第 36 期

第 1 版

专题三　立体几何

参考答案

1~5.ADBCD　　6~10.BBDBB

11~15.CCBAD　　16~17.BA

第 2 版

专题四　三角函数

参考答案

1~5.DACAD　　6~10.ABBBD

11~15.DBBAC　　16~20.ABDDD

21.D

提示：$f(x)$图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到函数$g(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$的图象.由于函数$g(x)$为偶函数，故$\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in Z)$，则$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$.因为$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，故$f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$，故选D.

22.B

提示：由满足$|f(x_1)-f(x_2)|=2$的x_1,x_2，有$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，得$T=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.因为函数$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，所以$2\times\frac{\pi}{6}+\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，又$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\theta=\frac{\pi}{6}$，所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到函数$g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos2x$的图象.令$2k\pi\leqslant2x\leqslant2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，得$k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则函数$g(x)$的单调递减区间是$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，故选B.

23.A

提示：因为$0<x<\pi$，所以$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$.令$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，又方程$f(x)=\frac{3}{5}$的解为$x_1,x_2(0<x_1<x_2<\pi)$，所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{3}$，所以$x_2=\frac{2\pi}{3}-x_1$，所以$\sin(x_1-x_2)=\sin\left(2x_1-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)$，因为$0<x_1<x_2,x_2=\frac{2\pi}{3}-x_1$，所以$0<x_1<\frac{\pi}{3}$，所以$2x_1-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，又$f(x_1)=\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，则$\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，所以$\sin(x_1-x_2)=-\frac{4}{5}$，故选A.

第 3 版

专题五　平面向量、解三角形

参考答案

1~5.CDBDD　　6~10.CAAAB

11~15.CDACC　　16~20.BDADC

21~23.ADD

24.C

提示：由题意可得$\angle DAC=75°$，$\angle DBC=45°$，在$\triangle ADC$中，由正弦定理可得$AC=\frac{CD\cdot\sin\angle ADC}{\sin\angle DAC}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin75°}=2\sqrt{3}$，在$\triangle BCD$中，由正弦定理可得$BC=\frac{CD\cdot\sin\angle BDC}{\sin\angle DBC}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}+1$，在$\triangle ACB$中，由余弦定理$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\times2\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+1)\times\frac{1}{2}=10$，所以$AB=\sqrt{10}$，故选C.

25.B

提示：由题意可知$AB\perp MN$，圆C的半径$r=3$，$OP=\sqrt{5}$，所以$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$AB=2\sqrt{r^2-OP^2}=4$，所以$(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BN})\cdot\overrightarrow{AB}=[\overrightarrow{AM}-(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})]\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}^2=16$，故选B.

26.A

提示：因为$2c\cos B=2a+b$，则由正弦定理得$2\sin C\cos B=2\sin A+\sin B$，$a=4\sin A$，$b=4\sin B$，所以$2\sin C\cos B=2\sin A+\sin B=2\sin[\pi-(B+C)]+\sin B=2\sin B\cos C+2\sin C\cos B+\sin B$，所以$2\sin B\cos C=-\sin B$.又因为$\sin B\neq0$，所以$\cos C=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{2\pi}{3}$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=4\sqrt{3}\cdot\sin A\sin B=4\sqrt{3}\cdot\sin A\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin A\cos A-\frac{1}{2}\sin^2A\right)=3\sin2A+\sqrt{3}\cos2A-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}$.因为$0<A<\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{\pi}{6}<2A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以当$2A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$A=\frac{\pi}{6}$时，$\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)$取到最大值1，所以$(S_{\triangle ABC})_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$，故选A.

