

第 16 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8. DDBCCAD

二、多项选择题

9. AD 10. BC  
11. ABD 12. BD

三、填空题

13. 4 14.  $3\sqrt{3}$   
15.  $-\frac{1}{4}$  16.  $\sqrt{2}$

四、解答题

17. 证明: (1) 因为  $M$  是棱柱的侧面  $AA_1C_1C$  对角线的交点, 所以  $M$  是  $AC_1$  中点. 因为  $D$  是  $AB$  中点, 所以  $MD \parallel BC_1$ , 因为  $MD \not\subset$  平面  $A_1BC_1$ ,  $BC_1 \subset$  平面  $A_1BC_1$ , 所以  $MD \parallel$  平面  $A_1BC_1$ .

(2) 因为  $AB=AC$ ,  $E$  是  $BC$  中点, 所以  $AE \perp BC$ . 因为  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $AE \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $AA_1 \perp AE$ .

因为在三棱柱中  $BB_1 \parallel AA_1$ ,

所以  $BB_1 \perp AE$ .

因为  $BB_1 \cap BC=B$ ,

$BB_1 \subset$  平面  $BCC_1B_1$ ,

$BC \subset$  平面  $BCC_1B_1$ ,

所以  $AE \perp$  平面  $BCC_1B_1$ .

因为  $AE \subset$  平面  $MAE$ ,

所以平面  $MAE \perp$  平面  $BCC_1B_1$ .

18. 证明: (1) 因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $AB \perp PA$ . 又  $AB \perp AD$ ,  $PA \cap AD=A$ , 所以  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 因为  $PD \subset$  平面  $PAD$ , 所以  $AB \perp PD$ .

(2) 因为  $CD=2AB$ ,  $E$  为  $CD$  的中点, 所以  $AB=DE$ , 又因为  $AB \parallel DE$ , 所以四边形  $ABED$  为平行四边形, 所以  $AD \parallel BE$ . 因为  $E, F$  分别是  $CD$  和  $PC$  的中点, 所以  $EF \parallel PD$ . 因为  $EF \cap BE=E$ ,  $PD \cap AD=D$ , 所以平面  $BEF \parallel$  平面  $PAD$ .

19. (1) 证明: 连接  $AB_1$ , 交  $A_1B$  于点  $O$ , 连接  $OM$ , 则  $O$  为  $AB_1$  的中点, 因为  $M$  为  $AC$  的中点, 所以  $OM \parallel B_1C$ , 又  $OM \subset$  平面  $A_1BM$ ,  $B_1C \not\subset$  平面  $A_1BM$ , 所以直线  $B_1C \parallel$  平面  $A_1BM$ .

(2) 解: 由 (1) 知  $OM \parallel B_1C$ , 所以  $\angle BOM$  或其补角为异面直线  $B_1C$  与  $A_1B$  所成的角.

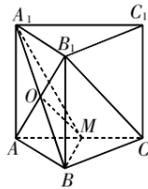
因为  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB, BM \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp BM$ , 因为  $\angle BAC = \frac{\pi}{3}, AB=AC=2$ , 所以  $\triangle ABC$  为等边三角形, 又  $M$  为  $AC$  的中点, 所以  $BM \perp AC$ ,  $BM = \sqrt{3}$ .

又  $AA_1 \cap AC = A, AA_1, AC \subset$  平面  $AA_1C_1C$ , 所以  $BM \perp$  平面  $AA_1C_1C$ , 又  $A_1M \subset$  平面  $AA_1C_1C$ , 所以  $BM \perp A_1M$ .

由  $AA_1 \perp AB, AA_1=AB=2$ , 得  $A_1B=2\sqrt{2}$ , 所以  $OM=OB=\frac{1}{2}A_1B=\sqrt{2}$ . 在  $\triangle OBM$  中,

由余弦定理的推论, 得  $\cos \angle BOM = \frac{OM^2+OB^2-BM^2}{2OM \cdot OB} = \frac{2+2-3}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{4}$ . 故异面

直线  $B_1C$  与  $A_1B$  所成角的余弦值为  $\frac{1}{4}$ .



