第40期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.BDABDC　　7~12.DACCCA

二、填空题

13.40,73　　14.36

15.$\frac{3}{4}$　　16.0.001

三、解答题

17.解:(1)由频率分布直方图,得$(0.04+0.12+0.15+a+0.05)\times2=1$,解得$a=0.14$.

(2)依题意,得100名学生中参加实践活动的时间在$[6,10)$小时内的人数为$100\times(0.15+0.14)\times2=58$.

(3)由频率分布直方图,可知参加实践活动的时间在$[2,4)$内的频率为$0.04\times2=0.08$,在$[4,6)$内的频率为$0.12\times2=0.24$,在$[6,8)$内的频率为$0.15\times2=0.30$,所以中位数落在区间$[6,8)$内,中位数为$6+\frac{0.5-(0.08+0.24)}{0.15}=7.2$(小时),即这100名学生参加实践活动时间的中位数为7.2小时.这100名学生参加实践活动时间的平均数为$0.04\times2\times3+0.12\times2\times5+0.15\times2\times7+0.14\times2\times9+0.05\times2\times11=7.16$(小时).

18.解:(1)2×2列联表如下:

	天文爱好者	非天文爱好者	合计
女	20	30	50
男	35	15	50
合计	55	45	100

因为K^2的观测值为

$$k=\frac{100\times(20\times15-30\times35)^2}{50\times50\times55\times45}\approx9.091>7.879,$$

所以能在犯错误的概率不超过0.005的前提下认为“天文爱好者”或“非天文爱好者”与性别有关.

(2)抽取的5人中“天文爱好者”有$5\times\frac{20}{20+30}=2$(人),“非天文爱好者”有$5\times\frac{30}{20+30}=3$(人),所以其中至少有1人是“天文爱好者”的概率$P=1-\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{9}{10}$.

19.解:(1)甲、乙、丙三人共进行了3场比赛且丙获得冠军的情况有2种:①首先甲乙比赛,甲胜,然后甲丙比赛,丙胜,再由乙丙比赛,丙胜,概率为$P_1=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{15}$;

②首先甲乙比赛,乙胜,然后乙丙比赛,丙胜,再由甲丙比赛,丙胜,概率为$P_2=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{15}$,所以甲、乙、丙三人共进行了3场比赛且丙获得冠军的概率为$\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5}$.

(2)甲和乙先赛且甲获得冠军的情况有2种:①甲胜乙,甲胜丙,概率为$P_3=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$;②乙胜甲,丙胜乙,甲胜丙,甲胜乙,概率为$P_4=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{15}$,所以甲和乙先赛且甲获得冠军的概率为$\frac{2}{5}+\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$.

20.解:(1)该顾客实际付款金额为X元,则X的所有可能取值为0,500,700,800,所以$P(X=0)=\frac{C_1^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$,$P(X=500)=\frac{C_1^1C_2^1C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{60}$,$P(X=700)=\frac{C_1^1C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$,$P(X=800)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{10}$,

所以X的分布列为

X	0	500	700	800
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{10}$

所以$E(X)=0\times\frac{1}{120}+500\times\frac{7}{60}+700\times\frac{7}{40}+800\times\frac{7}{10}=\frac{4445}{6}$,所以顾客实际付款金额的数学期望为$\frac{4445}{6}$元.

(2)设10名顾客中享受8折优惠的人数为Y人,则$Y\sim B\left(10,\frac{7}{10}\right)$,所以$E(Y)=10\times\frac{7}{10}=7$,售货员获得的提成为Z元,则$Z=40Y+20(10-Y)=20Y+200$,故$E(Z)=20E(Y)+200=20\times7+200=340$,所以该售货员可能获得的平均提成为340元.

21.解:(1)因为$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(9+9.5+10+10.5+11)=10$,$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(11+10+8+6+5)=8$,所以$\hat{b}=\frac{392-5\times10\times8}{502.5-5\times10^2}=-3.2$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=8-(-3.2)\times10=40$,所以y关于x的线性回归方程为$\hat{y}=-3.2x+40$.

(2)当$x=8$时,$\hat{y}=-3.2\times8+40=14.4$,则$|\hat{y}-y|=|14.4-14|=0.4<0.5$,故可以认为所得到的线性回归方程是理想的.