第 4 版

专题六　数列

参考答案

1~5.CBAAA　　6~10.BCAAD

11~15.CADCC　　16~20.ABCBC

21~25.BAABD　　26~27.CD

28.B

提示：因为$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2(n+2)}{n+1}a_n$，$(n\in N_+)$，则$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=2^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot2=2^{n-1}\cdot(n+1)(n\in N_+)$，设数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，所以$S_n=2\cdot2^0+3\cdot2^1+4\cdot2^2+\cdots+2^{n-1}\cdot(n+1)$，则$2S_n=2\cdot2^1+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+2^n\cdot(n+1)$，两式相减得$-S_n=2+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-2^n\cdot(n+1)=2+\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-2^n\cdot(n+1)=-n\cdot2^n$，所以$S_n=n\cdot2^n$，所以$\frac{a_{2020}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2019}}=\frac{2021\cdot2^{2019}}{2019\cdot2^{2019}}=\frac{2021}{2019}$，故选B.

29.B

提示：等比数列$\{a_n\}$的首项为$\frac{3}{2}$，公比为$-\frac{1}{2}$，前n项和为$S_n=\frac{3}{2}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，$S_n-\frac{1}{S_n}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.设$\left(-\frac{1}{2}\right)^n=t$，则$t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$，数列对应函数为$f(t)=1-t-\frac{1}{1-t}$，易知$1-t$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$上单调递减，$-\frac{1}{1-t}$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$上单调递减，故$f(t)=1-t-\frac{1}{1-t}$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$上单调递减，$[f(t)]_{\max}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$，$[f(t)]_{\min}=f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{7}{12}$，$S_n-\frac{1}{S_n}$的最小值与最大值的比值为$-\frac{7}{10}$，故选B.

30.C

提示：因为$a_{n+1}=2S_n+3$，所以$a_n=2S_{n-1}+3(n\geqslant2)$，所以$a_{n+1}-a_n=2a_n$，即$a_{n+1}=3a_n$，且$a_2=2S_1+3=9$，所以$a_n=9\cdot3^{n-2}=3^n(n\geqslant2)$，且$n=1$时$a_1=3$符合，所以$a_n=3^n(n\in N_+)$.因为$b_n=\log_3a_n=n$，所以$\frac{b_n}{a_n}=\frac{n}{3^n}$，所以$T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}$，$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}$，所以$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]-\frac{n}{3^{n+1}}$，所以$T_n=\frac{3}{4}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]-\frac{n}{2\cdot3^n}=\frac{3}{4}-\frac{3+2n}{4\cdot3^n}<\frac{3}{4}$.令$f(n)=\frac{3+2n}{4\cdot3^n}$，所以$f(n+1)=\frac{2n+5}{4\cdot3^{n+1}}$，所以$f(n+1)-f(n)=\frac{2n+5}{4\cdot3^{n+1}}-\frac{2n+3}{4\cdot3^n}=-\frac{n+1}{3^{n+1}}<0$，所以$f(n)$是单调递减的，所以$f(n)\leqslant f(1)=\frac{5}{12}$，所以$T_n\geqslant\frac{3}{4}-\frac{5}{12}=\frac{1}{3}$.综上，$T_n\in\left[\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$，故选C.

第33期

第2~3版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.CDBDBD　　7~12.ABCCCB

二、填空题

13.$2\sqrt{2}$　　14.1　　15.$\sqrt{2}-1$

16.$-\frac{1}{m}$，$\{m|0<m\leqslant1$，或$m=2\}$

三、解答题

17.**解**：(1)在直线$x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$中，令$x=0$，得$y=1$，令$y=0$，$x=\sqrt{3}$，由题设，得$c=\sqrt{3}$，$b=1$，则$a^2=b^2+c^2=4$，所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由(1)得$F_2(\sqrt{3},0)$，显然直线l的斜率不为0，设直线l的方程为$x=my+\sqrt{3}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}x=my+\sqrt{3},\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$(4+m^2)y^2+2\sqrt{3}my-1=0$，得$y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{3}m}{4+m^2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{4+m^2}$，所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot|OF_2||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{12m^2}{(4+m^2)^2}+\frac{4}{4+m^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4\sqrt{1+m^2}}{4+m^2}=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{1+m^2}}{4+m^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，即$2m^4-9m^2+7=0$，解得$m=\pm1$或$m=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$，所以直线l的方程为$x\pm y-\sqrt{3}=0$或$x\pm\frac{\sqrt{14}}{2}y-\sqrt{3}=0$.

