第 28 期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.BDCBDB　　7~12.AADBAD

二、填空题

13.$\frac{1}{6}$　　14.7047

15.$\frac{\pi}{96-\pi}$　　16.①②④⑤

三、解答题

17.**证明:**(1)取 AA_1 的中点 F,连接 DF,EF.因为 D,E 分别是 BB_1,A_1C 的中点,所以 $DF/\!/AB,EF/\!/AC$. 又 $AB,AC\subset$平面 $ABC,DF\not\subset$平面 $ABC,EF\not\subset$平面 ABC,所以 $DF/\!/$平面 $ABC,EF/\!/$平面 ABC,又 $DF\cap EF=F,DF,EF\subset$平面DEF,所以平面$DEF/\!/$平面ABC.又 $DE\subset$平面 DEF,所以 $DE/\!/$平面 ABC.

(2)因为 AA_1,BB_1 为圆柱的母线,所以 $AB/\!/A_1B_1$.因为 $AA_1\perp$平面 ABC,所以 $AA_1\perp AB$. 又 BC 是底面圆的直径,所以 $AB\perp AC$. 又 $AC\cap AA_1=A,AC,AA_1\subset$平面 A_1AC,所以$AB\perp$平面A_1AC,又$A_1B_1/\!/AB$,所以 $A_1B_1\perp$平面A_1AC.

18.(1)**证明:**连接 A_1C,因为在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,点 E,F 分别为 B_1C_1 和 BC 的中点,B_1A 与 A_1B 相交于点 G,所以 $EF/\!/AA_1,G$ 是 A_1B 的中点,所以 $GF/\!/A_1C$,又 $AA_1\subset$平面 $A_1ACC_1,EF\not\subset$平面 A_1ACC_1,所以 $EF/\!/$平面 A_1ACC_1,又 $A_1C\subset$平面 $A_1ACC_1,GF\not\subset$平面 A_1ACC_1,所以 $GF/\!/$平面 A_1ACC_1,因为 $EF\cap GF=F$,所以平面 $EFG/\!/$平面 A_1ACC_1.

(2)**解:**取 A_1B_1 中点 D,连接 DE,DG,因为点 E,F 分别为 B_1C_1 和 BC 的中点,所以 $DG/\!/AA_1,DE/\!/AC$,所以$\angle DEG$(或其补角)是异面直线 GE 和 AC 所成角,因为 $AA_1\perp AC$ 且 $AA_1=AC$,所以$DE\perp DG$ 且 $DE=DG$,所以$\angle DEG=\frac{\pi}{4}$.所以异面直线 GE 和 AC 所成角的大小为$\frac{\pi}{4}$.

19.(1)**证明:**因为 AB 为圆 O 的直径,点 F 在圆 O 上,所以 $AF\perp BF$,又矩形 $ABCD$ 所在平面和圆 O 所在平面垂直且它们的交线为 $AB,CB\perp AB$,所以 $CB\perp$圆 O 所在平面,所以 $AF\perp BC$,又 $BC\cap BF=B$,所以 $AF\perp$平面 CBF,又$AF\subset$平面 DAF,所以平面 $DAF\perp$平面 CBF.

(2)**解:**连接 OE,因为 $AB=2,EF=1,AB/\!/EF$,所以 $OA=OE=1$,即四边形$OEFA$ 为菱形,所以 $AF=OA=OF=1$.所以在等边三角形 OAF 中,点 F 到边 OA 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.又矩形 $ABCD$ 所在平面和圆 O所在平面垂直,所以点 F 到边 OA 的距离即为四棱锥 $F-ABCD$ 的高,所以四棱锥 $F-ABCD$ 的高 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.又 $BC=1$,所以矩形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD}=AB\cdot BC=2\times1=2$,所以 $V_{F-ABCD}=\frac{1}{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20.(1)**证明:**因为 $MA\perp$平面 $ABCD$,$PD/\!/MA$,所以 $PD\perp$平面 $ABCD$.

又因为 $BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PD\perp BC$.因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $BC\perp DC$.又因为 $PD\cap DC=D$,所以 $BC\perp$平面 PDC.