(3)设销售利润为W,所以$W=(x-2.5)(-3.2x+40)=-3.2x^2+48x-100=-3.2(x-7.5)^2+80$,当$x=7.5$时,W取得最大值,所以该配件的销售单价应定为7.5元时,才能获得最大利润.

22.解:(1)由频率分布直方图,得$\bar{x}=17\times0.02+18\times0.09+19\times0.22+20\times0.33+21\times0.24+22\times0.08+23\times0.02=20$,所以估计50位农民的年平均收入为20千元.

(2)由题意知$X\sim N(20,1.22^2)$,(ⅰ)因为$P(X>\mu-\sigma)=\frac{1}{2}+\frac{0.6827}{2}\approx0.84135$,所以当$X\geqslant20-1.22=18.78$时,满足题意,即最低年收入标准大约为18.78千元.

(ⅱ)因为$P(X\geqslant17.56)=P(X\geqslant\mu-2\sigma)=0.5+\frac{0.9545}{2}\approx0.97725$,所以每个农民的年收入不少于17.56千元的概率为0.97725,记1000个农民的年收入不少于17.56千元的人数为ξ,则$\xi\sim B(1000,p)$,其中$p=0.97725$,所以恰好有k个农民的年收入不少于17.56千元的概率为$P(\xi=k)=C_{1000}^k\cdot p^k(1-p)^{1000-k}$,令$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=\frac{(1001-k)p}{k(1-p)}>1$,解得$k<1001p$,又$1001p=978.22725$,所以当$0\leqslant k\leqslant978$时,$P(\xi=k-1)<P(\xi=k)$,当$979\leqslant k\leqslant1000$时,$P(\xi=k-1)>P(\xi=k)$,由此可知,在所走访1000位农民中,年收入不少于17.56千元的人数最有可能是978人.

第37期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.CDCDBA　　7~12.BDBCCD

二、填空题

13.<　　14.1

15.$(-3,0)$

16.$\left[-\frac{7}{2},-2\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{7}{4}\right]$

三、解答题

17.解:(1)因为$x>0,y>0,2x+3y=10$,所以$xy=\frac{1}{6}\cdot2x\cdot3y\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当$2x=3y$,即$x=\frac{5}{2}$,$y=\frac{5}{3}$时,等号成立,所以xy的最大值为$\frac{25}{6}$.

(2)因为$x+y=2,x>y>0$,所以$(x+3y)+(x-y)=2(x+y)=4$,且$x-y>0$,所以$\frac{4}{x+3y}+\frac{1}{x-y}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{x+3y}+\frac{1}{x-y}\right)\cdot[(x+3y)+(x-y)]=\frac{1}{4}\left(5+\frac{4(x-y)}{x+3y}+\frac{x+3y}{x-y}\right)\geqslant\frac{1}{4}\times(5+2\sqrt{4})=\frac{9}{4}$,当且仅当$\frac{4(x-y)}{x+3y}=\frac{x+3y}{x-y}$,即$x=\frac{5}{3}$,$y=\frac{1}{3}$时,等号成立,所以$\frac{4}{x+3y}+\frac{1}{x-y}$的最小值为$\frac{9}{4}$.

18.解:(1)由题意,得方程$x^2-(2a+1)x+2a=0$的两根分别为$x_1=1,x_2=2$,所以$2a+1=3,2a=2$,解得$a=1$.

(2)方程$x^2-(2a+1)x+2a=0$的两根分别为$x_1=1,x_2=2a$.当$2a>1$,即$a>\frac{1}{2}$时,由$f(x)<0$,解得$1<x<2a$;当$2a=1$,即$a=\frac{1}{2}$时,不等式$f(x)<0$的解集为$\varnothing$;当$2a<1$,即$a<\frac{1}{2}$时,由$f(x)<0$,解得$2a<x<1$.

综上,当$a>\frac{1}{2}$时,不等式的解集为$\{x|1<x<2a\}$;当$a=\frac{1}{2}$时,不等式的解集为$\varnothing$;当$a<\frac{1}{2}$时,不等式的解集为$\{x|2a<x<1\}$.