18.**解**：(1)由题可得$A(-a,0)$，$B(a,0)$，$G(0,1)$，

所以$\overrightarrow{AG}=(a,1)$，$\overrightarrow{GB}=(a,-1)$，所以$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1=8$，所以$a=3$，

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)设$P(6,t)$，则直线AP的方程为$y=\frac{t-0}{6-(-3)}(x+3)$，即$y=\frac{t}{9}(x+3)$.

联立直线AP的方程与椭圆E的方程，可得$(t^2+9)x^2+6t^2x+9t^2-81=0$，

解得$x=-3$或$x=\frac{-3t^2+27}{t^2+9}$，将$x=\frac{-3t^2+27}{t^2+9}$代入直线$y=\frac{t}{9}(x+3)$，可得$y=\frac{6t}{t^2+9}$，

所以点C的坐标为$\left(\frac{-3t^2+27}{t^2+9},\frac{6t}{t^2+9}\right)$.

同理可得点D的坐标为$\left(\frac{3t^2-3}{t^2+1},\frac{-2t}{t^2+1}\right)$，

所以直线CD的方程为$y-\frac{-2t}{t^2+1}=\frac{\frac{6t}{t^2+9}-\frac{-2t}{t^2+1}}{\frac{-3t^2+27}{t^2+9}-\frac{3t^2-3}{t^2+1}}\left(x-\frac{3t^2-3}{t^2+1}\right)$，整理，得$y=\frac{4t}{3(3-t^2)}x+\frac{2t}{t^2-3}=\frac{4t}{3(3-t^2)}\left(x-\frac{3}{2}\right)$，故直线CD过定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

19.**解**：(1)由题意得$2b=2\sqrt{3}$，即$b=\sqrt{3}$，由$\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_2}=0$，得AB的中点为$F_2$，则$\triangle ABF_1$的周长为$|AF_1|+|AF_2|+(|BF_1|+|BF_2|)=2a+2a=4a=8$，即有$a=2$，则椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)显然直线l的斜率存在且不为0，设直线l的方程为$y=kx+t$，联立$\begin{cases}y=kx+t,\\3x^2+3y^2=12,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，由$\Delta=64k^2t^2-4(3+4k^2)\cdot(4t^2-12)=0$，得$t^2=4k^2+3$，则$x_M=-\frac{8kt}{2(3+4k^2)}=-\frac{4k}{t}$，由$OP\perp l$，得直线OP的方程为$y=-\frac{1}{k}x$，联立$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x,\\y=kx+t,\end{cases}$得$x_P=-\frac{kt}{k^2+1}$，所以$|MP|=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|-\frac{4k}{t}+\frac{kt}{k^2+1}\right|=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|\frac{-4k^3-4k+kt^2}{t(k^2+1)}\right|=\frac{|k|}{|t|\sqrt{1+k^2}}$，又$|OP|=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以$S_{\triangle OMP}=\frac{1}{2}\cdot|MP|\cdot|OP|=\frac{1}{2}\frac{|k|}{|t|\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|k|+\frac{1}{|k|}}\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，当且仅当$k=\pm1$时，等号成立.所以$\triangle OMP$的面积的最大值为$\frac{1}{4}$.

20.**解**：(1)由题设得点M横坐标为$x=\frac{p}{2}$，则纵坐标为p，则$M\left(\frac{p}{2},p\right)$，则点M到直线$l:y=x+4p$的距离为$\frac{\left|\frac{p}{2}-p+4p\right|}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$，解得$p=4$，所以抛物线C的方程为$y^2=8x$.

