第16期
第2~3版综合测试(八)参考答案

一、单项选择题

1.D **提示**：由$\{a_n\}$是等差数列，得$S_9=\frac{9}{2}(a_1+a_9)=\frac{9}{2}(a_4+a_6)=\frac{9}{2}\times10=45$.故选D.

2.C **提示**：因为$y=x\ln x$，所以$y'=1+\ln x$，当$x=1$时，$y'=1$，所以曲线$y=x\ln x$在$x=1$处的切线的斜率为1，故切线的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.故选C.

3.A **提示**：设点D的坐标为(x,y,z)，则$\overrightarrow{AD}=(x-1,y,z-1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$，因为$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$，

则$\begin{cases}x-1=4,\\y=4,\\z-1=2,\end{cases}$解得$x=5,y=4,z=3$，所以$D(5,4,3)$.故选A.

4.C **提示**：$A(1,3)$，$B(1,-7)$为直径两端点，则圆心的坐标为$(1,-2)$，设圆的半径为r，则$r^2=(1-1)^2+(3+2)^2=25$，故圆的方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=25$.

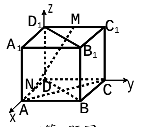
令$x=0$，则$y=-2-2\sqrt{6}$或$y=-2+2\sqrt{6}$，所以$|MN|=-2+2\sqrt{6}-(-2-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$.故选C.

5.B **提示**：抛物线$C:y^2=2px$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，由抛物线的定义以及抛物线$C:y^2=2px$上一点$(1,y_0)$到其焦点的距离为3，可得$1-\left(-\frac{p}{2}\right)=3$，解得$p=4$，所以抛物线方程为$y^2=8x$.故选B.

6.B **提示**：由$a_1>a_3$，$S_2>S_4$，可得$a_1>a_1q^2$，$a_1+a_1q>a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3$，即为$a_1(1-q^2)>0$，$a_1(1+q)<0$.若$a_1>0$，则$-1<q<1$，且$q\neq0$，又$q<-1$，可得$q\in\varnothing$；若$a_1<0$，则$q>1$或$q<-1$，又$q>-1$，可得$q>1$.综上可得，数列$\{a_n\}$单调递减.若数列$\{a_n\}$单调递减，令$a_1>0$，$0<q<1$，则$a_1>a_3$，但$S_2<S_4$，所以“数列$\{a_n\}$单调递减”是“$a_1>a_3$，$S_2>S_4$”的必要不充分条件，故选B.

7.D **提示**：不妨设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，连接AC，以D为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系$Dxyz$，则$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$N(1,0,0)$，$M(0,1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{MN}=(1,-1,-2)$，因为$DD_1\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，所以$AC\perp DD_1$，又$AC\perp BD$，$DD_1\cap BD=D$，$DD_1$，$BD\subset$平面$DBB_1D_1$，故$AC\perp$平面$DBB_1D_1$，所以$\overrightarrow{AC}$为平面$DBB_1D_1$的一个法向量，设直线MN与平面$DBB_1D_1$所成角为$\theta$，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故直线MN与平面DBB_1D_1所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选D.



(第7题图)

8.D **提示**：设焦点$F_1(0,c)$，双曲线的渐近线的方程为$y=\frac{a}{b}x$，因为$F_1P\perp OP$，所以直线F_1P的方程为$y-c=-\frac{b}{a}x$，

即$y=-\frac{b}{a}x+c$，联立$\begin{cases}y=-\frac{b}{a}x+c,\\y=\frac{a}{b}x,\end{cases}$解得$x=\frac{ab}{c}$，所以$S_{\triangle OPF_1}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{ab}{c}=\frac{ab}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故选D.

二、多项选择题

9.ABC **提示**：直线$l_1:x\sin\alpha+y=0$与直线$l_2:x+3y+c=0$，对于A，$\sin\alpha\neq\frac{1}{3}$时，直线$l_1$与直线$l_2$相交，故A正确；对于B，$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$c=0$时，直线$l_1$与直线$l_2$重合，故B正确；对于C，$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$c\neq0$时，直线$l_1$与直线$l_2$平行，故C正确；对于D，$\frac{1}{3}\sin\alpha=-1$不可能成立，所以直线$l_1$与直线$l_2$不可能垂直.故选ABC.

10.ABC **提示**：一个等比数列的前n项和、前$2n$项和、前$3n$项和分别为P，Q，R，

由等比数列的性质得S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$成等比数列，所以P，$Q-P$，$R-Q$成等比数列，

所以$(Q-P)^2=P(R-Q)$，解得$P^2+Q^2=P(Q+R)$.故选ABC.

11.BD **提示**：函数$f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}$，

因为$f(x+2\pi)=e^{\sin(x+2\pi)}-e^{\cos(x+2\pi)}=e^{\sin x}-e^{\cos x}=f(x)$，所以$2\pi$为函数$f(x)$的周期，故A错误；因为$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f(-x)=e^{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-e^{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}+e^{\sin(-x)}-e^{\cos(-x)}=e^{\cos x}-e^{-\sin x}+e^{-\sin x}-e^{\cos x}=0$，所以$f(x)$关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$对称，故B正确；因为函数$f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}$，则$f'(x)=e^{\sin x}\cos x+e^{\cos x}\sin x$，

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数，故C错误；令$f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}=0$，即$e^{\sin x}=e^{\cos x}$，即$\sin x=\cos x$，因为$x\in(0,\pi)$，所以$\tan x=1$，所以$x=\frac{\pi}{4}$，故方程在$(0,\pi)$上只有一个根，所以$f(x)$在区间$(0,\pi)$内有且只有一个零点，故D正确.故选BD.

12.CD **提示**：因为$a=2\sqrt{2}$，$b=2$，所以半焦距$c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，所以$|F_1F_2|=2c=4$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$.

设点$P(m,n)$，所以$\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|n|=3$，所以$n=\pm\frac{3}{2}$，故A错误；把点$P$坐标代入椭圆方程得$\frac{m^2}{8}+\frac{9}{4\times4}=1$，解得$m=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$，不妨设$P\left(\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{3}{2}\right)$，则$|PF_1|^2=\left(\frac{\sqrt{14}}{2}+2\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{39}{4}+2\sqrt{14}$，$|PF_2|^2=\left(\frac{\sqrt{14}}{2}-2\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{39}{4}-2\sqrt{14}$，所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2=\frac{39}{4}\times2-16=\frac{7}{2}>0$，所以$\angle F_1PF_2<\frac{\pi}{2}$，故B错误；由椭圆的定义可知，$\triangle PF_1F_2$的周长为$2a+2c=4\sqrt{2}+4=4(\sqrt{2}+1)$，故C正确；设$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径为$r$，则$\frac{1}{2}r\cdot(4\sqrt{2}+4)=3$，所以$r=\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$，故D正确.故选CD.

三、填空题

13.$\left(0,1,\frac{9}{2}\right)$ **提示**：因为向量$\overrightarrow{OA}=(1,0,3)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2,6)$，其中$O$为坐标原点，则$A(1,0,3)$，$B(-1,2,6)$，又点$C$为线段$AB$的中点，由中点坐标公式可得，点$C$的坐标为$\left(0,1,\frac{9}{2}\right)$.

14.$\sqrt{3}$ **提示**：双曲线$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的渐近线方程为$y=\pm bx$，即$bx\pm y=0$，由对称性不妨取渐近线方程为$bx+y=0$，则$(2,0)$到直线$bx+y=0$的距离等于$\sqrt{3}$，所以$\frac{|2b|}{\sqrt{b^2+1}}=\sqrt{3}$，又$b>0$，解得$b=\sqrt{3}$.

15.$-\frac{1}{506}$ **提示**：由等差数列$\{a_n\}$满足$a_3a_4+2a_4a_6+a_5a_{12}=2024d$，可得$a_4(a_4-d)+2a_4(a_4+2d)+(a_4+d)(a_4+8d)=2024d$，即$4a_4^2+12a_4d+8d^2=2024d$，所以$4(a_4+2d)(a_4+d)=2024d$，即$4a_6a_5=2024d$，故$a_6a_5=506d$，所以$\frac{1}{a_6}-\frac{1}{a_5}=\frac{a_5-a_6}{a_6a_5}=\frac{-d}{506d}=-\frac{1}{506}$.