19.解:(1)因为$f(x)=|3x-1|+|3x+2|=\begin{cases}-6x-1,x<-\frac{2}{3},\\3,-\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{1}{3},\\6x+1,x>\frac{1}{3},\end{cases}$所以$f(x)\geqslant5$转化为$\begin{cases}x<-\frac{2}{3},\\-6x-1\geqslant5,\end{cases}$或$\begin{cases}x>\frac{1}{3},\\6x+1\geqslant5,\end{cases}$解得$x\leqslant-1$或$x\geqslant\frac{2}{3}$.

所以原不等式的解集为$(-\infty,1]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

(2)因为$|3x-1|+|3x+2|\geqslant|3x-1-3x-2|=3$,所以$f(x)\geqslant3$.因为$f(x)+t^2-4t=0$有实数解,所以$f(x)=-t^2+4t$有实数解,所以$-t^2+4t\geqslant3$,即$t^2-4t+3\leqslant0$,解得$1\leqslant t\leqslant3$,所以实数t的取值范围为$[1,3]$.

20.解:(1)因为矩形ABCD的周长为40cm,AB=xcm,所以AD=(20-x)cm,设DP=acm,则PC=(x-a)cm,因为$\triangle ADP\cong\triangle CEP$,所以AP=PC=(x-a)cm.在Rt$\triangle ADP$中,$AD^2+DP^2=AP^2$,即$(20-x)^2+a^2=(x-a)^2$,得$a=20-\frac{200}{x}$,因为$DP>\frac{1}{3}AB$,所以$20-\frac{200}{x}>\frac{1}{3}x$,即$x^2-60x+600<0$,解得$30-10\sqrt{3}<x<30+10\sqrt{3}$.

又AB>AD,所以$x>20-x>0$,解得$10<x<20$,所以$30-10\sqrt{3}<x<20$,所以x的取值范围是$(30-10\sqrt{3},20)$.

(2)$S=\frac{1}{2}AD\cdot DP=\frac{1}{2}(20-x)\left(20-\frac{200}{x}\right)=300-10\left(x+\frac{200}{x}\right)$,$10<x<20$.因为$x>0$,所以$x+\frac{200}{x}\geqslant20\sqrt{2}$,当且仅当$x=\frac{200}{x}$,即$x=10\sqrt{2}$时,$\left(x+\frac{200}{x}\right)_{min}=20\sqrt{2}$,$S_{max}=300-200\sqrt{2}$.

所以当$x=10\sqrt{2}$时,S取得最大值$300-200\sqrt{2}$ cm².

21.解:(1)$f(x)=|3x-1|+2|x-3|=\begin{cases}5x-7,x\geqslant3,\\x+5,\frac{1}{3}<x<3,\\-5x+7,x\leqslant\frac{1}{3},\end{cases}$当$x\geqslant3$时,函数f(x)单调递增,且$f(x)\geqslant8$;当$\frac{1}{3}<x<3$时,函数f(x)单调递增,且$8>f(x)>\frac{16}{3}$;当$x\leqslant\frac{1}{3}$时,函数f(x)单调递减,且$f(x)\geqslant\frac{16}{3}$.综上,$f(x)\geqslant\frac{16}{3}$,因为关于x的方程$|3x-1|+2|x-3|=a$有两个不同的实数根,即$y=f(x)$与$y=a$的图象有两个交点,所以实数a的取值范围为$\left(\frac{16}{3},+\infty\right)$.

(2)因为$f(3)=8$,设点M(3,8),坐标原点是O(0,0),所以直线OM的斜率为$k=\frac{8}{3}$,所以当直线$y=bx$的斜率$b<-5$或$b\geqslant\frac{8}{3}$时,该直线与函数f(x)的图象相交,因为不等式$f(x)\leqslant bx$的解集非空,所以实数b的取值范围为$(-\infty,-5)\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$.

22.(1)解:$f'(x)=e^x+(x-1)e^x+2ax=xe^x+2ax$,因为x=1是函数f(x)的极值点,所以$f'(1)=0$,即$e+2a=0$,所以$a=-\frac{e}{2}$.

(2)解:由(1)知$f'(x)=xe^x+2ax=x(e^x+2a)$,当$a<0$时,令$f'(x)=0$,得x=0或$x=\ln(-2a)$.