(2)设直线AB的方程$x=my+2$，当$m=0$时，此时x轴上的任意一点P都符合题意.当$m\neq0$时，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(t,0)$，联立$\begin{cases}y^2=8x,\\x=my+2,\end{cases}$得$y^2-8my-16=0$，所以$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$，因为直线PA与直线PB关于x轴对称，所以$\angle APO=\angle BPO$，所以$k_{AP}+k_{BP}=0$，所以$\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=0$，所以$y_1(x_2-t)+y_2(x_1-t)=0$，即$y_1(my_2+2-t)+y_2(my_1+2-t)=0$，所以$2my_1y_2+(2-t)(y_1+y_2)=0$，所以$-32m+8m(2-t)=0$，解得$t=-2$，故点P的坐标为$(-2,0)$.

综上，存在唯一的点$P(-2,0)$，使得直线PA与直线PB关于x轴对称.

21.(1)**解**：因为F的坐标为$(1,0)$，直线PF的斜率为-1，所以直线PF的方程为$y=-(x-1)$.设A,B两点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，联立$\begin{cases}y^2=4x,\\y=-(x-1),\end{cases}$得$x^2-6x+1=0$，所以$x_1+x_2=6$，则$|AB|=x_1+x_2+2=8$.又点$D(-1,0)$到直线$x+y-1=0$的距离$d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以$S_{\triangle DAB}=\frac{1}{2}\times8\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

(2)**证明**：设直线$l:y=k(x-1)$，则$P(-1,-2k)$，联立$\begin{cases}y^2=4x,\\y=k(x-1),\end{cases}$可得$ky^2-4y-4k=0$，则$y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=-4$，因为$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{PB}$，所以$(1-x_1,-y_1)=\lambda(x_2-1,y_2)$，$(-1-x_1,-2k-y_1)=\mu(x_2+1,y_2+2k)$，所以$\lambda=-\frac{y_1}{y_2}$，$\mu=-\frac{y_1+2k}{y_2+2k}$.所以$\lambda+\mu=-\frac{y_1}{y_2}-\frac{y_1+2k}{y_2+2k}=-\frac{2y_1y_2+2k(y_1+y_2)}{y_2(y_2+2k)}=-\frac{-8+8}{y_2(y_2+2k)}=0$(定值).

22.**解**：(1)由题意可得$c=1$，则$a^2=b^2+1$，联立$\begin{cases}y=x-\sqrt{3},\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$得$(a^2+b^2)x^2-2\sqrt{3}a^2x+3a^2-a^2b^2=0$，由题意可得$\Delta=12a^4-4(a^2+b^2)(3a^2-a^2b^2)=0$，即$3a^2=(a^2+b^2)(3-b^2)$，又$a^2=b^2+1$，则$3(b^2+1)=(2b^2+1)(3-b^2)$，即$b^2(b^2-1)=0$，得$b^2=1$，$a^2=2$，所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)由(1)得$F_1(-1,0)$，当直线l_1的斜率不存在(或为0)时，$S_{四边形PMQN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$；当直线$l_1$的斜率存在且不为0时，设直线$l_1$的方程为$x=my-1$，则直线$l_2$的方程为$y=-m(x+1)$，设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}x=my-1,\\\frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$(2+m^2)y^2-2my-1=0$，则$y_1+y_2=\frac{2m}{2+m^2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{2+m^2}$，所以$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{2}(1+m^2)}{2+m^2}$.同理可得$|MN|=\frac{2\sqrt{2}(1+m^2)}{1+2m^2}$，所以$S_{四边形PMQN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}(1+m^2)}{2+m^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}(1+m^2)}{1+2m^2}=\frac{4(1+m^2)^2}{(2+m^2)(1+2m^2)}$，令$t=1+m^2>1$，所以$m^2=t-1$，所以$S_{四边形PMQN}=\frac{4t^2}{(1+t)(2t-1)}=\frac{4}{-\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}+2}$，又$-\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}+2=-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，$\frac{1}{t}\in(0,1)$，所以$S_{四边形PMQN}\in\left[\frac{16}{9},2\right)$.