16.$[1,+\infty)$ **提示**：因为$f(x)=xe^x-\ln x-x(x>0)$，所以$f'(x)=e^x+xe^x-\frac{1}{x}-1=(x+1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$，

令$f'(x)=0$，得$e^x=\frac{1}{x}$，设$e^{x_1}=\frac{1}{x_1}$，$x_1\in(0,1)$，所以$x_1e^{x_1}=1$，即$\ln x_1+x_1=0$，

因为函数$y=e^x-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以当$x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(x_1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以$[f(x)]_{\min}=f(x_1)=x_1e^{x_1}-\ln x_1-x_1=x_1e^{x_1}-(\ln x_1+x_1)=1-0=1$，所以$a\geqslant1$，即实数$a$的取值范围是$[1,+\infty)$.

四、解答题

17.**解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$a_3+a_5=2a_4=2(a_1+3d)=-20$，又$a_1=-16$，得$2(-16+3d)=-20$，解得$d=2$，所以$a_n=-16+2(n-1)=2n-18$.

(2)由(1)可知$S_n=\frac{n}{2}(-16+2n-18)=n^2-17n$，由于$n\in\mathbf{N}_+$，根据二次函数的性质可知当$n=8$或9时，$S_n$取得最小值，所以$S_n$取最小值时的项数为8或9.

18.**解**：(1)由$\triangle ABC$的三个顶点都在第一象限内，$A(1,1)$，$B(5,1)$，$\angle A=45°$，$\angle B=45°$，

所以C的横坐标为AB中点的横坐标，

设AB的中点为$D(3,1)$，则$|CD|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\times4=2$，得$C(3,3)$，所以直线$AC$的斜率为$k_{AC}=\frac{3-1}{3-1}=1$，直线$BC$的斜率$k_{BC}=\frac{3-1}{3-5}=-1$，所以直线$AC$的方程为$y-1=x-1$，即$y=x$，直线$BC$的方程为$y-1=-(x-5)$，即$x+y-6=0$.

(2)由(1)可得$|AC|=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$，所以以线段$AC$为直径的圆的半径$r=\frac{|AC|}{2}=\sqrt{2}$，

又AC的中点坐标为$(2,2)$，所以以线段AC为直径的圆的标准方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

19.**解**：(1)因为$\frac{a_3+3}{a_2+3}=\frac{24+3}{6+3}=3$，所以数列$\{a_n+3\}$的公比为3，

所以$a_n+3=(a_2+3)\cdot3^{n-2}=9\cdot3^{n-2}=3^n$，故$a_n=3^n-3$.

(2)因为$3(b_{n+1}-b_n)=a_n$，所以$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}(3^n-3)=3^{n-1}-1$，所以$b_2-b_1=3^0-1$，$b_3-b_2=3^1-1$，…，$b_n-b_{n-1}=3^{n-2}-1$，以上各式累加，得$b_n-b_1=(3^0+3^1+\cdots+3^{n-2})-(n-1)=\frac{1-3^{n-1}}{1-3}-(n-1)=\frac{3^{n-1}}{2}-n+\frac{1}{2}$，又$b_1=\frac{1}{2}$，所以$b_n=\frac{3^{n-1}}{2}-n+1$.

20.**解**：(1)如图所示，以B为坐标原点，以BC，BA，BP所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，则$A(0,2,0)$，$B(0,0,0)$，$D(t,2,0)$，$P(0,0,2)$.

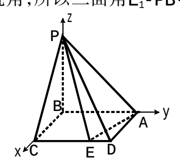
设$E(t,x,0)(0\leqslant x\leqslant2)$，所以$\overrightarrow{PE}=(t,x,-2)$，$\overrightarrow{EA}=(-t,2-x,0)$，因为$\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{EA}$，

所以$-t^2+x(2-x)=0$，所以$t^2=x(2-x)=-(x-1)^2+1$，又$x\in[0,2]$，所以$0\leqslant t^2\leqslant1$，所以在所给的数据中，t可以取①②③.

(2)由(1)知$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时，$x=\frac{1}{2}$或$x=\frac{3}{2}$，即满足条件的点E有两个.

根据题意得，其坐标为$E_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$和$E_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，

因为$PB\perp$底面$ABCD$，所以$PB\perp BE_1$，$PB\perp BE_2$，所以$\angle E_1BE_2$是二面角E_1-PB-E_2的平面角，由$\cos\langle\overrightarrow{BE_1},\overrightarrow{BE_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{BE_2}}{|\overrightarrow{BE_1}||\overrightarrow{BE_2}|}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{1\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由题意得，二面角$E_1-PB-E_2$为锐角，所以二面角$E_1-PB-E_2$的大小为30°.



(第20题图)

21.**解**：(1)因为动点$P(x,y)$到点$F(1,0)$与到直线$x=-1$的距离相等，所以可得P的轨迹为抛物线，且焦点在x轴上，$\frac{p}{2}=1$，所以$p=2$，所以点P的轨迹L的方程为$y^2=4x$.

(2)由(1)可得$x_0=\frac{y_0^2}{4}$，设直线MA的方程为$y=k\left(x-\frac{y_0^2}{4}\right)+y_0(k>0)$，由$\begin{cases}y=k\left(x-\frac{y_0^2}{4}\right)+y_0,\\y^2=4x,\end{cases}$整理得，$ky^2-4y-ky_0^2+4y_0=0$，设$A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$，易知$y_0$，$y_1$为该方程的两根，故有$y_0+y_1=\frac{4}{k}$，可得$y_1=\frac{4}{k}-y_0$，从而得$|MA|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}\cdot|y_1-y_0|=2\sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}\left(\frac{2}{k}-y_0\right)$.同理，设直线$MB$的方程为$y=\left(-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(x-\frac{y_0^2}{4}\right)+y_0(k>0)$，可得$|MB|=2\sqrt{1+k^2}(2k+y_0)$，由$|MA|=|MB|$，得$\frac{1}{k^2}(2-ky_0)=y_0+2k$.

(i)解得$y_0=\frac{2(1-k^3)}{k^2+k}$.

(ii)因为$|MA|=|MB|=2\sqrt{1+k^2}\times(y_0+2k)=4\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{1+k^2}{k(1+k)}$，$k>0$，所以$|MA|=4\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{1+k^2}{k(1+k)}\geqslant\frac{4\sqrt{\frac{(1+k)^2}{2}}}{k(1+k)}\cdot2k=4\sqrt{2}$，当且仅当$k=1$时，等号成立.

所以$S=\frac{1}{2}|MA|^2\geqslant16$，

所以$\triangle MAB$面积S的最小值为16.

22.**解**：(1)$f(x)=\frac{1}{x}-x+3\ln x(x>0)$，所以$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{3}{x}=-\frac{x^2-3x+1}{x^2}$，

令$f'(x)>0$，得$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$；令$f'(x)<0$，得$0<x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$或$x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，

所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$，单调递减区间为$\left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$，$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

(2)结论：$f(x_1)+f(x_2)\geqslant-\frac{1}{2}(a-2)^2$.证明如下：

$f(x_1)+f(x_2)=\left(\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1\right)+\left(\frac{1}{x_2}-x_2+a\ln x_2\right)=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)=\frac{2}{x_1x_2}-2+a\ln(x_1x_2)$.

设$t=x_1x_2$，由x_1，x_2均为正数，得$x_1x_2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=1$，即$0<t\leqslant1$，设$g(t)=\frac{2}{t}-2+a\ln t(0<t\leqslant1)$，则$g'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{a}{t}=\frac{at-2}{t^2}$.

①当$a\leqslant2$时，由$0<t\leqslant1$，得$at-2\leqslant0$，即$g'(t)\leqslant0$，所以$g(t)$单调递减，

所以$g(t)\geqslant g(1)=0$，又因为$-\frac{1}{2}(a-2)^2\leqslant0$，

所以$f(x_1)+f(x_2)\geqslant-\frac{1}{2}(a-2)^2$；

②当$a>2$时，$g(t)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{2}{a},1\right)$上单调递增，所以$g(t)$的最小值为$g\left(\frac{2}{a}\right)=a-2+a\ln\frac{2}{a}$，此时只需证$a-2+a\ln\frac{2}{a}\geqslant-\frac{1}{2}(a-2)^2$，化简后即证$\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2}a-1\geqslant0$.

设$h(a)=\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2}a-1(a>2)$，$h'(a)=\frac{a-2}{2a}>0$，所以$h(a)$单调递增，所以$h(a)>h(2)=0$，即证得$\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2}a-1\geqslant0$.