(第 19 题图)

20. (1) 证明: 因为  $SB=SC$ ,  $M$  是  $BC$  的中点, 所以  $SM \perp BC$ . 因为平面  $ABCD \perp$  平面  $SBC$ , 平面  $ABCD \cap$  平面  $SBC=BC$ , 所以  $SM \perp$  平面  $ABCD$ . 因为  $AM \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $SM \perp AM$ . 因为四边形  $ABCD$  是矩形,  $M$  是  $BC$  的中点,  $AB=1, BC=2$ , 所以  $AM^2+MD^2=AD^2$ , 所以  $AM \perp MD$ , 又  $SM \cap MD=M$ , 所以  $AM \perp$  平面  $SMD$ , 又  $SD \subset$  平面  $SMD$ , 所以  $AM \perp SD$ .

(2) 解: 由 (1) 知  $\triangle AMS$  为直角三角形,  $\angle AMS=90^\circ, AM=\sqrt{2}$ ,

因为  $SM = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ,

所以  $SA=SD = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ,

因为  $AM=MD = \sqrt{2}$ ,

所以  $S_{\triangle AMF} = \frac{1}{2}AM \cdot MD = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 = 1$ ,

所以  $V_{S-ADM} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{\triangle AMF} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times 1 = \frac{\sqrt{6}}{9}$ .

在  $\triangle ADS$  中,  $SA=SD = \frac{2\sqrt{6}}{3}, AD=2$ ,

设  $AD$  边上的高为  $h$ ,

则  $h = \sqrt{SD^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9} - 1} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ , 所以  $S_{\triangle ADS} = \frac{1}{2}h \cdot AD = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{3} \times 2 = \frac{\sqrt{15}}{3}$ .

设点  $M$  到平面  $ADS$  的距离为  $d$ , 由  $V_{S-ADM} = V_{M-ADS}$ , 得  $V_{M-ADS} = \frac{1}{3}d \cdot S_{\triangle ADS} = \frac{1}{3}d \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{9}d$ , 所以  $d = \frac{\sqrt{10}}{5}$ , 故点  $M$  到平面  $ADS$  的距离为  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

21. (1) 证明: 因为  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AM \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PD \perp AM$ .

又因为  $PB \perp AM, PD \cap PB = P, PB, PD \subset$  平面  $PBD$ , 所以  $AM \perp$  平面  $PBD$ .

因为  $AM \subset$  平面  $PAM$ ,

所以平面  $PAM \perp$  平面  $PBD$ .

(2) 解: 因为  $PD \perp$  底面  $ABCD, BD \subset$

平面  $ABCD$ , 所以  $PD$  为四棱锥  $P-ABCD$  的高,  $PD \perp DB$ , 即  $\triangle DPB$  是直角三角形.

取  $CD, CP$  的中点分别为  $E, F$ , 连接  $MF, AF, EF, AE$ , 则  $EF \parallel PD, EF = \frac{1}{2}PD =$

$\frac{1}{2}$ . 因为  $M$  为  $BC$  的中点, 所以  $MF \parallel PB$ ,

$MF = \frac{1}{2}PB$ , 又  $PB \perp AM$ , 所以  $AM \perp MF$ , 即  $\triangle AMF$  是直角三角形.

设  $AD=BC=2a$ , 因为底面  $ABCD$  是矩形,  $PD=DC=1$ , 所以  $AE = \sqrt{4a^2 + \frac{1}{4}}, AM =$

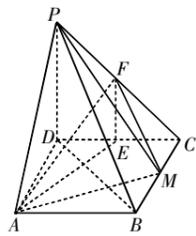
$\sqrt{a^2+1}, BD = \sqrt{4a^2+1}, AF = \sqrt{4a^2 + \frac{1}{2}}$ . 因为  $\triangle DPB$  是直角三角形, 所以  $BP =$

$\sqrt{4a^2+2}$ , 则  $MF = \frac{1}{2}BP = \frac{\sqrt{4a^2+2}}{2}$ .

因为  $\triangle AMF$  是直角三角形, 所以  $AM^2 + MF^2 = AF^2$ , 即  $a^2 + 1 + \frac{1}{4}(4a^2+2) = 4a^2 + \frac{1}{2}$ , 解得

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 所以四棱锥  $P-ABCD$  的体积  $V =$

$\frac{1}{3} \cdot PD \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .



(第 21 题图)

22. (1) 证明: 连接  $BD$ , 由题意得  $AC \cap BD = H, BH = DH$ , 又  $BG = PG$ , 所以  $GH \parallel PD$ , 因为  $GH \not\subset$  平面  $PAD, PD \subset$  平面  $PAD$ , 所以  $GH \parallel$  平面  $PAD$ .

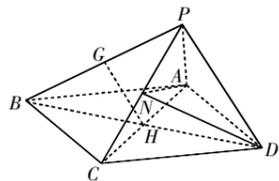
(2) 证明: 取棱  $PC$  中点  $N$ , 连接  $DN$ , 则  $DN \perp PC$ , 又因为平面  $PAC \perp$  平面  $PCD$ , 平面  $PAC \cap$  平面  $PCD = PC$ , 所以  $DN \perp$  平面  $PAC$ , 又  $PA \subset$  平面  $PAC$ , 所以  $DN \perp PA$ , 又  $PA \perp CD, CD \cap DN = D$ , 所以  $PA \perp$  平面  $PCD$ .

(3) 解: 连接  $AN$ , 由 (2) 中  $DN \perp$  平面  $PAC$ , 知  $\angle DAN$  是直线  $AD$  与平面  $PAC$  所成角.

因为  $\triangle PCD$  是等边三角形,  $CD=2$ , 且  $N$  为  $PC$  中点, 所以  $DN = \sqrt{3}$ . 又  $DN \perp AN$ ,

在  $Rt \triangle AND$  中,  $\sin \angle DAN = \frac{DN}{DA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

所以直线  $AD$  与平面  $PAC$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .



(第 22 题图)

第 13 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8. CBDADADC

二、多项选择题

9. ABD 10. ABC  
11. BC 12. ABC

三、填空题

13.  $M > N$

14.  $\left\{x \mid \frac{3}{2} \leq x < 5\right\}$

15.  $\left(0, \frac{1}{10}\right)$

16. -2

四、解答题

17. 证明: 当  $x \geq 4$  时, 要证  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1}$ , 只需证  $(\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2})^2 > (\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1})^2$ ,

需证  $x-3+2\sqrt{(x-3)(x-2)}+x-2 > x-4+2\sqrt{(x-4)(x-1)}+x-1$ , 即证  $\sqrt{(x-3)(x-2)} > \sqrt{(x-4)(x-1)}$ , 只需证  $x^2-5x+6 > x^2-5x+4$ , 即证  $6 > 4$ , 显然上式成立, 所以原不等式成立, 即  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1}$ .

18. 解: (1) 因为  $f(x) = a^x - 1 (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ ,

所以  $f(1) - f(2) = (a-1) - (a^2-1) = a-a^2$ .

由  $a-a^2 = \frac{1}{4}$ , 解得  $a = \frac{1}{2}$ .

(2) 不等式  $f(x) > 0$ , 即  $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 > 0$ ,

所以  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$ , 解得  $x < 0$ .

所以不等式  $f(x) > 0$  的解集为  $(-\infty, 0)$ .

19. 解: (1) 当  $a=2$  时,  $f(x) \leq 0$  可化为  $2x^2-5x+2 \leq 0$ , 可得  $(2x-1)(x-2) \leq 0$ , 解得  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ , 所以  $f(x) \leq 0$  的解集为  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ .

(2) 当  $a > 0$  时, 不等式  $f(x) \leq 0$  可化为  $ax^2 - (2a+1)x + 2 \leq 0$ ,

进一步化为  $a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) \leq 0$ .

① 当  $0 < a < \frac{1}{2}$  时, 有  $\frac{1}{a} > 2$ , 解不等

式得  $2 \leq x \leq \frac{1}{a}$ ;

② 当  $a = \frac{1}{2}$  时, 有  $\frac{1}{a} = 2$ ,

解不等式得  $x = 2$ ;

③ 当  $a > \frac{1}{2}$  时, 有  $\frac{1}{a} < 2$ ,

解不等式得  $\frac{1}{a} \leq x \leq 2$ .