若$-\frac{1}{2}<a<0$,则$\ln(-2a)<0$,所以当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,f(x)在$(0,+\infty)$在单调递增,当$x\in(-\infty,\ln(-2a))$时,$f'(x)>0$,f(x)在$(-\infty,\ln(-2a))$在单调递增,当$x\in(\ln(-2a),0)$时,$f'(x)<0$,f(x)在$(\ln(-2a),0)$上单调递减.

若$a<-\frac{1}{2}$,$\ln(-2a)>0$,在$(\ln(-2a),+\infty)$时,$f'(x)>0$,f(x)上单调递增,当$x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)>0$,函数f(x)在$(-\infty,0)$上单调递增,当$x\in(0,\ln(-2a))$时,$f'(x)<0$,$(0,\ln(-2a))$上单调递减.

若$a=-\frac{1}{2}$,则$\ln(-2a)=0$,所以当$x\in(-\infty,+\infty)$时,$f'(x)\geqslant0$,f(x)在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

(3)证明:当a=0时,$f(x)-g(x)=xe^x-\ln x-x-1$,设$h(x)=xe^x-\ln x-x-1$,定义域为$(0,+\infty)$,要证$f(x)-g(x)\geqslant0$,即证$h(x)\geqslant0$.因为$h'(x)=(x+1)e^x-\frac{x+1}{x}$,$h''(x)=(x+2)e^x+\frac{1}{x^2}>0$,所以函数$h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又$h'(1)=2e-2>0$,$x\to0$时,$h'(x)\to-\infty$,所以$h'(x)=0$在$(0,+\infty)$上存在唯一的实根$x_0\in(0,1)$,所以$h'(x_0)=0$,即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$,当$0<x<x_0$时,$h'(x)<0$,h(x)单调递减,当$x>x_0$时,$h'(x)>0$,h(x)单调递增,所以$h(x)_{min}=h(x_0)=x_0e^{x_0}-\ln x_0-x_0-1=1+x_0-x_0-1=0$,即$h(x)\geqslant h(x_0)=0$,所以$f(x)-g(x)\geqslant0$.

第38期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.CCDABB　　7~12.DCCDDD

二、填空题

13.$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　　14.$\sqrt{2}$

15.$(0,\sqrt{6})$　　16.90

三、解答题

17.**解**:(1)由题意,得圆$C:x^2+y^2-mx-4y-20=0$的圆心为$C\left(\frac{m}{2},2\right)$在直线$x-y+1=0$上,则$\frac{m}{2}-2+1=0$,解得$m=2$,所以圆$C:x^2+y^2-2x-4y-20=0$,所以圆C的标准方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

(2)设圆心C到直线l距离为d,由(1)得$C(1,2)$,$r=5$,则$2\sqrt{r^2-d^2}=8$,解得$d=3$.①当直线l斜率不存在时,直线l的方程为$x=4$,满足题意;②当直线l斜率存在时,设直线l的方程为$y+4=k(x-4)$,则$d=\frac{|-3k-6|}{\sqrt{k^2+1}}=3$,解得$k=-\frac{3}{4}$,所以直线l的方程为$3x+4y+4=0$.

综上,直线l的方程为$x=4$或$3x+4y+4=0$.

18.**解**:(1)因为曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\ y=2+3\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数),所以曲线C的普通方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=9$,根据$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ x^2+y^2=\rho^2,\end{cases}$所以曲线C的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta-4=0$.

(2)由题意,联立$\begin{cases}\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta-4=0,\\ \theta=\frac{3\pi}{4},\end{cases}$得$\rho^2-\sqrt{2}\rho-4=0$,设点A,B对应的极径分别为$\rho_1,\rho_2$,则$\rho_1+\rho_2=\sqrt{2}$,$\rho_1\rho_2=-4$,所以$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=3\sqrt{2}$.

19.**解**:(1)设椭圆的半焦距为$c(c>0)$.因为圆$M:x^2+y^2+4x+3=0$的圆心为$M(-2,0)$,所以椭圆的左焦点为$F_1(-2,0)$,所以$c=2$.因为$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以$a=\sqrt{5}$,又$a^2=b^2+c^2$,所以$b=1$,所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

(2)由(1)可知椭圆C的左、右焦点分别为$F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,易知直线l的斜率不为0,设直线l的方程为$x=my-2$,联立$\begin{cases}x=my-2,\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1,\end{cases}$得$(m^2+5)y^2-4my-1=0$,则$y_1+y_2=\frac{4m}{m^2+5}$,$y_1y_2=-\frac{1}{m^2+5}$,$\triangle ABF_2$的面积$S=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_2-y_1|=2|y_2-y_1|=2\sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{\frac{16m^2}{(m^2+5)^2}+\frac{4}{m^2+5}}=\frac{4\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}$.