综上所述，不等式得证.

扫码免费下载习题讲解ppt

第13期
第2~3版综合测试(五)参考答案

一、单项选择题

1.A **提示**：抛物线的标准方程为$x^2=\frac{1}{2}y$，所以$2p=\frac{1}{2}$，$\frac{p}{2}=\frac{1}{8}$，所以抛物线的焦点坐标为$\left(0,\frac{1}{8}\right)$，故选A.

2.C **提示**：因为两直线l_1与l_2平行，所以$\frac{1}{1}=\frac{n}{-2}$，解得$n=-2$，又$d=\frac{|m+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，而$m>0$，所以$m=2$，所以$m+n=0$，故选C.

3.A **提示**：由已知得$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，$\overrightarrow{AO}=(1,-2)$，因为$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AO}=8$，所以$x-2y=8$，即点$P$的轨迹方程为$x-2y-8=0$，故选A.

4.B **提示**：$h'(x)=2+\frac{k}{x^2}=\frac{2x^2+k}{x^2}$.因为$h(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数，所以$h'(x)\geqslant0$，即$\frac{2x^2+k}{x^2}\geqslant0$对$x\in[1,+\infty)$恒成立，所以$k\geqslant-2x^2$对$x\in[1,+\infty)$恒成立，则$k\geqslant-2$，即$k\in[-2,+\infty)$，故选B.

5.A **提示**：冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气日影长构成等差数列$\{a_n\}$，设其公差为d，则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=28.5,\\a_{10}+a_{11}+a_{12}=1.5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=10.5,\\d=-1,\end{cases}$所以$a_n=a_1+(n-1)d=11.5-n$，所以$a_7=11.5-7=4.5$，即所求的日影长为4.5尺，故选A.

6.B **提示**：因为OP是$\triangle PF_1F_2$边F_1F_2的中线，所以$\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}$，则$2|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=4|\overrightarrow{PO}|$，因为$2|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|\leqslant|\overrightarrow{F_1F_2}|$，所以$4|\overrightarrow{PO}|\leqslant2c$.又$|\overrightarrow{PO}|\geqslant a$，所以$4a\leqslant2c$，所以$\frac{c}{a}\geqslant2$，即此双曲线的离心率$e$的取值范围是$[2,+\infty)$，故选B.

7.B **提示**：以A为原点，直线AB，AD，AA_1为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，不妨设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，则$A_1(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$E\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，所以$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$.设$A_1B$与$DE$所成的角为$\theta$，则$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{DE}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，故$A_1B$与$DE$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{6}$，故选B.

8.C **提示**：令$c_n=a_n-b_n$，则$c_1=a_1-b_1=2-0.2=1.8$，$c_{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{3}b_{n+1}+\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{4}a_n-\frac{3}{4}b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{4}b_n\right)+\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{4}a_n-\frac{3}{4}b_n=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}c_n$，所以数列$\{c_n\}$是首项为1.8，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，所以$c_n=1.8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.由$a_n-b_n<0.01$，即$1.8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<0.01$，整理得$2^{n-1}>180(n\in\mathbf{N}_+)$.由$2^7=128$，$2^8=256$，所以$n-1\geqslant8$，即$n\geqslant9$，所以使$a_n-b_n<0.01$成立的最小正整数$n=9$.故选C.

二、多项选择题

9.ABC **提示**：化圆的方程为标准方程，得$(x-2)^2+y^2=5$，所以圆心为$(2,0)$，半径为$\sqrt{5}$.对于A，圆是关于圆心对称的中心对称图形，而点$(2,0)$是圆心，故A正确；对于B，圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形，直线$y=0$过圆心，故B正确；对于C，圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形，直线$x+3y-2=0$过圆心，故C正确；对于D，圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形，而直线$x-y+2=0$不过圆心，故D错误.故选ABC.

10.CD **提示**：对于A，$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$，不存在实数$\lambda$，使得$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$不是共线向量，故A错误；

对于B，因为$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，所以与$\overrightarrow{AB}$共线的单位向量为$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$或$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$，故B错误；

对于C，因为向量$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$，所以$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$，故C正确；

对于D，设平面ABC的法向量是$n=(x,y,z)$，因为$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$，所以$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\n\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x+y=0,\\-x+2y+z=0,\end{cases}$令$x=1$，则$y=-2$，$z=5$，所以$n=(1,-2,5)$，故D正确.故选CD.

11.BC **提示**：由图1(3)知$a_3=7$，对于A，$a_3=2^{3-1}=4\neq7$，所以A错误；由图1(2)比图1(1)多出2个“树枝”，图1(3)比图1(2)多出4个“树枝”，图1(4)比图1(3)多出8个“树枝”，…，可得$a_{n+1}-a_n=2^n$，即$a_{n+1}=a_n+2^n$，所以B正确；由$a_{n+1}-a_n=2^n$，可得$a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，则$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$，所以$S_n=2a_n-n$，所以C正确；由$a_n=2^n-1$，可得$a_1+a_3+a_5+\cdots a_{2n-1}=\frac{2(1-4^n)}{1-4}-n=\frac{2}{3}\cdot4^n-n-\frac{2}{3}$，又$2a_{2n}-n+1=2\cdot(2^{2n}-1)-n+1=2^{2n+1}-n-1$，所以D错误.故选BC.

12.AD **提示**：因为椭圆C的长轴长与圆E的直径长相等，所以$2a=4$，即$a=2$，设椭圆的左焦点为$F'(-c,0)$，由椭圆的定义可知$|PF'|+|PF|=2a=4$，所以$|PQ|-|PF|=|PQ|-(4-|PF'|)=|PQ|+|PF'|-4\geqslant|QF'|-4\geqslant|EF'|-2-4=2\sqrt{5}-6$，所以$|EF'|=2\sqrt{5}=\sqrt{(c-3)^2+(4-0)^2}$，解得$c=1$或$c=5$(舍去).

对于A，因为$c=1$，所以椭圆C的焦距为$2c=2$，故A正确；

对于B，由$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，所以椭圆C的短轴长为$2\sqrt{3}$，故B错误；

对于C，$|PQ|+|PF|\geqslant|QF|\geqslant|EF|-|EQ|=\sqrt{(1+3)^2+(0-4)^2}-2=4\sqrt{2}-2$，故C错误；

对于D，若过点F的直线的斜率不存在，则直线方程为$x=1$，圆心$(-3,4)$到直线$x=1$的距离为4，不合题意.设过点F的切线方程为$y=k(x-1)$，即$kx-y-k=0$，则$\frac{|-3k-k-4|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{4|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得$k=\frac{-4\pm\sqrt{7}}{3}$，故D正确.故选AD.

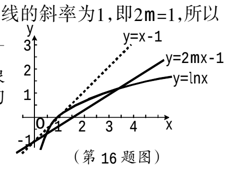
三、填空题

13.$x-4y+5=0$ **提示**：因为所求直线与直线$4x+y-2=0$垂直，所以所求直线的斜率为$\frac{1}{4}$.又所求直线过点$A(3,2)$，所以所求直线方程为$y-2=\frac{1}{4}(x-3)$，即$x-4y+5=0$.

14.$\left(5,\frac{1}{2},0\right)$ **提示**：设$P(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AP}=(x-2,y+1,z-2)$，$\overrightarrow{AB}=(2,6,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,3,1)$，因为$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$，所以$(x-2,y+1,z-2)=\frac{1}{2}(6,3,-4)=\left(3,\frac{3}{2},-2\right)$，所以点$P$的坐标为$\left(5,\frac{1}{2},0\right)$.

15.4 **提示**：由题得$S_n+2=a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，所以$S_{n+1}=2S_n+2$，所以$S_{n+1}+2=2(S_n+2)$，所以$\{S_n+2\}$是等比数列且公比$q=2$.又$S_1+2=a_1+2=2$，所以$S_n+2=2^n$，所以$S_n=2^n-2$，所以当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$，则有$\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}=\frac{1}{8}$.又因为$\frac{S_{n+1}}{S_{2n}}<\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}$，所以$\frac{2^{n+1}-2}{2^{2n}-2}<\frac{1}{8}$，化简得$2^{2n}-16\cdot2^n+14>0$，解得$2^n>8+5\sqrt{2}$或$2^n<8-5\sqrt{2}$.因为$n\in\mathbf{N}_+$，所以$2^n>8+5\sqrt{2}$，则$n_{\min}=4$.

