>1$时,$f(x)$在定义域$\mathbf{R}$上是增函数,所以$\begin{cases}f(-1)=a^{-1}+b=-1,\\f(0)=1+b=0,\end{cases}$得$b=-1$,$a$无解,不符合题意,舍去;

当$0<a<1$时,$f(x)$在定义域$\mathbf{R}$上是减函数,所以$\begin{cases}f(-1)=a^{-1}+b=0,\\f(0)=1+b=-1,\end{cases}$解得$b=-2$,$a=\frac{1}{2}$.所以$a+b=-\frac{3}{2}$.

16.$(1,+\infty)$

提示:由已知,可得存在正数x使$a>x+2^x$成立.因为$y=x+2^x$为增函数,$x>0$,所以$y>1$,得$a>1$,所以a的取值范围是$(1,+\infty)$.

四、解答题

17.**解**:(1)原式

$=(0.4^3)^{-\frac{1}{3}}-1+(-2)^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}+(2^4)^{-0.75}+(0.1^2)^{\frac{1}{2}}$

$=0.4^{-1}-1+(-2)^{-4}+2^{-3}+0.1$

$=2.5-1+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+0.1=\frac{143}{80}$.

(2)原式$=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\times1+2^{\frac{3}{4}}\times2^{\frac{1}{4}}+\left(2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}\right)^6-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+2^1+2^2\times3^3-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=110$.

18.**解**:(1)因为$a>0$,且$a^{2x}=\sqrt{2}-1$,

所以$(a^x+a^{-x})(a^x-a^{-x})=a^{2x}-a^{-2x}$

$=\sqrt{2}-1-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1)=-2$.

(2)$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=\frac{\sqrt{2}-1+1}{\sqrt{2}-1-1}$

$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=-\sqrt{2}-1$.

(3)$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^xa^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-a^xa^{-x}+a^{-2x}=\sqrt{2}-1-1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=2\sqrt{2}-1$.

19.**解**:(1)当$a=1$时,$f(x)=2^{x^2+4x+2}$.

因为$x^2+4x+2=(x+2)^2-2\geqslant-2$,

所以$f(x)\geqslant2^{-2}=\frac{1}{4}$.

故$f(x)$的值域为$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

(2)令$t=ax^2+4x+2$,因为指数函数$y=2^t$在其定义域内是增函数,

所以要使$f(x)$有最大值16,则t的最大值为4,

故$a<0$,且$\frac{4a\times2-4^2}{4a}=4$,解得$a=-2$.

20.**解**:选择条件①,$f(x)=a^x+a^{-x}(a>1)$.

(1)$f(x)$是偶函数,理由如下:

$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,因为$\forall x\in\mathbf{R}$,都有$-x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$,所以$f(x)$是偶函数.

(2)$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,证明如下:

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=a^{x_1}+a^{-x_1}-(a^{x_2}+a^{-x_2})$

$=(a^{x_1}-a^{x_2})\cdot\frac{a^{x_1}\cdot a^{x_2}-1}{a^{x_1}\cdot a^{x_2}}$.

因为$a>1$,且$x_1<x_2$,所以$a^{x_1}<a^{x_2}$,即$a^{x_1}-a^{x_2}<0$.

因为$a>1$,且$x_1,x_2\in(0,+\infty)$,所以$a^{x_1}>1$,$a^{x_2}>1$,得$a^{x_1}a^{x_2}-1>0$,$a^{x_1}a^{x_2}>0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$.

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(3)实数m的取值范围是$[-5,-1]\cup[1,5]$.

选择条件②,$f(x)=a^x-a^{-x}(0<a<1)$.

(1)$f(x)$是奇函数,理由如下:

$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,因为$\forall x\in\mathbf{R}$,都有$-x\in\mathbf{R}$,且$f(-x)=a^{-x}-a^x=-f(x)$,所以$f(x)$是奇函数.

(2)$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,证明如下:

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=a^{x_1}-a^{-x_1}-(a^{x_2}-a^{-x_2})$

$=(a^{x_1}-a^{x_2})\cdot\frac{a^{x_1}\cdot a^{x_2}+1}{a^{x_1}\cdot a^{x_2}}$.

因为$0<a<1$,且$x_1<x_2$,所以$a^{x_1}>a^{x_2}$,即$a^{x_1}-a^{x_2}>0$.

又$a^{x_1}>0$,$a^{x_2}>0$,得$a^{x_1}a^{x_2}>0$,$a^{x_1}a^{x_2}+1>0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)>0$,即$f(x_1)>f(x_2)$.

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

(3)实数m的取值范围是$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

21.**解**:(1)因为$y=f(x)$是奇函数,

所以$f(-x)=-f(x)$,

即$2^{-x}+a\cdot2^x=-2^x-a\cdot2^{-x}$,即$(a+1)(2^x+2^{-x})=0$.

因为$2^x+2^{-x}>0$,所以$a+1=0$,解得$a=-1$.

(2)因为$y=f(x)$在$(-\infty,2]$上严格单调递减,

所以对$\forall x_1<x_2\leqslant2$,都有$f(x_1)-f(x_2)>0$,

即$f(x_1)-f(x_2)=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(1-\frac{a}{2^{x_1}\cdot2^{x_2}}\right)>0$恒成立.

由$2^{x_1}-2^{x_2}<0$,知$1-\frac{a}{2^{x_1}\cdot2^{x_2}}<0$恒成立,

即$2^{x_1}\cdot2^{x_2}<a$恒成立.

当$x_1<x_2\leqslant2$时,$2^{x_1}\cdot2^{x_2}<16$,所以$a\geqslant16$,即a的取值范围是$[16,+\infty)$.

22.**解**:(1)由图知$f(x)=a^x+b$是增函数且图象经过点$(0,-2)$和$(2,0)$,

所以$a>1$,且$\begin{cases}a^0+b=-2,\\a^2+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\b=-3.\end{cases}$

故$f(x)=(\sqrt{3})^x-3$.

(2)由(1)知$f(x)+3=(\sqrt{3})^x>0$对任意$x\in(-\infty,2]$恒成立,

所以由题设得不等式$c\cdot10^x+6^x>0$对任意$x\in(-\infty,2]$恒成立,

即$c>-\left(\frac{3}{5}\right)^x$对任意$x\in(-\infty,2]$恒成立.

当$x\in(-\infty,2]$时,因为函数$y=-\left(\frac{3}{5}\right)^x$单调递增,所以$y=-\left(\frac{3}{5}\right)^x$的最大值为$-\left(\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{9}{25}$,

所以$c>-\frac{9}{25}$.

故实数c的取值范围为$\left(-\frac{9}{25},+\infty\right)$.