令$t=\sqrt{m^2+1}$,则$t\in[1,+\infty)$,所以$S=\frac{4\sqrt{5}t}{t^2+4}=\frac{4\sqrt{5}}{t+\frac{4}{t}}\leqslant\sqrt{5}$,当且仅当$t=\frac{4}{t}$,即$t=2$,$m=\pm\sqrt{3}$时,S取得最大值$\sqrt{5}$,所以$\triangle ABF_2$的面积的最大值为$\sqrt{5}$.

20.**解**:(1)因为直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-1-t,\\ y=-\sqrt{3}t\end{cases}$(t为参数),所以直线l的普通方程为$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$,因为曲线C的极坐标方程为$\rho^2(1+3\sin^2\theta)=4$,根据$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ x^2+y^2=\rho^2,\end{cases}$所以曲线C的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)将直线l的普通方程$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$化为参数方程为$\begin{cases}x=-1+\frac{1}{2}m,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}m\end{cases}$(m为参数),代入曲线$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$,得$13m^2-4m-12=0$,所以$m_1+m_2=\frac{4}{13}$,$m_1m_2=-\frac{12}{13}$,

所以$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|m_1|}+\frac{1}{|m_2|}=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{|m_1m_2|}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

21.**解**:(1)根据题意,可得$\begin{cases}m^2=2p\cdot\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot|m|=\frac{p^2}{4},\end{cases}$解得$p=1$,所以抛物线C的标准方程为$y^2=2x$.

(2)显然$k\neq0$,设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}y=kx+1,\\ y^2=2x,\end{cases}$得$k^2x^2+2(k-1)x+1=0$,因为直线l与抛物线C交于M,N两点,所以$\Delta=4(k-1)^2-4k^2=4(1-2k)>0$,解得$k<\frac{1}{2}$,由韦达定理,得$x_1+x_2=\frac{2(1-k)}{k^2}$,$x_1x_2=\frac{1}{k^2}$,因为以MN为直径的圆经过点O,所以$OM\perp ON$,所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=0$,又$y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\frac{2}{k}$,所以$\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}=0$,解得$k=-\frac{1}{2}$,符合题意,所以直线l的方程为$y=-\frac{1}{2}x+1$.

22.**解**:(1)由题意,得$\frac{1}{a}=\frac{y_M}{\sqrt{2}}$,$\frac{2}{a^2}+\frac{y^2_M}{b^2}=1$,$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a^2=b^2+c^2$,联立以上等式,解得$a=2$,$b=1$,$c=\sqrt{3}$,$y_M=\frac{\sqrt{2}}{2}$.所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设直线l的方程为$x=m(y-1)+2$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}x=m(y-1)+2,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$化简得$(m^2+4)y^2+(4m-2m^2)y+m^2-4m=0$,所以$y_1+y_2=\frac{2m^2-4m}{m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{m^2-4m}{m^2+4}$,因为$A(2,0)$,则直线AM的方程为$y=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot(x-2)$,所以$P\left(x_2,\frac{y_1(x_2-2)}{x_1-2}\right)$,$Q\left(x_2,\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_1-2)}\right)$.

所以$k_{AQ}=\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{my_1(y_2-1)+my_2(y_1-1)}{2m^2(y_1-1)(y_2-1)}=\frac{2y_1y_2-(y_1+y_2)}{2m(y_1y_2-y_1-y_2+1)}=-\frac{1}{2}$.所以直线AQ的方程为$y=-\frac{1}{2}(x-2)$,则$Q\left(x_2,-\frac{1}{2}(x_2-2)\right)$,$-2\leqslant x_2<2$.所以$|AQ|=\sqrt{(x_2-2)^2+\frac{1}{4}(x_2-2)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_2-2|\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}|-2-2|=2\sqrt{5}$,当且仅当$x_2=-2$时,$|AQ|$取得最大值$2\sqrt{5}$.