在$\triangle PBC$ 中,因为 G,F 分别为 PB,PC 的中点,所以 $GF/\!/BC$.所以 $GF\perp$平面 PDC.

又因为 $GF\subset$平面 EFG,

所以平面 $EFG\perp$平面 PDC.

(2)**解:**因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 为正方形,不妨设 $MA=1$,则 $PD=AD=2$,所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PD=\frac{1}{3}\times4\times2=\frac{8}{3}$.

因为 $MA\perp$平面 $ABCD,AB\subset$平面 $ABCD$,所以 $MA\perp AB$.又因为四边形$ABCD$ 为正方形,所以 $AD\perp AB$.又因为 $AD\cap MA=A$,所以 $AB\perp$平面 $MADP$.

因为 $MA/\!/PD$,所以 $S_{\triangle AMP}=\frac{1}{2}AM\cdot AD=1$,所以 $V_{P-MAB}=V_{B-PAM}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAM}\cdot AB=\frac{1}{3}\times1\times2=\frac{2}{3}$.所以 $V_{P-MAB}:V_{P-ABCD}=1:4$.

21.(1)**证明:**由题设知,平面 $CMD\perp$平面 $ABCD$,交线为 CD.

因为 $BC\perp CD,BC\subset$平面 $ABCD$,

所以 $BC\perp$平面 CMD,故 $BC\perp DM$.

因为 M 为$\overset{\frown}{CD}$上异于 C,D 的点,

且 DC 为直径,所以 $DM\perp CM$.

又 $BC\cap CM=C$,所以 $DM\perp$平面 BMC.

而 $DM\subset$平面 AMD,

所以平面 $AMD\perp$平面 BMC.

(2)**解:**当 P 为 AM 的中点时,$MC/\!/$平面 PBD.

证明如下:如图,连接 AC 交 BD 于 O.

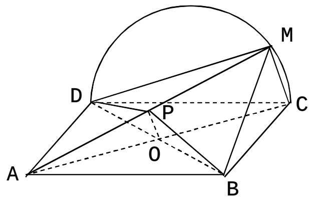
因为 $ABCD$ 为矩形,所以 O 为 AC 中点.

连接 OP,因为 P 为 AM 中点,

所以 $MC/\!/OP$.

又 $MC\not\subset$平面 $PBD,OP\subset$平面 PBD,

所以 $MC/\!/$平面 PBD.



(第 21 题图)

22.(1)**证明:**因为侧棱 $DD_1\perp$底面 $ABCD,AB\subset$底面$ABCD$,

所以$DD_1\perp AB$.在梯形 $ABCD$ 中,

因为 $AD=2,BC=DC=1,AD\perp DC$,

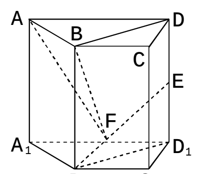
所以 $AB=BD=\sqrt{2}$,

所以 $AB^2+BD^2=AD^2$,所以 $BD\perp AB$.

又 $BD\cap DD_1=D$,

所以 $AB\perp$平面 BDD_1B_1,

又 $B_1E\subset$平面 BDD_1B_1,所以 $B_1E\perp AB$.



(第 22 题图)

(2)**解:**如图,连接 BF,由(1)知,直线 AF 在平面 BDD_1B_1 内的射影为直线 BF,

所以$\angle AFB$ 是直线 AF 与平面 BDD_1B_1 所成的角.