16.$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ **提示**：由题意，$f'(x)=\ln x+1-2mx$.令$f'(x)=\ln x-2mx+1=0$，得$\ln x=2mx-1$，函数$f(x)=x\ln x-mx^2$有两个极值点，等价于$f'(x)=\ln x-2mx+1$有两个零点，等价于函数$y=\ln x$与$y=2mx-1$的图象有两个交点，又直线$y=2mx-1$过定点$(0,-1)$，当直线$y=2mx-1$与$y=\ln x$的图象相切时，设切点为$(x_0,\ln x_0)$，$y'=\frac{1}{x}$，则切线的斜率为$\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，将点$(0,-1)$代入得$-1-\ln x_0=-1$，解得$x_0=1$，即切线的斜率为1，即$2m=1$，所以$m=\frac{1}{2}$.由图可知，当$0<m<\frac{1}{2}$时，$y=\ln x$与$y=2mx-1$的图象有两个交点，所以实数m的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.



(第16题图)

四、解答题

17.**解**：(1)因为$f'(x)=xe^x$，所以$f'(0)=0$，又$f(0)=-1$，故曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=-1$.

(2)由$f'(x)=0$，得$x=0$，由$f'(x)>0$，得$x>0$；

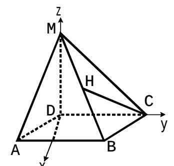
由$f'(x)<0$，得$x<0$.所以当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$单调递增，当$x\in(-\infty,0)$时，$f(x)$单调递减.

故$f(x)$的极小值为$f(0)=-1$，无极大值.

18.**解**：若选①：因为$MD\perp$平面$ABCD$，所以$AD\perp MD$，$CD\perp MD$，

所以$\angle ADC$就是二面角$A-MD-C$的平面角，所以$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$.

以D为坐标原点，以DC，DM所在直线为y轴，z轴，建立如图1所示的空间直角坐标系，

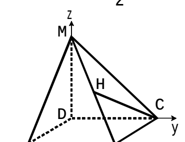


(第18题图1)

则$C(0,1,0)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$M(0,0,1)$，$H\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{CH}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$.取平面$MCD$的一个法向量$n=(1,0,0)$.设$CH$与平面$MCD$所成角为$\theta$，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CH},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CH}\cdot n|}{|\overrightarrow{CH}|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以$CH$与平面$MCD$所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

若选②：因为$MD\perp$平面$ABCD$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，所以DA，DC，DM两两垂直.

以D为坐标原点，以DA，DC，DM所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图2所示的空间直角坐标系，



(第18题图2)

则$C(0,1,0)$，$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{CH}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.取平面$MCD$的一个法向量$n=(1,0,0)$，

设CH与平面MCD所成角为θ，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CH},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CH}\cdot n|}{|\overrightarrow{CH}|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$CH$与平面$MCD$所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19.(1)**证明**：因为圆$C:x^2+(y-4)^2=4$，所以圆心$C(0,4)$，半径$r=2$.因为直线$l:(3m+1)x+(1-m)y-4=0$，整理得$(3x-y)m+(x+y-4)=0$，

由$\begin{cases}3x-y=0,\\x+y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$所以直线$l$过定点$M(1,3)$，所以$|CM|=\sqrt{(1-0)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}<2=r$，

所以定点$M(1,3)$在圆C内，所以直线l与圆C相交.

(2)**解**：因为直线l被圆C所截得的弦长为$2\sqrt{3}$，所以圆心$C(0,4)$到直线l的距离

$d=\sqrt{r^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2^2-3}=1$.

因为直线$l:(3m+1)x+(1-m)y-4=0$，所以$d=\frac{|(1-m)\times4-4|}{\sqrt{(3m+1)^2+(1-m)^2}}=\frac{|-4m|}{\sqrt{(3m+1)^2+(1-m)^2}}=1$，解得$m=-\frac{1}{3}$或$m=1$.将$m=-\frac{1}{3}$或$m=1$分别代入直线$l:(3m+1)x+(1-m)y-4=0$，所以直线$l$的方程为$x=1$或$y=3$.

20.**解**：(1)由$a_2+a_8=10$，得$a_5=5$.设数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_5-a_1=4=4d$，所以$d=1$，故$a_n=n$.

(2)由(1)得$c_n=\frac{1}{n(n+1)}+2^n$，所以$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]+(2^1+2^2+\cdots+2^n)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-1-\frac{1}{n+1}=2^{n+1}-\frac{n+2}{n+1}$.

21.**解**：(1)由点F在直线l上，得$|FA|=|FB|$，由抛物线的定义可知A，B两点到抛物线的准线的距离相等.因为抛物线的准线与x轴平行，所以$y_1=y_2$，即$x_1^2=x_2^2$，而$x_1\neq x_2$，所以$x_1=-x_2$，即$x_1+x_2=0$.

(2)设l在y轴上的截距为b，依题意，设l的方程为$y=x+b$，则直线AB的方程可设为$y=-x+m$，

由$\begin{cases}y=4x^2,\\y=-x+m,\end{cases}$整理得$4x^2+x-m=0$，所以$x_1+x_2=-\frac{1}{4}$.因为$A$，$B$为抛物线上不同的两点，所以$\Delta=1+16m>0$，即$m>-\frac{1}{16}$.设$AB$的中点N的坐标为$(x_0,y_0)$，则$x_0=-\frac{1}{8}$，$y_0=-x_0+m=\frac{1}{8}+m$.又点N在直线$l$上，所以$\frac{1}{8}+m=-\frac{1}{8}+b$，于是$b=\frac{1}{4}+m$.因为$m>-\frac{1}{16}$，所以$b>\frac{3}{16}$，所以$l$在y轴上的截距的取值范围为$\left(\frac{3}{16},+\infty\right)$.

22.(1)**解**：$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{t}{x^2}=\frac{x-t}{x^2}(x>0)$.

当$t\leqslant0$时，$f'(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$t>0$时，令$f'(x)>0$，得$x>t$；令$f'(x)<0$，得$0<x<t$，所以$f(x)$在$(0,t)$上单调递减，在$(t,+\infty)$上单调递增.

(2)**证明**：当$t=1$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$f(1)=1-s<0$，解得$s>1$.

由$\ln x_1+\frac{1}{x_1}-s=\ln x_2+\frac{1}{x_2}-s$，得$\ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{x_1}$，

令$m=\frac{x_1}{x_2}(0<m<1)$，则$\ln m=\frac{m-1}{x_1}$，$x_1=\frac{m-1}{\ln m}$，所以$x_1+x_2=x_1\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)=\frac{m-1}{\ln m}\left(1+\frac{1}{m}\right)=\frac{m^2-1}{m\ln m}$，所以$x_1+x_2-2=\frac{m^2-1}{m\ln m}-2=\frac{m^2-1-2m\ln m}{m\ln m}=\frac{m-\frac{1}{m}-2\ln m}{\ln m}$.令$g(m)=m-\frac{1}{m}-2\ln m$，则$g'(m)=1+\frac{1}{m^2}-\frac{2}{m}=\frac{m^2-2m+1}{m^2}=\frac{(m-1)^2}{m^2}$，当$0<m<1$时，$g'(m)>0$，所以$g(m)$单调递增，$g(m)<g(1)=0$，

又当$0<m<1$时，$\ln m<0$，所以$x_1+x_2-2>0$，即$x_1+x_2>2$.

④

第 14 期

第 2~3 版综合测试(六)参考答案

一、单项选择题

1.B 提示:由双曲线方程可知$a^2=3$,$b^2=2$,所以渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$,故选B.

2.C 提示:直线$x-y+2=0$交x轴于点$(-2,0)$,且斜率为1,故所求直线的方程为$y=-(x+2)$,即$x+y+2=0$,故选C.

3.D 提示:因为等差数列$\{a_n\}$中,$a_{11}+7=2a_{12}$,所以$a_1+10d+7=2(a_1+11d)$,即$a_1+12d=7$,即$a_{13}=7$,所以$S_{25}=\frac{25(a_1+a_{25})}{2}=25a_{13}=25\times7=175$,故选D.

4.C 提示:设$P(x,y)$,$R(x_1,y_1)$,因为$A(1,0)$,P是RA的中点,所以$\begin{cases}x=\frac{x_1+1}{2},\\ y=\frac{y_1}{2},\end{cases}$则$\begin{cases}x_1=2x-1,\\ y_1=2y,\end{cases}$因为点$R$是直线$l$上的一个动点,所以$y_1=2x_1-4$.所以点P的轨迹方程为$2y=2(2x-1)-4$,即$y=2x-3$,故选C.