综上，四边形PMQN面积的取值范围为$\left[\frac{16}{9},2\right)$.

第 34 期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.BCACDC　　7~12.DBCDAA

二、填空题

13.$\frac{1}{6}$　14.甲　15.99.5%　16.$1-\frac{\pi}{10}$

三、解答题

17.解:(1)由表可知抽取比例为$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$,故 a=4,b=24,c=2.

(2)设“动漫”社团的 4 人分别为:A_1,A_2,A_3,A_4;“话剧”社团的 2 人分别为:B_1,B_2. 则从中任选 2 人的所有基本事件为:(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,A_4),(A_2,A_3),(A_2,A_4),(A_3,A_4),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_4,B_2),(B_1,B_2),共 15 个.

其中 2 人分别来自这两个社团的基本事件为:(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_4,B_2),共 8 个.

所以这 2 人分别来自这两个社团的概率 $P=\frac{8}{15}$.

18.解:(1)第二种生产方式的效率更高.

理由如下:

(i)由茎叶图可知:用第一种生产方式的工人中,有 75%的工人完成生产任务所需时间至少 80 分钟,用第二种生产方式的工人中,有 75%的工人完成生产任务所需时间至多 79 分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.

(ii)由茎叶图可知:用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 85.5 分钟,用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 73.5 分钟.因此第二种生产方式的效率更高.

(iii)由茎叶图可知:用第一种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间高于 80 分钟;用第二种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间低于 80 分钟,因此第二种生产方式的效率更高.

(iv)由茎叶图可知:用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 8 上的最多,关于茎 8 大致呈对称分布;用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 7 上的最多,关于茎 7 大致呈对称分布,又用两种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布的区间相同,故可以认为用第二种生产方式完成生产任务所需的时间比用第一种生产方式完成生产任务所需的时间更少,因此第二种生产方式的效率更高.

(以上给出了 4 种理由,考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分.)

(2)由茎叶图知 $m=\frac{79+81}{2}=80$.

列联表如下:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

(3)由列联表,得 K^2 的观测值为 $k=\frac{40\times(15\times15-5\times5)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$,所以有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

19.解:(1)基本事件与点集 $S=\{(x,y)|x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N},1\leqslant x\leqslant5,1\leqslant y\leqslant5\}$ 中的元素一一对应.

因为 S 中点的总数为 25 个,

所以基本事件总数为 25.

事件 A 包含的基本事件共 5 个:

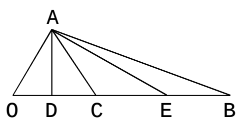
(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1).

所以 $P(A)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

(2)B 与 C 不是互斥事件.

因为事件 B 与 C 可以同时发生,如“甲赢一次,乙赢两次”的事件即符合题意.

20.解:如图,由平面几何知识得,



(第 20 题图)

当 AD⊥OB 时,OD=1;

当 OA⊥AE 时,OE=4,BE=1.

(1)当且仅当点 C 在线段 OD 或 BE 上时,△AOC 为钝角三角形,记“△AOC 为钝角三角形”为事件 M,则 $P(M)=\frac{OD+EB}{OB}=\frac{1+1}{5}=\frac{2}{5}$,即△AOC 为钝角三角形的概率为$\frac{2}{5}$.

(2)当且仅当点 C 在线段 DE 上时,△AOC 为锐角三角形,记“△AOC 为锐角三角形”为事件 N,则 $P(N)=\frac{DE}{OB}=\frac{3}{5}$,即△AOC 为锐角三角形的概率为$\frac{3}{5}$.