综上, 当  $0 < a < \frac{1}{2}$  时, 不等式的解集

为  $\left\{x \mid 2 \leq x \leq \frac{1}{a}\right\}$ ; 当  $a = \frac{1}{2}$  时, 不等式的

解集为  $\{x \mid x = 2\}$ ; 当  $a > \frac{1}{2}$  时, 不等式的

解集为  $\left\{x \mid \frac{1}{a} \leq x \leq 2\right\}$ .

20. 证明: (1) 由  $f(x) = g(x)$ ,

得  $ax^2+2bx+c=0$ ,

所以  $\Delta = 4b^2-4ac = 4(b^2-ac)$ .

因为  $a > b > c, a+b+c=0$ ,

所以  $a > 0, c < 0$ , 所以  $\Delta > 0$ ,

所以  $ax^2+2bx+c=0$  有两个不等的实根,

所以  $f(x)$  的图象与  $g(x)$  的图象一定有两个交点.

(2) 假设  $\frac{c}{a} \leq -2$  或  $\frac{c}{a} \geq -\frac{1}{2}$  成立.

由  $\frac{c}{a} \leq -2$ , 结合 (1)  $a > 0$ , 得  $c \leq -2a$ ,

即  $a+c \leq -a$ , 所以  $-b \leq -a$ ,

所以  $a \leq b$ ,

这与条件中的  $a > b$  矛盾.

由  $\frac{c}{a} \geq -\frac{1}{2}$ , 得  $2c \geq -a$ ,

即  $c \geq -(a+c) = b$ ,

所以  $b \leq c$ , 这与  $b > c$  矛盾,

故假设不成立, 故原不等式成立.

21. 解: (1) 由  $f(x) > 0$ ,

得  $(ax-1)(x-1) > 0$ .

当  $a < 0$  时, 不等式的解集为  $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ ;

当  $a = 0$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, 1)$ ;

当  $0 < a < 1$  时, 不等式的解集为

$(-\infty, 1) \cup \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ ;

当  $a = 1$  时, 不等式的解集为

$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ;

当  $a > 1$  时, 不等式的解集为

$\left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup (1, +\infty)$ .

(2) 由  $f(x) + x + a - b \geq 0$ ,

得  $a(x^2-x+1) + 1 - b \geq 0$ ,

由  $x \in (0, 1)$ , 得  $\frac{3}{4} \leq x^2-x+1 < 1$ ,

故  $a \geq \frac{b-1}{x^2-x+1}$  对  $x \in (0, 1)$  恒成立,

故存在实数  $b \in [2, 3]$ ,

使得不等式  $a \geq \frac{4(b-1)}{3}$  成立,

所以  $a \geq \frac{4 \times (2-1)}{3} = \frac{4}{3}$ ,

所以  $a$  的最小值为  $\frac{4}{3}$ .

22. 解: (1) 因为  $k > 0, f(x) > m$ ,

即  $\frac{kx}{x^2+3k} > m$ ,

所以  $mx^2 - kx + 3km < 0$ .

因为不等式  $mx^2 - kx + 3km < 0$  的解集为  $\{x \mid x < -3, \text{或 } x > -2\}$ ,

所以  $-3, -2$  是方程  $mx^2 - kx + 3km = 0$  的根, 且  $m < 0$ ,

所以  $\begin{cases} \frac{k}{m} = -5, \\ 3k = 6, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k = 2, \\ m = -\frac{2}{5}. \end{cases}$

所以  $5mx^2 + \frac{k}{2}x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 < 0$ ,

解得  $-1 < x < \frac{3}{2}$ ,

所以不等式  $5mx^2 + \frac{k}{2}x + 3 > 0$  的解

集为  $\left\{x \mid -1 < x < \frac{3}{2}\right\}$ .