5.C 提示:$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos x$.

当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时,$f(x)$单调递减;当$x\in(0,\pi)$时,$f(x)$单调递增;当$x\in(\pi,2\pi)$时,$f(x)$单调递减,当$x=\pi$时,$f(x)$取得极大值,所以C项成立,故选C.

6.A 提示:焦点$F(1,0)$,故直线AB的方程为$y=\sqrt{3}(x-1)$,代入$y^2=4x$,得$3x^2-10x+3=0$.设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由根与系数的关系,可知$x_1+x_2=\frac{10}{3}$,$x_1x_2=1$.由抛物线的定义知$|FA|=x_1+1$,$|FB|=x_2+1$,所以$||FA|-|FB||=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{100}{9}-4}=\frac{8}{3}$,故选A.

7.B 提示:取AC的中点D,以D为原点,BD,DC,DM所在直线分别为x轴、y轴、z轴,建立空间直角坐标系.不妨设$AC=2$,N为BC的中点,连接AN,则$A(0,-1,0)$,$M(0,0,2)$,$B(-\sqrt{3},0,0)$,$C(0,1,0)$,$N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,

所以$\overrightarrow{AM}=(0,1,2)$,$\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.由直棱柱的性质,知$C_1C\perp$平面$ABC$,所以$C_1C\perp AN$.又由等边三角形的性质,知$AN\perp BC$.因为$C_1C\cap BC=C$,所以$AN\perp$平面$BCC_1B_1$,所以$\overrightarrow{AN}$为平面$BCC_1B_1$的一个法向量.设$AM$与平面$BCC_1B_1$所成角为$\alpha$,所以$\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{10}$,即$AM$与平面$BCC_1B_1$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{10}$,故选B.

8.D 提示:因为$n(S_n-S_{n-1})=nS_n-nS_{n-1}=S_n+2(n-1)n$,即$(n-1)S_n-nS_{n-1}=2(n-1)n$,即$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=2$,又$\frac{S_1}{1}=1$,所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以1为首项,2为公差的等差数列,所以$\frac{S_n}{n}=1+2(n-1)=2n-1$,所以$S_n=2n^2-n$,则$nS_n-2n^2=2n^3-3n^2$.令$f(x)=2x^3-3x^2$,则$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$,$x\geqslant1$时,$f'(x)\geqslant0$,所以$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,即$\{nS_n-2n^2\}$是单调递增数列,所以当$n=1$时,$nS_n-2n^2$取得最小值$-1$,故选D.

二、多项选择题

9.AC 提示:在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,公比$q=2$,所以$a_n=2^{n-1}$,对于A,$a_{2n}=2^{2n-1}$,数列$\{a_{2n}\}$是等比数列,故A正确;对于B,$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n-1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,显然数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是递减数列,故B错误;对于C,$\log_2a_n=\log_22^{n-1}=n-1$,显然数列$\{\log_2a_n\}$是等差数列,故C正确;对于D,$S_{10}=\frac{1-2^{10}}{1-2}=2^{10}-1$,$S_{20}=\frac{1-2^{20}}{1-2}=2^{20}-1$,$S_{30}=\frac{1-20^{30}}{1-2}=2^{30}-1$,显然这三项不构成等比数列,故D错误.故选AC.

10.BC 提示:根据题意,圆C_1:$x^2+y^2=1$,其圆心$C_1(0,0)$,半径$R=1$,圆C_2:$x^2+y^2-6x+8y+24=0$,即$(x-3)^2+(y+4)^2=1$,其圆心$C_2(3,-4)$,半径$r=1$,圆心距$|C_1C_2|=\sqrt{16+9}=5$,则$|PQ|$的最小值为$|C_1C_2|-R-r=3$,最大值为$|C_1C_2|+R+r=7$,故A错误,B正确;对于C,圆心$C_1(0,0)$,圆心$C_2(3,-4)$,则两个圆心所在的直线斜率$k=\frac{-4-0}{3-0}=-\frac{4}{3}$,故C正确;对于D,两圆圆心距$|C_1C_2|=5$,有$|C_1C_2|>R+r=2$,两圆外离,不存在相交弦,故D错误.故选BC.

11.ABD 提示:设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1,以D为原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,0)$,$A_1(1,0,1)$,$B_1(1,1,1)$,$C_1(0,1,1)$,$D_1(0,0,1)$.

对于A,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}=(0,0,1)+(-1,0,0)=(-1,0,1)$,因为$\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}$,所以$\overrightarrow{AD_1}\parallel(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC})$,故A正确;

对于B,$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-1)$,$\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A}=(0,1,0)-(0,0,-1)=(0,1,1)$,有$\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=0+1\times1+(-1)\times1=0$,故B正确;

对于C,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$,

记向量$\overrightarrow{AD_1}$与$\overrightarrow{A_1B}$的夹角为θ,$\theta\in[0,\pi]$,则$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}}{|\overrightarrow{AD_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1B}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$,又$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{2\pi}{3}=120°$,故C错误;

对于D,因为$\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1C}$,又$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-1)$,所以$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1})^2=\overrightarrow{A_1C}^2=(-1)^2+1^2+(-1)^2=3$,又$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,1,0)$,所以$\overrightarrow{A_1B_1}^2=1$,有$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1})^2=3\overrightarrow{A_1B_1}^2$,故D正确.故选ABD.

12.AD 提示:双曲线C_1的一条渐近线的方程为$y=\sqrt{3}x$,则设双曲线C_1的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=\lambda(\lambda\neq0)$.由双曲线$C_1$过点$\left(1,\frac{3}{2}\right)$,得$1-\frac{3}{4}=\lambda$,得$\lambda=\frac{1}{4}$,所以双曲线$C_1$的方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$,所以双曲线$C_1$的离心率$e=2$,实轴的长为1,故A正确,B错误;又易知椭圆$C_2$的两焦点为$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,将$A(1,y_1)(y_1>0)$代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,得$\frac{1}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,所以$y_1=\frac{b^2}{a}$,所以直线$AB$的方程为$y=\frac{b^2}{2a}(x+1)$,联立$\begin{cases}y=\frac{b^2}{2a}(x+1),\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$整理得$(a^2+3)x^2+2(a^2-1)\cdot x-3a^2-1=0$,所以$1\cdot x_B=-\frac{3a^2+1}{a^2+3}$,则$x_B=-\frac{3a^2+1}{a^2+3}=-3+\frac{8}{a^2+3}$.由$a^2>1$,得$a^2+3>4$,则$0<\frac{8}{a^2+3}<2$,所以$-3<x_B<-1$,故C错误,D正确.故选AD.

三、填空题

13.$2x-y+1=0$ 提示:设与直线$2x-y+3=0$平行的直线为$2x-y+m=0$.因为点$(0,1)$在直线$2x-y+m=0$上,所以$2\times0-1+m=0$,可得$m=1$,所以该直线方程为$2x-y+1=0$.

14.2 提示:以A为原点,AC,AA_1所在直线分别为y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},1,0)$,$A_1(0,0,2)$,$C(0,2,0)$,$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$,所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{2}(\sqrt{3},1,2)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,即$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,

所以$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2+(1-0)^2}=2$.

15.$[2,+\infty)$ 提示:由$a_1=a_2=1$,$a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+a_n$,得$a_{n+2}\cdot a_{n+1}=a_{n+1}a_n+1$,所以$\{a_{n+1}a_n\}$是以1为首项,1为公差的等差数列,所以$a_{n+1}a_n=n$,所以$S_n=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,所以$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,所以$T_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}<2$,又$T_n<m$恒成立,所以实数$m$的取值范围是$[2,+\infty)$.

16.$[-1,2]$ 提示:因为$g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)$,则$g(-2)=-\frac{4}{e^2}$.由$g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)=0$,可得$a=\frac{x-2}{x+2}e^x=f(x)$,函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq-2\}$,当$x<-2$或$x>2$时,$f(x)>0$,当$-2<x\leqslant2$时,$f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)e^x-(x-2)e^x}{(x+2)^2}=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\geqslant0$,所以函数$f(x)$在$(-2,2]$上单调递增.又因为$f(-1)=-\frac{3}{e}$,$f(2)=0$,由$-\frac{3}{e}\leqslant a\leqslant0$,即$-\frac{3}{e}\leqslant f(x)\leqslant0$,即$f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(2)$,解得$-1\leqslant x\leqslant2$,所以,若$a\in\left[-\frac{3}{e},0\right]$,则函数$g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)$零点的取值范围是$[-1,2]$.