第39期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.BBDDBD　　7~12.CABCDD

二、填空题

13.$\left(0,\frac{5}{2}\right)$　　14.$\frac{1}{3}$

15.$\frac{1}{4}$　　16.4

三、解答题

17.**解**:(1)因为椭圆C的长轴长为$4\sqrt{2}$,所以$2a=4\sqrt{2}$,得$a=2\sqrt{2}$.又椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(2,-\sqrt{2})$,所以$\frac{4}{8}+\frac{2}{b^2}=1$,解得$b^2=4$.所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)当直线l的斜率不存在时,直线l的方程为$x=1$,此时线段AB中点为$(1,0)$,不符合题意.

所以设直线l的方程为$y-1=k(x-1)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.联立$\begin{cases}y-1=k(x-1),\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2(k-1)^2-8=0$,则$\Delta>0$,$x_1+x_2=\frac{4k(k-1)}{1+2k^2}$,因为$P(1,1)$为线段AB中点,所以$\frac{4k(k-1)}{1+2k^2}=2$,解得$k=-\frac{1}{2}$,所以直线l的方程为$x+2y-3=0$.

18.(1)**解**:由题意,得动点P到点$T\left(0,\frac{3}{2}\right)$的距离与它到直线$l:y=-\frac{3}{2}$的距离相等.由抛物线的定义,知动点P的轨迹C的方程为$x^2=6y$.

(2)**证明**:设直线l的方程为$y=kx+\frac{3}{2}$,联立$\begin{cases}y=kx+\frac{3}{2},\\ x^2=6y,\end{cases}$得$x^2-6kx-9=0$.设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=6k$,$x_1x_2=-9$,所以$y_1+y_2=6k^2+3$,$y_1y_2=\frac{9}{4}$,所以$\frac{1}{|AT|}+\frac{1}{|BT|}=\frac{1}{y_1+\frac{3}{2}}+\frac{1}{y_2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$,所以$\frac{1}{|AT|}+\frac{1}{|BT|}$为定值.

19.**解**:(1)由题意得$2b=2\sqrt{3}$,即$b=\sqrt{3}$,由$\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_2}=0$,得AB的中点为$F_2$,则$\triangle ABF_1$的周长为$|AF_1|+|AF_2|+(|BF_1|+|BF_2|)=4a=8$,即$a=2$,则椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)显然直线l的斜率存在且不为0,设直线l的方程为$y=kx+t$,联立$\begin{cases}y=kx+t,\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$,由$\Delta=64k^2t^2-4(3+4k^2)\cdot(4t^2-12)=0$,得$t^2=4k^2+3$,则$x_M=-\frac{8kt}{2(3+4k^2)}=-\frac{4k}{t}$,由$OP\perp l$,得直线OP的方程为$y=-\frac{1}{k}x$,联立$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x,\\ y=kx+t,\end{cases}$得$x_P=-\frac{kt}{k^2+1}$,

所以$|MP|=\frac{|k|}{|t|\sqrt{1+k^2}}$,又$|OP|=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$,所以$S_{\triangle OMP}=\frac{1}{2}\cdot|MP|\cdot|OP|=\frac{1}{2}\cdot\frac{|k|}{|t|\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|k|+\frac{1}{|k|}}\leqslant\frac{1}{4}$,当且仅当$k=\pm1$时,等号成立.所以$\triangle OMP$的面积的最大值为$\frac{1}{4}$.

20.**解**:(1)由题意,知当点P在短轴端点时,$\triangle PF_1F_2$的面积最大,且为正三角形,所以$\frac{1}{2}\cdot2c\cdot b=bc=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{3}c$,联立$\begin{cases}bc=\sqrt{3},\\ b=\sqrt{3}c,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)得$F_2(1,0)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线AB的方程为$x=my+1$,联立$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,$\Delta=144(m^2+1)>0$,$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$,又$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}$,所以四边形$AMBF_1$是平行四边形,设平行四边形$AMBF_1$的面积为S,则$S=2S_{\triangle ABF_1}=2\cdot\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\frac{24\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$.设$t=\sqrt{m^2+1}$,则$m^2=t^2-1$($t\geqslant1$),所以$S=\frac{24t}{3t^2+1}=\frac{24}{3t+\frac{1}{t}}$,因为$t\geqslant1$,对勾函数$y=3t+\frac{1}{t}$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以$3t+\frac{1}{t}\geqslant4$,所以$S\in(0,6]$.所以四边形$AMBF_1$面积的取值范围为$(0,6]$.