(2) 因为  $f(x) > 1$ , 所以  $\frac{kx}{x^2+3k} > 1$ ,

所以  $x^2 - kx + 3k < 0$ , 令  $g(x) = x^2 - kx + 3k$ ,

$x \in (3, +\infty)$ , 存在  $x_0 > 3$ , 使得  $f(x_0) > 1$  成立, 即使得  $g(x_0) < 0$  成立, 即  $[g(x)]_{\min} < 0$

成立. 当  $0 < k \leq 6$  时,  $g(x)$  在  $(3, +\infty)$  上单调递增, 所以  $g(x) > g(3) = 9$ , 显然不存在  $g(x) < 0$ ; 当  $k > 6$  时,  $g(x)$  在  $\left(3, \frac{k}{2}\right)$  上

单调递减, 在  $\left(\frac{k}{2}, +\infty\right)$  上单调递增, 所

以  $[g(x)]_{\min} = g\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} + 3k$ , 由  $-\frac{k^2}{4} +$

一、单项选择题

1~8. DBDCBCCB

二、多项选择题

9. BC 10. ABD

11. CD 12. ABC

三、填空题

13. 1

14.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

15.  $\frac{169\sqrt{3}}{20} \text{ dm}^2$

16.  $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

四、解答题

17. 证明: 由  $a > b > 0$ ,

要证  $\frac{a-b}{a+b} + \frac{2b^2}{a^2+b^2} < 1$ ,

只要证  $\frac{a-b}{a+b} < 1 - \frac{2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ,

即证  $(a-b)(a^2+b^2) < (a+b)(a^2-b^2)$ ,

即证  $a^3+ab^2-ba^2-b^3 < a^3-ab^2+ba^2-b^3$ ,

即证  $2ab^2 < 2ba^2$ ,

即  $b < a$ . 上式显然成立,

所以原不等式成立.

18. 解: (1) 因为  $(a+b)\sqrt{ab}=1$ ,

所以  $a+b = \frac{1}{\sqrt{ab}}$ ,

因为  $a > 0, b > 0$ ,

所以  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ,

当且仅当  $a=b$  时取等号,

所以  $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{ab}$ ,

所以  $ab \leq \frac{1}{2}$ .

所以  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3}} =$

$\frac{2}{ab\sqrt{ab}} \geq 4\sqrt{2}$ ,

当且仅当  $a=b$  时取等号,

所以  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$  的最小值为  $4\sqrt{2}$ .

(2) 因为  $a > 0, b > 0$ ,

所以  $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{3b}} =$

$\frac{2}{\sqrt{6ab}} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,

当且仅当  $a=b$  时取等号.

因为  $\frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,

所以不存在  $a, b$ ,

使得  $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b}$  的值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

19. 解: (1) 因为不等式  $2ax-b > 0$  的解集为  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ , 所以  $a > 0$ , 且  $a=b$ ,

所以  $f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{a(2x-1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow a(2x-$

$1) \cdot (x-1) < 0$ , 所以  $f(x) < 0$  的解集为  $(\frac{1}{2}, 1)$ .

(2)  $a = \frac{1}{2}$  时, 不等式  $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) =$

$\frac{x-b}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x-b)(x-1) > 0$ .

① 当  $b > 1$  时,

不等式的解集为  $(-\infty, 1) \cup (b, +\infty)$ ;

② 当  $b = 1$  时,

不等式的解集为  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ;

③ 当  $b < 1$  时,

不等式的解集为  $(-\infty, b) \cup (1, +\infty)$ .

20. 解: (1) 因为关于  $x$  的方程  $x^2 + 2(m-2)x + m^2 + 4 = 0$  有实数根, 两根的平方和比两根之积大 21, 设两实数根分别为  $x_1, x_2$ ,

故有  $\begin{cases} \Delta = 4(m-2)^2 - 4(m^2+4) \geq 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 21, \end{cases}$

即  $\begin{cases} -16m \geq 0, \\ [2(2-m)]^2 = 3 \times (m^2+4) + 21, \end{cases}$

解得  $m = -1$ .

(2) 若方程  $x^2 + 2(m-2)x + m^2 + 4 = 0$  的两根均大于 1, 令  $f(x) = x^2 + 2(m-2)x + m^2 + 4$ ,

$\Delta = 4(m-2)^2 - 4(m^2+4) \geq 0$ ,

则  $\begin{cases} \frac{2(2-m)}{2} > 1, \\ f(1) = 1 + 2(m-2) + m^2 + 4 > 0, \end{cases}$

解得  $m \leq 0$  且  $m \neq -1$ .

所以实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0]$ .