四、解答题

17.解:(1)由题意,得$f'(x)=\frac{a}{x}-2bx$.因为函数$f(x)$在$x=1$处与直线$y=-\frac{1}{2}$相切,

所以$\begin{cases}f'(1)=a-2b=0,\\ f(1)=-b=-\frac{1}{2},\end{cases}$得$a=1$,$b=\frac{1}{2}$.

(2)由(1),得$f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}$,$f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$,

所以当$x\in[1,2]$时,$f'(x)\leqslant0$,所以函数$f(x)$在$[1,2]$上单调递减,所以$[f(x)]_{min}=f(2)=\ln2-2$.

18.解:(1)选条件①时,由$na_{n+1}=(n+1)a_n$,得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$,所以$a_n=n$.

选条件②时,由$S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$,得$2S_n=(n+1)a_n$,

当$n\geqslant2$时,$2S_{n-1}=na_{n-1}$,两式相减,得$2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$,即$(n-1)a_n=na_{n-1}$,整理得$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\frac{a_1}{1}=1$,所以$a_n=n$.

选条件③时,由于$a_n^2+a_n=2S_n$,当$n\geqslant2$时,$a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}$,两式相减,得$a_n^2-a_{n-1}^2=a_n+a_{n-1}$.因为$\{a_n\}$为正项数列,所以$a_n-a_{n-1}=1$,所以数列$\{a_n\}$是以1为首项,1为公差的等差数列,所以$a_n=n$.

(2)由(1),得$b_n=-n\cdot2^n$,设$c_n=n\cdot2^n$,其前n项和为C_n,所以$C_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+n\cdot2^n$,

$2C_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$,

两式相减,得$-C_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n\cdot2^{n+1}=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}$,

故$C_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$,所以$T_n=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$.

19.解:(1)$x^2+y^2+2x-4y+3=0$可化为$(x+1)^2+(y-2)^2=2$.

当直线l的斜率不存在时,其方程为$x=-2$,易求得直线l与圆C的交点为$A(-2,1)$,$B(-2,3)$,此时$|AB|=2$,符合题意;当直线l的斜率存在时,设其方程为$y=k(x+2)$,即$kx-y+2k=0$,则圆心C到直线l的距离$d=\frac{|-k-2+2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$,解得$k=\frac{3}{4}$.所以直线$l$的方程为$3x-4y+6=0$.

综上,直线l的方程为$x=-2$或$3x-4y+6=0$.

(2)因为PM为圆C的切线,连接MC,PC,所以$CM\perp PM$,$\triangle PMC$为直角三角形,所以$|PM|^2=|PC|^2-|MC|^2$.设$P(x,y)$,由(1)知点C为$(-1,2)$,$|MC|=\sqrt{2}$.因为$|PM|=|PO|$,

所以$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2-2}=\sqrt{x^2+y^2}$,化简得点$P$的轨迹方程为$2x-4y+3=0$.

求$|PM|$的最小值,即求$|PO|$的最小值,也即求原点O到直线$2x-4y+3=0$的距离,

代入点到直线的距离公式可求得$|PM|$的最小值$d=\frac{|3|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

20.解:以D为原点,DA,DC,DP所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,设$DC=1$.

(1)证明:连接AC交BD于点G,连接EG,依题意得$A(1,0,0)$,$P(0,0,1)$,$E\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

因为底面$ABCD$是正方形,所以点G是此正方形的中心,故点G的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$,所以$\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{EG}=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$,即$PA\parallel EG$.

因为$EG\subset$平面EDB,且$PA\not\subset$平面EDB,所以$PA\parallel$平面EDB.

(2)解:因为$D(0,0,0)$,$B(1,1,0)$,所以$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$,$\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$,所以$PB\perp DE$.

由已知得$EF\perp PB$,且$EF\cap DE=E$,所以$PB\perp$平面EFD,

所以平面EFD的一个法向量为$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$.

又$\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,设平面$DEB$的法向量为$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(y+z)=0,\\ \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{DB}=x+y=0,\end{cases}$取$x=1$,则$y=-1$,$z=1$,即$\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$,则$\cos\langle\boldsymbol{a},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=-\frac{1}{3}$.设二面角$F-DE-B$的平面角为$\theta$,因为$\theta\in[0,\pi]$,所以$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.所以二面角$F-DE-B$的正弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

21.(1)证明:设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,由题意知,$F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,则$k_1=\frac{y_0}{x_0+2}$,$k_2=\frac{y_0}{x_0-2}$.因为点P为双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$上异于顶点的任意一点,所以$x_0^2-y_0^2=4$,所以$k_1k_2=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}$,即$k_1\cdot k_2=1$.

(2)解:由直线PF_1的方程为$y=k_1(x+2)$,

代入椭圆C的方程$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$,可得$(1+2k_1^2)x^2+8k_1^2\cdot x+8k_1^2-8=0$,所以$x_1+x_2=-\frac{8k_1^2}{2k_1^2+1}$,$x_1x_2=\frac{8k_1^2-8}{2k_1^2+1}$,所以$|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{2}\cdot\frac{k_1^2+1}{2k_1^2+1}$.同理可得$|CD|=4\sqrt{2}\cdot\frac{k_2^2+1}{2k_2^2+1}$,因为$k_1\cdot k_2=1$,所以$|CD|=4\sqrt{2}\cdot\frac{k_1^2+1}{k_1^2+2}$,则$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2k_1^2+1}{k_1^2+1}+\frac{k_1^2+2}{k_1^2+1}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{8}$,即存在常数$\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{8}$,使得$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$恒成立.

22.解:(1)当$m=0$时,$f(x)=x-\ln(x+1)$,定义域为$(-1,+\infty)$,$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$,所以当$x\in(-1,0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.综上所述,当$m=0$时,函数$f(x)$在$(-1,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增.

(2)当$m\leqslant0$时,令$x=1$,则$f(1)=1-\ln2-m>0$,故$m\leqslant0$不合题意;当$m>0$时,$f'(x)=\frac{x}{x+1}-2mx=\frac{-x(2mx-1+2m)}{x+1}$,

令$f'(x)=0$,得$x_1=0$,$x_2=\frac{1-2m}{2m}>-1$,

①当$m\geqslant\frac{1}{2}$时,$\frac{1-2m}{2m}\leqslant0$,$f'(x)<0$在$(0,+\infty)$上恒成立,所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,对于任意的$x\in(0,+\infty)$,总有$f(x)<f(0)=0$,故$m\geqslant\frac{1}{2}$符合题意;

②当$m\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时,$\frac{1-2m}{2m}>0$,对于$x\in\left(0,\frac{1-2m}{2m}\right)$,$f'(x)>0$,故$f(x)$在$\left(0,\frac{1-2m}{2m}\right)$上单调递增,因此当$x\in\left(0,\frac{1-2m}{2m}\right)$时,$f(x)>f(0)=0$,即$x\in(0,+\infty)$,$f(x)<0$不恒成立,故$0<m<\frac{1}{2}$不合题意.

综上,m的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

第 15 期

第 2~3 版综合测试(七)参考答案

一、单项选择题

1.B 提示:因为直线$x+ay+1=0$与直线$(a-1)x+2y+1=0$垂直,所以$1\times(a-1)+a\times2=0$,解得$a=\frac{1}{3}$,故选B.

2.D 提示:$f'(x)=1+2e^{2x}$,所以$f(x)$在$(0,f(0))$处的切线的斜率为$k=f'(0)=3$,又$f(0)=1$,所以$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-1=3(x-0)$,即$y=3x+1$.故选D.

3.B 提示:由抛物线的方程可得准线的方程为$y=-\frac{p}{2}$,设P的纵坐标为n,由抛物线的性质,则$n+\frac{p}{2}-n=1$,解得$p=2$,故选B.

4.D 提示:由$\{a_n\}$是等差数列,得$a_4+a_7+a_{10}=3a_7=17$,解得$a_7=\frac{17}{3}$,又$a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{13}+a_{14}=11a_9=77$,解得$a_9=7$,所以公差$d=\frac{a_9-a_7}{9-7}=\frac{2}{3}$.故选D.