21.解:(1)$\bar{y}=\frac{1}{5}(7.8+8.6+10.0+11.1+12.5)=10$,$\bar{z}=\frac{1}{5}(6.2+10.6+8.2+6.6+13.4)=9$,$s_y^2=2.852$,$s_z^2=7.232$,

因为$\bar{y}>\bar{z}$,$s_y^2<s_z^2$,且甲行业摊主这5年的收入情况一直呈现递增趋势,所以小张选择甲行业创业更合适.

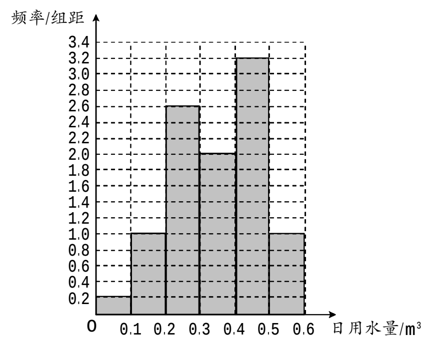
(2)$\bar{x}=2017$,$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{(-2)\times(-2.2)+(-1)\times(-1.4)+0+1.1+2\times2.5}{10}=1.19$.

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=10-1.19\times2017=-2390.23$.

所以年收入y关于年份x的线性回归方程为$\hat{y}=1.19x-2390.23$.

当x=2020时,$\hat{y}=1.19\times2020-2390.23=13.57$. 故甲行业摊主在2020年的年收入的估计值为13.57万元.

22.解:(1)



(第 22 题图)

(2)根据以上数据,该家庭使用节水龙头后 50 天日用水量小于 0.35m³ 的频率为

$0.2\times0.1+1\times0.1+2.6\times0.1+2\times0.05=0.48$,

因此该家庭使用节水龙头后日用水量小于 0.35m³ 的概率的估计值为 0.48.

(3)该家庭未使用节水龙头 50 天日用水量的平均数为

$\bar{x}_1=\frac{1}{50}\times(0.05\times1+0.15\times3+0.25\times2+0.35\times4+0.45\times9+0.55\times26+0.65\times5)=0.48$.

该家庭使用了节水龙头后 50 天日用水量的平均数为

$\bar{x}_2=\frac{1}{50}\times(0.05\times1+0.15\times5+0.25\times13+0.35\times10+0.45\times16+0.55\times5)=0.35$.

估计使用节水龙头后,一年可节省水

$(0.48-0.35)\times365=47.45(m^3)$.

第 35 期

第 2 版

专题一　集合与常用逻辑用语

参考答案

1~5.DADDB　　6~10.CCCDD

11~15.CAACD　　16~20.CAACD

21.A

提示:由 $2^x>2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$,解得 $x>\frac{3}{2}$;由 $\log_{\frac{1}{2}}(x-a)<0=\log_{\frac{1}{2}}1$,得 $x>a+1$.因为$\{x|2^x>2\sqrt{2}\}=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(x-a)<0\}$,所以 $a+1=\frac{3}{2}$,解得 $a=\frac{1}{2}$,故选 A.

22.C

提示:因为命题“$\forall x\in[0,3]$,都有 $x^2-2x-m\neq0$”是假命题,所以命题“$\exists x\in[0,3]$,使得 $x^2-2x-m=0$”成立是真命题,故 $m=x^2-2x=(x-1)^2-1$.因为 $x\in[0,3]$,所以 $m\in[-1,3]$.故选 C.

23.C

提示:因为 $A=\{(x,y)|x^2-6x+y^2-4y+9=0\}=\{(x,y)|(x-3)^2+(y-2)^2=4\}$,$B=\{(x,y)|(x+1)^2+(y-2)^2=9\}$,可知圆心距 $d=\sqrt{[3-(-1)]^2+(2-2)^2}=4$,得 $1=|2-3|<d<2+3=5$,所以两圆的位置关系为相交,所以 $A\cap B$ 中有 2 个元素,故选 C.