21. 解: (1) 设矩形栏目的高为  $a$  cm, 宽为  $b$  cm ( $a > 0, b > 0$ ), 则  $ab = 20000$ , 所以  $b = \frac{20000}{a}$ . 由题意, 得海报的高为  $(a+20)$  cm,

宽为  $(3b+30)$  cm,

所以海报的面积  $S = (a+20)(3b+30) =$

$30(a+2b) + 60600 = 30\left(a + \frac{40000}{a}\right) + 60600 \geq$

$30 \times 2\sqrt{a \cdot \frac{40000}{a}} + 60600 = 72600$ , 当且仅

当  $a = \frac{40000}{a}$ , 即  $a = 200$  时, 等号成立, 此

时  $b = 100$ .

故当矩形栏目的高为 200 cm, 宽为 100 cm 时, 整个矩形海报的面积最小, 最小值为 72600 cm<sup>2</sup>.

(2) 由题意, 得  $b \geq 2a$ ,

又  $b = \frac{20000}{a}, a > 0$ ,

解得  $0 < a \leq 100$ ,

由(1)得海报的面积  $S = 30\left(a + \frac{40000}{a}\right) +$

$60600$ , 因为函数  $S$  在  $(0, 100]$  上单调递减, 所以当  $a = 100$  时,  $S$  取得最小值, 最小值为 75600.

故当矩形栏目的高为 100 cm, 宽为 200 cm 时, 整个矩形海报的面积最小, 最小值为 75600 cm<sup>2</sup>.

22. 解: (1) 要使不等式  $mx^2 - 2x - m + 1 < 0$  恒成立, 只需  $\begin{cases} m < 0, \\ \Delta = (-2)^2 - 4m(-m+1) < 0, \end{cases}$  该不等式组无解, 所以不存在实数  $m$ , 使对所有的实数  $x$ , 不等式  $mx^2 - 2x - m + 1 < 0$  恒成立.

(2) 由  $|m| \leq 2$ , 得  $-2 \leq m \leq 2$ .

由  $mx^2 - 2x - m + 1 < 0$ ,

得  $(x^2 - 1)m - 2x + 1 < 0$ .

令  $f(m) = (x^2 - 1)m - 2x + 1$  ( $-2 \leq m \leq 2$ ),

则  $f(m) < 0$ .

当  $x = 1$  时,  $f(m) = -1 < 0$ , 满足题意;

当  $x = -1$  时,  $f(m) = 3 > 0$ , 不满足题意;

当  $x \neq \pm 1$  时, 要使  $f(m) < 0$ ,

只需  $\begin{cases} f(-2) < 0, \\ f(2) < 0, \end{cases}$

即  $\begin{cases} (x^2 - 1)(-2) - 2x + 1 < 0, \\ (x^2 - 1) \times 2 - 2x + 1 < 0, \end{cases}$

解得  $\frac{-1 + \sqrt{7}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ .

综上,  $x$  的取值范围是  $\left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$ .

第 15 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8. DACAAACB

二、多项选择题

9. BCD 10. BC

11. BCD 12. ABD

三、填空题

13.  $39\pi$  14.  $\sqrt[3]{3}$

15.  $\frac{\pi}{4}$  16.  $\frac{27}{8}$

四、解答题

17. 解: 由已知条件, 得  $CD = 2, BC = 2$ . 阴影部分绕  $AB$  所在直线旋转一周得到的旋转体是圆台挖去半球所得组合体, 其中圆台的上、下底面半径分别为 1, 2, 高为  $\sqrt{3}$ , 母线长为 2, 球的半径为 1.

所以旋转体的体积  $V = V_{\text{圆台}} - V_{\text{半球}} = \frac{1}{3}\pi \times \sqrt{3} \times (2^2 + 2 \times 1 + 1^2) - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{7\sqrt{3}-2}{3}\pi$ ,

表面积  $S = S_{\text{半球}} + S_{\text{圆台侧}} + S_{\text{圆台下底}} = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 1^2 + \pi \times (1+2) \times 2 + \pi \times 2^2 = 12\pi$ .

18. 解: (1) 设圆锥底面半径为  $r$  cm, 母线的长为  $l$  cm, 则  $l = 10$  cm, 且  $2\pi r = \pi l$ , 解得  $r = 5$  cm, 所以该圆锥的表面积  $S = \pi rl = 50\pi$  (cm<sup>2</sup>), 高  $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 5\sqrt{3}$  (cm), 所以该圆锥的体积为  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$  (cm<sup>3</sup>).