5.A 提示:依题意,$\angle AED=60°$,因为$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$,所以$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{AE}|^2+|\overrightarrow{ED}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{ED}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{ED}=1+1+1+2\times1\times1\times\cos120°=3-2\times\frac{1}{2}=2$,

所以$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{2}$.故选A.

6.D 提示:根据题意,双曲线C:$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{m}=1(m>0)$的一条渐近线的方程为$2x+y=0$,

则有$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}=2$,即$m=8$,则双曲线C的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$,其中$a=\sqrt{2}$,$b=2\sqrt{2}$,则$c=\sqrt{10}$,所以双曲线C的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.故选D.

7.D 提示:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,由题意可得$a_1+a_1q^2+a_1q^4=4$,所以$(a_1+a_1q^2+a_1q^4)(1-q^2)=4(1-q^2)$,即$a_1(1-q^6)=4(1-q^2)$,由$S_6=12$,得$\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=12$,解得$q=2$,$a_1=\frac{4}{21}$,所以$S_9=\frac{\frac{4}{21}(1-2^9)}{1-2}=\frac{292}{3}$.故选D.

8.B 提示:函数$g(x)$的导数$g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$,所以函数$g(x)$在$\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$上单调递减,在$\left[\frac{2}{3},2\right]$上单调递增,$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-5=-\frac{41}{8}$,$g(2)=8-4-5=-1$,则$[g(x)]_{max}=-1$,

若对任意$x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,都有$f(x_1)-g(x_2)\geqslant2$成立,即当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$时,$f(x)\geqslant1$恒成立,即$\frac{a}{x}+x\ln x\geqslant1$恒成立,即$a\geqslant x-x^2\ln x$在$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$上恒成立.

令$h(x)=x-x^2\ln x$,则$h'(x)=1-2x\ln x-x$,$h''(x)=-3-2\ln x$,当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$时,$h''(x)=-3-2\ln x<0$,即$h'(x)=1-2x\ln x-x$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递减,

由于$h'(1)=0$,则当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$时,$h'(x)>0$;当$1\leqslant x\leqslant2$时,$h'(x)<0$,所以$h(x)\leqslant h(1)=1$,所以$a\geqslant1$.故选B.

二、多项选择题

9.BC 提示:由等差数列$\{a_n\}$的公差$d<0$,得$\{a_n\}$是单调递减数列,又$|a_3|=|a_9|$,则$a_3>0$,$a_9<0$,即$a_3=-a_9$,所以$a_3+a_9=2a_6=0$,所以数列$\{a_n\}$的前5项或前6项和最大.故选BC.

10.AD 提示:对于A,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-1)+1\times2+0\times1=0$,所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,故A正确;对于B,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,$\overrightarrow{AC}$的单位向量是$\pm\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)=\pm\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$,故B错误;对于C,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$夹角的余弦值是$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{11}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$,故C错误;对于D,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,

设平面ABC的法向量为$n=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=2x+y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AC}=-x+2y+z=0,\end{cases}$取$x=-1$,得$n=(-1,2,-5)$,故D正确.故选AD.

11.BD 提示:因为$(x-3k)^2+(y-4k-2)^2=1+k^2$,所以圆心坐标为$(3k,4k+2)$,半径为$\sqrt{1+k^2}$.对于A,因为圆$M$与$y$轴相切,$|3k|=\sqrt{1+k^2}$,解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$,故A错误;

对于B,圆心$(3k,4k+2)$到原点的距离$d=\sqrt{(3k)^2+(4k+2)^2}=\sqrt{25\left(k+\frac{8}{25}\right)^2+\frac{36}{25}}\geqslant\frac{6}{5}$,故B正确;

对于C,若直线$y=x$平分圆,故圆心$(3k,4k+2)$在直线$y=x$上,满足$3k=4k+2$,解得$k=-2$,故C错误;

对于D,圆$(x-3k)^2+y^2=4k^2$的圆心为$(3k,0)$,半径为$|2k|$,当两圆外切时,满足$\sqrt{(4k+2)^2}=|4k+2|=\sqrt{1+k^2}+|2k|$,设函数$f(k)=|4k+2|-\sqrt{1+k^2}-|2k|$,因为$f(0)=1>0$,$f(-1)=-\sqrt{2}<0$,所以$f(k)$在$(-1,0)$内必有零点,故D正确.故选BD.

12.BD 提示:设$P(x,y)$,不妨设椭圆的长轴在x轴上,则$|PQ|^2=y^2$,由$a^2-x^2=ky^2$,得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{ky^2}{a^2}=1$,则$A(-a,0)$,$B(a,0)$,所以$|AQ|\cdot|BQ|=(x+a)(a-x)=a^2-x^2$,所以$M=\frac{|PQ|^2}{|AQ|\cdot|BQ|}=\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{1}{k}$(常数),所以$M$的值与$P$点在椭圆上的位置无关,故B正确,A错误;

此时椭圆离心率$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{ka^2}}=\sqrt{1-M}$,所以$M$的值越大,椭圆的离心率越小,所以D正确,C错误.故选BD.

三、填空题

13.1 提示:由抛物线$x^2=8y$,得$F(0,2)$,由双曲线$\frac{y^2}{3}-x^2=1$的方程可得渐近线的方程为$\sqrt{3}x\pm y=0$,所以焦点F到渐近线的距离$d=\frac{|2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=1$.

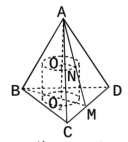
14.$(x-2)^2+(y+1)^2=13$ 提示:要使得A,B,C三点中的一个点在圆内,一个点在圆上,一个点在圆外,则圆的半径是$|PA|$,$|PB|$,$|PC|$三个中的中间值,因为$|PA|=\sqrt{(3-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$,$|PB|=\sqrt{(5-2)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{13}$,$|PC|=\sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2}=5$,则$|PA|<|PB|<|PC|$,所以所求圆的半径$r=|PB|=\sqrt{13}$,又圆心为$P(2,-1)$,所以这个圆的标准方程为$(x-2)^2+(y+1)^2=13$.

15.$\left[2,\frac{8}{3}\right)$ 提示:因为$a_2=1$,$a_4=\frac{1}{4}$,且$a_n>0$,所以$q^2=\frac{1}{4}$,$q=\frac{1}{2}$,则$a_1=2$,$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,$a_na_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$,所以数列$\{a_na_{n+1}\}$是以2为首项,公比为$\frac{1}{4}$的等比数列,则数列$\{a_na_{n+1}\}$的前$n$项和$S_n=\frac{2\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$,当$n=1$时,$S_n$有最小值2,又$S_n=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)<\frac{8}{3}$,所以$S_n$的取值范围是$\left[2,\frac{8}{3}\right)$.

16.$\sqrt{3}$;$3\sqrt{6}\pi$ 提示:如图,正四面体ABCD,设圆柱的上底面圆心为O_1,下底面圆心为O_2,O_2为正四面体底面中心,圆柱的上底面与正四面体侧面ACD的交点N在侧面中线AM上,因为正四面体棱长为9,所以$AM=BM=\frac{9\sqrt{3}}{2}$,所以$O_2M=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,$BO_2=3\sqrt{3}$,$AO_2=\sqrt{AM^2-O_2M^2}=3\sqrt{6}$,设圆柱底面半径为$r$,高为$h$,

由$O_1N\parallel O_2M$,得$\frac{r}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{6}-h}{3\sqrt{6}}$,所以$h=3\sqrt{6}-2\sqrt{2}r$,所以$V_{圆柱}=\pi r^2(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}r)=3\sqrt{6}\pi r^2-2\sqrt{2}\pi r^3$,令$f(r)=3\sqrt{6}\pi r^2-2\sqrt{2}\pi r^3$,$f'(r)=6\sqrt{6}\pi r-6\sqrt{2}\pi r^2$,令$f'(r)=0$,解得$r=\sqrt{3}$,当$r\in(0,\sqrt{3})$时,$f'(r)>0$,当$x\in(\sqrt{3},+\infty)$时,$f'(r)<0$.

所以$r=\sqrt{3}$时,$[f(r)]_{max}=\pi\times3\times(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}\times\sqrt{3})=3\sqrt{6}\pi$.