24.D

提示:$P=\{x||x-1|\leqslant1\}=\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$,$Q=\{x|y=\sqrt{x-1}\}=\{x|x\geqslant1\}$,因为 $P\bigstar Q=\{x|x\in P\cup Q$,且 $x\notin P\cap Q\}$.

所以 $P\bigstar Q=\{x|0\leqslant x<1$ 或 $x>2\}$,故选 D.

25.D

提示:因为集合 M 表示椭圆上点的横坐标的取值范围为$[-2,2]$,集合 N 表示不等式的解集$(-1,3]$,集合$\left\{x\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\right.\right\}$表示圆上点的横坐标的取值范围为$[-2,-1]$,故选 D.

26.C

提示:当 x=b 时,$f(x)_{max}=-b^2+2b^2=b^2$,令 $t=f(x)$,则 $f(f(x))=f(t)=-t^2+2bt$,当 $t=b\leqslant b^2$ 时,即 $b\geqslant1$ 或 $b\leqslant0$,$f(f(x))$的最大值是 b^2,故 $b\geqslant1$ 或 $b\leqslant0$ 时,$f(f(x))$的最大值和 $f(x)$的最大值相等.由 $\frac{5}{b+3}\leqslant1$,解得 $b\geqslant2$ 或 $b<-3$,根据集合的包含关系判断 C 正确,故选 C.

27.C

提示:集合 B 可以用△MPQ 所表示的平面区域表示,集合 A 可用圆心为坐标原点,半径为 a 的圆面表示,因为 $A\subseteq B$,则圆面在△MPQ 内,又原点到直线 $2x+y+2=0$ 的距离 $d_1=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,原点到直线 $x-y+2=0$ 的距离 $d_2=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,原点到直线 $4x-3y-5=0$ 的距离 $d_3=\frac{5}{5}=1$,又 $M\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$,则 $|OM|=\frac{2\sqrt{5}}{3}>d_1$,$P\left(-\frac{1}{10},-\frac{9}{5}\right)$,$|OP|>1$,易得$|OQ|>1$,则 $0<a\leqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$,故选 C.

28.A

提示:由 $n\lg a<(n+1)\lg a^a$,得 $n\lg a<a(n+1)\lg a$.因为 $a>1$,所以 $\lg a>0$,所以 $n<a(n+1)$,即 $a>\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$.又 $1-\frac{1}{n+1}<1$,所以 $a>1$,即 $a>1$ 时,不等式 $n\lg a<(n+1)\cdot\lg a^a(a>1)$成立,则 $a>0$ 是其必要不充分条件;$a>1$ 是其充要条件;$a>2$,$a>3$ 均是其充分不必要条件,故选 A.

29.B

提示:对于①,取 $A=\{1\}$,$B=\{2\}$,满足$|A|\leqslant|B|$,但不满足 $A\subseteq B$,即①错误;对于②,因为$|A\cup B|=|A\cap B|$,由集合中元素的互异性可得 $A=B$,即②正确;对于③,取 $A=\{1\}$,$B=\{2\}$,满足$|A\cap B|=0$,但不满足 A、B 中至少有 1 个是空集,即③错误;对于④,$A\cap B=\varnothing$,则集合 A、B 中无公共元素,则$|A\cup B|=|A|+|B|$,即④正确.综上可得②④正确,故选 B.

30.C

提示:根据条件中的定义可知,当 $x,y\in\mathbf{N}_+$,且 x,y 同为奇数或者同为偶数时,有 $x◎y=x+y$;当 $x,y\in\mathbf{N}_+$,且 x 为偶数,y 为奇数时,有 $x◎y=xy$,故集合 $A=\{(x,y)|x◎y=10\}$中,$x◎y=10$,当 x,y 同为奇数或者同为偶数时,$x+y=10$,(x,y)可取(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1);当 x 为偶数,y 为奇数时,$xy=10$,则(x,y)可取(2,5),(10,1),所以(x,y)可取的情况共有 11 种,即集合 A 中有 11 个元素,所以集合 A 的子集个数为 2^{11},故选 C.