21.**解**:(1)由题意,知$a-c=1$,$a+c=3$,解得$a=2$,$c=1$,则$b^2=a^2-c^2=3$,故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设点P,Q的坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2).①当直线PQ斜率不存在时,$k_1=-k_2$,又$k_1k_2=-\frac{1}{4}$,所以直线AP,AQ的方程分别为$y=\frac{1}{2}(x+2)$,$y=-\frac{1}{2}(x+2)$,与椭圆方程分别联立,得$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$,$Q\left(1,-\frac{3}{2}\right)$,故直线PQ的方程为$x=1$.②当直线PQ的斜率存在时,设直线PQ的方程为$y=kx+m$,联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$得$(4k^2+3)x^2+8kmx+(4m^2-12)=0$,由$\Delta=48(4k^2-m^2+3)>0$,得$4k^2+3>m^2$,由韦达定理,得$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}$,所以$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=-\frac{1}{4}$,即$4y_1y_2+(x_1+2)(x_2+2)=0$,化简得$(4k^2+1)x_1x_2+(4km+2)(x_1+x_2)+4m^2+4=0$,所以$(4k^2+1)\cdot\frac{4m^2-12}{4k^2+3}-(4km+2)\cdot\frac{8km}{4k^2+3}+4m^2+4=0$,化简得$m^2-km-2k^2=0$,解得$m=2k$,或$m=-k$.当$m=2k$时,直线PQ的方程为$y=kx+2k$,即$y=k(x+2)$,过定点$(-2,0)$不符合题意;当$m=-k$时,直线PQ的方程为$y=kx-k$,即$y=k(x-1)$,过定点$(1,0)$,

综上,直线PQ过定点$(1,0)$.

22.**解**:(1)由题意,得$F_1(-1,0)$,因为直线l的斜率为1,所以直线l的方程为$y=x+1$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}y=x+1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$3x^2+4x=0$,所以$x_1+x_2=-\frac{4}{3}$,$y_1+y_2=\frac{2}{3}$,所以$M\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$,所以直线OM的斜率为$-\frac{1}{2}$.

(2)假设存在直线l,使得$|AM|^2=|CM||DM|$成立,由题意,直线l不与x轴重合,设直线l的方程为$x=my-1$,联立$\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$(m^2+2)y^2-2my-1=0$.设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$,$y_1y_2=-\frac{1}{m^2+2}$,所以$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$.又$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=\frac{-4}{m^2+2}$,所以弦AB的中点M的坐标为$\left(\frac{-2}{m^2+2},\frac{m}{m^2+2}\right)$,故CD的方程为$y=-\frac{m}{2}x$.联立$\begin{cases}y=-\frac{m}{2}x,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$x^2=\frac{4}{m^2+2}$,由对称性,设$C(x_0,y_0)$,$D(-x_0,-y_0)$,则$x_0^2=\frac{4}{m^2+2}$,所以$|CD|=\sqrt{1+\frac{m^2}{4}}\cdot|2x_0|=2\sqrt{\frac{m^2+4}{m^2+2}}$.因为$|AM|^2=|CM||DM|=(|OC|-|OM|)(|OD|+|OM|)$,且$|OC|=|OD|$,所以$|AM|^2=|OC|^2-|OM|^2$,故$\frac{|AB|^2}{4}=\frac{|CD|^2}{4}-|OM|^2$,即$|AB|^2=|CD|^2-4|OM|^2$,将$|AB|$,$|CD|$,$|OM|$代入上式,得$\frac{8(m^2+1)^2}{(m^2+2)^2}=\frac{4(m^2+4)}{m^2+2}-4\left[\frac{4}{(m^2+2)^2}+\frac{m^2}{(m^2+2)^2}\right]$,解得$m=\pm\sqrt{2}$.所以直线l的方程为$x=\pm\sqrt{2}y-1$,即$x\pm\sqrt{2}y+1=0$.