(2) 由(1)知, 圆锥的轴截面为等边三角形, 且边长为 10 cm, 所以最高点到桌面的距离为等边三角形的高,  $h' = 5\sqrt{3}$  cm. 故该圆锥被吹倒后, 其最高点到桌面的距离  $d = 5\sqrt{3}$  cm.

19. (1) 解: 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $BB_1 \perp A_1B_1$ , 又  $BF \perp A_1B_1, BB_1 \cap BF = B, BB_1, BF \subset$  平面  $BCC_1B_1$ ,

所以  $A_1B_1 \perp$  平面  $BCC_1B_1$ .

因为  $AB \parallel A_1B_1$ ,

所以  $AB \perp$  平面  $BCC_1B_1$ , 又  $BC \subset$  平面  $BCC_1B_1$ , 所以  $AB \perp BC$ , 又  $AB = AC = 2$ ,

所以  $AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ .

又  $E$  为  $AC$  的中点,

所以  $CE = BE = \sqrt{2}, BE \perp AC$ ,

又侧面  $AA_1B_1B$  为正方形,  $F$  为  $CC_1$  的中点, 所以  $AA_1 = AB = 2, CF = \frac{1}{2}CC_1 =$

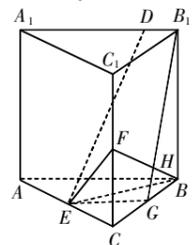
$\frac{1}{2}AA_1 = 1$ ,

所以  $V_{F-EBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle EBC} \cdot CF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{1}{3}$ , 即三棱锥  $F-EBC$  的

体积为  $\frac{1}{3}$ .

(2) 证明: 如图, 取  $BC$  的中点  $G$ , 连

接  $EG, B_1G$ , 设  $B_1G \cap BF = H$ , 因为点  $E$  是  $AC$  的中点, 点  $G$  是  $BC$  的中点, 所以  $EG \parallel AB$ , 又  $AB \parallel B_1D$ , 所以  $EG \parallel B_1D$ , 所以  $E, G, B_1, D$  四点共面, 由(1)可得  $AB \perp$  平面  $BCC_1B_1$ , 所以  $EG \perp$  平面  $BCC_1B_1$ , 所以  $BF \perp EG$ . 因为  $\tan \angle CBF = \frac{CF}{BC} = \frac{1}{2}$ ,  $\tan \angle BB_1G = \frac{BG}{BB_1} = \frac{1}{2}$ , 且  $\angle CBF$  和  $\angle BB_1G$  都是锐角, 所以  $\angle CBF = \angle BB_1G$ , 所以  $\angle BHB_1 = \angle BGB_1 + \angle CBF = \angle BGB_1 + \angle BB_1G = 90^\circ$ , 所以  $BF \perp B_1G$ . 又  $EG \cap B_1G = G, EG, B_1G \subset$  平面  $EGB_1D$ , 所以  $BF \perp$  平面  $EGB_1D$ , 又  $DE \subset$  平面  $EGB_1D$ , 所以  $BF \perp DE$ .



(第 19 题图)

20. (1) 证明: 因为等腰梯形  $ABCD$ ,  $AB = 2, CD = 6, AD = 2\sqrt{2}$ ,  $E, F$  分别是  $CD$  的两个三等分点, 所以四边形  $ABEF$  是正方形, 所以  $BE \perp EF$ . 因为  $BE \perp PE$ , 且  $PE \cap EF = E$ , 所以  $BE \perp$  平面  $PEF$ . 又  $BE \subset$  平面  $ABEF$ , 所以平面  $PEF \perp$  平面  $ABEF$ .

(2) 解: 在等腰梯形中,

由(1)知,  $AF = FE = DF = CE = 2$ ,

所以  $S_{\text{梯形}} = \frac{(2+6) \times 2}{2} = 8$ ,

即折起后  $S_{\triangle PAF} + S_{\triangle PFE} + S_{\triangle PEF} = S_{\text{梯形}} = 8$ .

在  $\triangle PAB$  中,  $PA = PB = 2\sqrt{2}, AB = 2$ ,

所以  $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$ .