第 3 版

专题二　函数与导数

参考答案

1~5.BCBDB　　6~10.DDCCA

11~15.BBBAB　　16~20.CCABC

21~23.BAC

24.B

提示:由 $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}ax^2+2bx+c$,得 $f'(x)=x^2+ax+2b$,因为 $f(x)$的两个极值点分别在区间(0,1)与(1,2)内,所以 $x^2+ax+2b=0$ 的两个根分别在区间(0,1)与(1,2)内,即
$$\begin{cases}f'(0)=2b>0,\\f'(1)=1+a+2b<0,\\f'(2)=4+2a+2b>0,\end{cases}$$
故 $a+2b<-1$,而 $4+2a+4b>0$,故 $a+2b>-2$,故 $a+2b$ 的取值范围为$(-2,-1)$,故选 B.

25.C

提示:因为 $f(x)$的图象关于点(3,0)对称,所以 $f(x)+f(6-x)=0$.又 $f(x)=f(2-x)$,所以 $f(x)=-f(x+4)$,则 $f(x)=f(x+8)$,即函数 $f(x)$的周期为 8,所以 $f\left(\frac{1609}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}+100\times8\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)$.因为$f\left(\frac{9}{2}\right)+f\left(6-\frac{9}{2}\right)=0$,$f\left(\frac{9}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=-(3+\log_39)=-5$,所以 $f\left(\frac{1609}{2}\right)=-5$,故选 C.

26.C

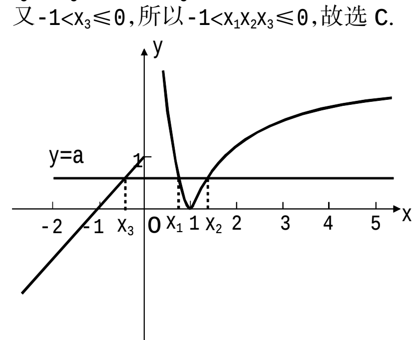
27.C

28.D

提示:由题意,得 $f'(x)=e^x+2$.设(x_1,y_1)为曲线 $f(x)$上的任一点,则在(x_1,y_1)处的切线 l_1 的斜率为 $k_1=e^{x_1}+2$.$g(x)=-ax+\sin x$ 的导数为 $g'(x)=\cos x-a$,过 $g(x)$图象上一点(x_2,y_2)处的切线 l_2 的斜率为 $k_2=\cos x_2-a$.由 $l_1\perp l_2$,得$(e^{x_1}+2)\cdot(\cos x_2-a)=-1$,即 $\cos x_2-a=\frac{-1}{e^{x_1}+2}$,任意的 $x_1\in\mathbf{R}$,总存在 $x_2\in\mathbf{R}$ 使等式成立,则有 $\cos x_2-a$ 的值域为 $A=[-a-1,-a+1]$,所以$-\frac{1}{e^{x_1}+2}$的值域为 $B=\left(-\frac{1}{2},0\right)$.由 $B\subseteq A$,即$\left(-\frac{1}{2},0\right)\subseteq[-a-1,-a+1]$,所以$\begin{cases}-a-1\leqslant-\frac{1}{2},\\-a+1\geqslant0,\end{cases}$解得$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant1$,故选 D.

29.C

提示:若函数 $y=f(x)-a$ 有 3 个零点 x_1,x_2,x_3,如图作出函数 $y=f(x)$的图象和直线 $y=a$,由图象可得$-\lg x_1=\lg x_2$,所以 $\lg x_1+\lg x_2=0$,即 $\lg(x_1x_2)=0$,所以 $x_1x_2=1$,又$-1<x_3\leqslant0$,所以$-1<x_1x_2x_3\leqslant0$,故选 C.



(第 29 题图)

30.B