(第 16 题图)

四、解答题

17.解:(1)已知圆C经过点$A(1,0)$,点$B(3,-2)$,则圆心C在线段AB的垂直平分线上,其方程为$y+1=x-2$,即$x-y-3=0$,又圆心在直线$2x+y=0$上,

联立$\begin{cases}2x+y=0,\\ x-y-3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=-2,\end{cases}$所以圆心$C$为$(1,-2)$,半径$R=|AC|=2$,

所以圆C的标准方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

(2)设圆D的圆心为$D(x,y)$,因为圆D与圆C关于直线$x-y+1=0$对称,

所以$\begin{cases}\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{2}+1=0,\\ \frac{y+2}{x-1}=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3,\\ y=2,\end{cases}$所以圆$D$的标准方程是$(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

18.解:(1)因为$f(x)=x\ln x-a(x-1)$,所以$f'(x)=\ln x+1-a$,

因为$x=e$是函数$f(x)$的一个极小值点,所以$f'(e)=2-a=0$,解得$a=2$.经检验,$a=2$符合题意.

(2)由(1)得,$f(x)=x\ln x-2x+2$,$f'(x)=\ln x-1$,令$f'(x)>0$,解得$x>e$,令$f'(x)<0$,解得$0<x<e$,故$f(x)$在$[1,e)$上单调递减,在$(e,3]$上单调递增,而$f(1)=0$,$f(3)=3\ln3-4<0$,故$[f(x)]_{max}=f(1)=0$,$[f(x)]_{min}=f(e)=2-e$.

19.解:(1)数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,$a_1=1$,

选①时,设数列$\{a_n\}$的公差为d,因为a_1,a_2,a_5成等比数列,所以$a_2^2=a_1\cdot a_5$,所以$(1+d)^2=1+4d$,解得$d=2$或$d=0$(舍去),所以$a_n=2n-1$.因为$T_n=2-b_n$,所以$T_{n+1}=2-b_{n+1}$,两式相减得$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2}$(常数),

当$n=1$时,$T_1=2-b_1$,所以$b_1=1$,所以$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

选②时,$\frac{S_5}{5}-\frac{S_3}{3}=2$,整理得$\frac{5a_1+10d}{5}-\frac{3a_1+3d}{3}=2$,解得$d=2$,故$a_n=2n-1$.

由于$T_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,当$n=1$时,$b_1=1$;当$n\geqslant2$时,$T_{n-1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,所以$b_n=T_n-T_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.当$n=1$时,也适合上式,所以$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)由(1)得,$\frac{a_n}{b_n}=(2n-1)\cdot2^{n-1}$,所以$M_n=1\times2^0+3\times2^1+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$,①

$2M_n=1\times2^1+3\times2^2+\cdots+(2n-3)\cdot2^{n-1}+(2n-1)\cdot2^n$,②

①-②得,$-M_n=1+2\times2^1+2\times2^2+\cdots+2\times2^{n-1}-(2n-1)\cdot2^n=1+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot2^n=(3-2n)\cdot2^n-3$,所以$M_n=(2n-3)\cdot2^n+3$.

20.(1)证明:由题意,矩形$ABCD$中,$AB=4$,$AD=2$,$AG=1$,可得$\tan\angle CAD=\frac{DC}{AD}=\frac{4}{2}=2$,$\tan\angle AGD=\frac{AD}{AG}=\frac{2}{1}=2$,所以$\angle CAD=\angle AGD$,所以$\angle BAC+\angle AGD=\angle BAC+\angle CAD=\frac{\pi}{2}$,所以$DG\perp AC$.因为平面$ABCD\perp$平面$ABEF$,且平面$ABCD\cap$平面$ABEF=AB$,$AF\perp AB$,

所以$AF\perp$平面$ABCD$,又因为$DG\subset$平面$ABCD$,所以$AF\perp DG$,由$AF\cap AC=A$,且AF,$AC\subset$平面ACF,所以$DG\perp$平面ACF,又$DG\subset$平面DFG,所以平面$DFG\perp$平面ACF.

(2)解:由题意,以A为原点,以AD,AB,AF所在的直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,

则$C(2,4,0)$,$D(2,0,0)$,$E(0,4,1)$,$F(0,0,4)$,$G(0,1,0)$,得$\overrightarrow{DG}=(-2,1,0)$,$\overrightarrow{DF}=(-2,0,4)$,$\overrightarrow{CE}=(-2,0,1)$,$\overrightarrow{CF}=(-2,-4,4)$.

设平面DFG的法向量为$n=(x_1,y_1,z_1)$,则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{DG}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{DF}=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}-2x_1+y_1=0,\\ -2x_1+4z_1=0,\end{cases}$取$x_1=2$,得$y_1=4$,$z_1=1$,所以$n=(2,4,1)$.设平面$CEF$的法向量为$m=(x_2,y_2,z_2)$,则$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}-2x_2+z_2=0,\\ -2x_2-4y_2+4z_2=0,\end{cases}$取$x_2=1$,得$y_2=\frac{3}{2}$,$z_2=2$,所以$m=\left(1,\frac{3}{2},2\right)$.设平面$DFG$与平面$CEF$夹角为$\theta$,则$\cos\theta=\frac{|n\cdot m|}{|n|\cdot|m|}=\frac{\left|2\times1+4\times\frac{3}{2}+1\times2\right|}{\sqrt{2^2+4^2+1^2}\times\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}}=\frac{20\sqrt{609}}{609}$,

所以平面DFG与平面CEF夹角的余弦值为$\frac{20\sqrt{609}}{609}$.

21.(1)解:当点P为椭圆上或下顶点时,$\triangle PAB$的面积最大,即$\frac{1}{2}\cdot2ab=2$,所以$ab=2$,又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a^2=b^2+c^2$,故$a=2$,$b=1$,所以椭圆$E$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)证明:设直线MN的方程为$x=ty+1$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$H(4,y_1)$,联立直线MN的方程和椭圆E的方程,得$(t^2+4)y^2+2ty-3=0$,$y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$,直线$HN$的方程为$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{4-x_2}(x-4)$,令$y=0$,得$x=4-\frac{4y_1-y_1x_2}{y_1-y_2}=4-\frac{4y_1-y_1(ty_2+1)}{y_1-y_2}=4-\frac{3y_1-ty_1y_2}{y_1-y_2}$,又$y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$,故$ty_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$,所以$x=4-\frac{3y_1-\frac{3}{2}(y_1+y_2)}{y_1-y_2}=\frac{5}{2}$,即直线$HN$与$x$轴的交点为定点$\left(\frac{5}{2},0\right)$.

22.(1)证明:$f(x)=e^x-\sin x+\cos x-2$,则$f'(x)=e^x-\cos x-\sin x$,$f''(x)=e^x+\sin x-\cos x$,

因为$x\in(0,\pi)$,所以$f''(x)>0$,所以$f'(x)$在$(0,\pi)$单调递增,且$f'(0)=0$,所以$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(0,\pi)$单调递增,所以$f(x)>f(0)=0$.

(2)解:$g(x)=e^x-a\sin x-1$,

①当$a\leqslant0$时,$x\in[0,\pi]$,则$g(x)\geqslant0$,因为$g(0)=0$,所以$x=0$是唯一零点;

②当$0<a\leqslant1$时,$g'(x)=e^x-a\cos x$,

设$h(x)=g'(x)$,则$h'(x)=e^x+a\sin x$,$x\in[0,\pi]$时,有$h'(x)>0$,

所以$h(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,而$h(0)=1-a\geqslant0$,所以$h(x)\geqslant h(0)\geqslant0$,所以$g(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,因为$g(0)=0$,所以$x=0$是唯一零点;

③当$a>1$时,$g'(x)=e^x-a\cos x$,设$h(x)=g'(x)$,则$h'(x)=e^x+a\sin x$,$x\in[0,\pi]$时,有$h'(x)>0$,所以$h(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,而$h(0)=1-a<0$,$h\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$,

所以$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得$h(x_0)=0$,所以当$0\leqslant x<x_0$时,$g(x)$单调递减,$x_0<x\leqslant\pi$时,$g(x)$单调递增,

所以$[g(x)]_{min}=g(x_0)$,而$g(x_0)<g(0)=0$,$g(\pi)=e^\pi-1>0$,所以$g(x)$在(x_0,π)上有唯一零点,又$x=0$是一个零点,所以$g(x)$在$[0,\pi]$上有2个零点.

综上,当$a\leqslant1$时,$g(x)$在$[0,\pi]$上有1个零点,当$a>1$时,$g(x)$在$[0,\pi]$上有2个零点.