在  $\triangle PEF$  中,  $PE = PF = EF = 2$ ,

所以  $S_{\triangle PEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ .

所以四棱锥  $P-ABEF$  的表面积  $S = 8 + \sqrt{3} + \sqrt{7}$ .

21. (1) 证明: 连接  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ , 连接  $OE$ . 因为四边形  $ABCD$  是直角梯形, 且  $AD \perp DC, AD \parallel BC, AD = 4, BC = 2$ , 所以  $\triangle ADO \sim \triangle CBO$ , 且  $\frac{AO}{OC} = \frac{AD}{CB} = 2$ . 又点  $E$  为线段  $PA$  的靠近点  $P$  的三等分点, 所以  $\frac{AE}{EP} = 2$ , 所以  $\frac{AO}{OC} = \frac{AE}{EP}$ , 所以  $OE \parallel CP$ .

又  $OE \subset$  平面  $BDE, PC \not\subset$  平面  $BDE$ , 所以  $PC \parallel$  平面  $BDE$ .

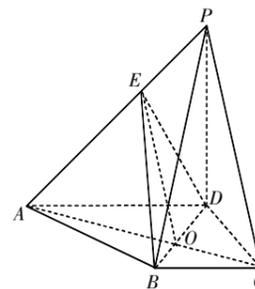
(2) 解: 因为异面直线  $PA$  与  $BC$  所成的角为  $45^\circ, AD \parallel BC$ , 所以  $\angle PAD = 45^\circ$ ,

又  $PD \perp$  平面  $ABCD, AD \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $PD \perp AD$ , 又  $AD = 4$ ,

所以  $PD = AD = 4$ .

所以  $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{梯形 } ABCD} \cdot PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (2+4) \times 2 \times 4 = 8$ , 所以  $V_{E-ABD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABD} \cdot \frac{2}{3} \cdot PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{2}{3} \times 4 = \frac{32}{9}$ . 所以多面体  $BCDEP$  的体积  $V_{BCDEP} = V_{P-ABCD} - V_{E-ABD} = 8 - \frac{32}{9} = \frac{40}{9}$ .



(第 21 题图)

22. (1) 证明: 因为  $P$  在  $\odot O$  上,  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 所以  $AP \perp BP$ . 因为  $AA_1 \perp$  平面  $PAB$ , 所以  $AA_1 \perp BP$ . 又  $AP \cap AA_1 = A$ , 所以  $BP \perp$  平面  $PAA_1$ , 又  $A_1P \subset$  平面  $PAA_1$ , 故  $BP \perp A_1P$ .

(2) 解: ① 由题意知,  $V_{\text{圆柱}} = \pi \cdot OA^2 \cdot AA_1 = 4\pi \cdot AA_1 = 12\pi$ , 解得  $AA_1 = 3$ . 由  $OA = 2, \angle AOP = 120^\circ$ , 得  $\angle BAP = 30^\circ, BP = 2, AP = 2\sqrt{3}$ ,

所以  $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ,

所以三棱锥  $A_1-APB$  的体积

$V_{A_1-APB} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PAB} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times 3 =$

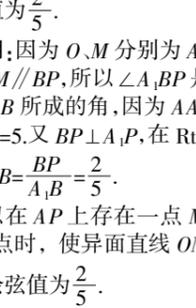
$2\sqrt{3}$ .

② 在  $AP$  上存在一点  $M$ , 当  $M$  为  $AP$  的中点时, 使异面直线  $OM$  与  $A_1B$  所成角的余弦值为  $\frac{2}{5}$ .

证明: 因为  $O, M$  分别为  $AB, AP$  的中点, 则  $OM \parallel BP$ , 所以  $\angle A_1BP$  是异面直线  $OM$  与  $A_1B$  所成的角, 因为  $AA_1 = 3, AB = 4$ , 所以  $A_1B = 5$ . 又  $BP \perp A_1P$ , 在  $\text{Rt} \triangle A_1PB$  中,

$\cos \angle A_1BP = \frac{BP}{A_1B} = \frac{2}{5}$ .

所以在  $AP$  上存在一点  $M$ , 当  $M$  为  $AP$  的中点时, 使异面直线  $OM$  与  $A_1B$  所成角的余弦值为  $\frac{2}{5}$ .



(第 22 题图)