在矩形 BDD_1B_1 中,$B_1E=\sqrt{3}$,

在 $Rt\triangle B_1D_1E$ 中,$\cos\angle B_1ED_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故在$\triangle BB_1F$ 中,

$$BF=\sqrt{BB_1^2+\left(\frac{B_1E}{3}\right)^2-2BB_1\cdot\frac{B_1E}{3}\cdot\cos\angle BB_1E}$$

$$=\sqrt{4+\frac{1}{3}-2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}.$$

所以在 $Rt\triangle ABF$ 中,

$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}$,

所以直线 AF 与平面 BDD_1B_1 所成角的正弦值为 $\sin\angle AFB=\frac{AB}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

第25期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.BDCDDB　　7~12.CCDCBD

二、填空题

13.$\frac{9}{11}$　　14.$-\frac{7}{9}$

15.$\sqrt{6}$　　16.3

三、解答题

17.**解:**(1)因为 $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$,所以 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$,所以 $\sin x\cos x=-\frac{3}{8}$,所以$(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$,因为 $0<x<\pi$,所以 $\sin x>0,\cos x<0$,所以 $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(2)$\frac{\sin2x+2\sin^2x}{1-\tan x}$

$=\frac{2\sin x(\cos x+\sin x)}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\frac{2\sin x\cos x(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}$,

由 $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$,

$\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{7}}{2}$,$2\sin x\cos x=-\frac{3}{4}$,

得$\frac{\sin2x+2\sin^2x}{1-\tan x}=\frac{-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{3\sqrt{7}}{28}$.

18.**解:**(1)$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$,所以 $f(x)\in[0,3]$.

(2)$f(x+\theta)-1=2\sin\left(2x+2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$,

因为函数 $f(x+\theta)-1$ 为奇函数,

即 $g(x)=\sin\left(2x+2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$为奇函数,

所以 $2\theta+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.又 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\theta=-\frac{\pi}{12}$或 $\theta=\frac{5\pi}{12}$.

19.**解:**(1)函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)对于函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,当 $f(x)$取得最大值时,$2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$,$k\in Z$,故 $f(x)$取得最大值时 x 的集合为$\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

20.**解:**(1)选①②时,因为函数 $f(x)$的周期为 π,所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.因为 $x=\frac{\pi}{3}$是函数 $f(x)$的对称轴,所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$.由$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

选①③时,由函数 $f(x)$的周期为 π,得 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.又 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=0$,得$\frac{7\pi}{12}\times2+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$.由$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

选②③时,由 $x=\frac{\pi}{3}$是函数 $f(x)$的对称轴,且 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=0$,所以$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$,解得 $T=\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$.由$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)因为$-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$,所以$-\frac{\pi}{3}\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$,所以当 $2x+\frac{\pi}{3}=0$,即 $x=-\frac{\pi}{6}$时,$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$取得最大值 2;当 $2x+\frac{\pi}{3}=\pi$,即 $x=\frac{\pi}{3}$时,$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$取得最小值$-2$.

21.**解:**(1)$g(x)=4\sin x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2x=\sqrt{3}\sin2x-1+\cos2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$,由题意得,$f(x)=2\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

由 $f(x)$的图象关于 y 轴对称,得 $2\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in Z$,即 $\varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$.又 $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-1=2\cos2x-1$,所以$f(\varphi)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}-1=0$.

(2)由 $x\in\left(\pi,\frac{7\pi}{6}\right)$,得 $2x+2\varphi+\frac{\pi}{6}\in\left(2\varphi+2\pi+\frac{\pi}{6},2\varphi+2\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,因为 $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{\pi}{6}+2\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,$2\varphi+\frac{\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$,因为 $f(x)$在$\left(\pi,\frac{7\pi}{6}\right)$上是单调函数,所以$\frac{\pi}{6}+2\varphi\geqslant\frac{\pi}{2}$,且 $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得$\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.所以 φ 的取值范围是$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$.

22.**解:**(1)因为 H 关于 t 的函数关系式为 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$,由$\begin{cases}B+A=145,\\B-A=21,\end{cases}$解得 $A=62,B=83$,又函数 $H(t)$的周期为30,所以 $\omega=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$,可得 $H(t)=62\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+83$,又 $H(0)=62\sin\left(\frac{\pi}{15}\times0+\varphi\right)+83=21$,所以 $\sin\varphi=-1$,又$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,所以摩天轮转动一周的解析式为 $H(t)=62\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+83$,$0\leqslant t\leqslant30$.

(2)$H(t)=62\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+83=-62\cos\frac{\pi}{15}t+83$,所以$-62\cos\frac{\pi}{15}t+83=52$,即 $\cos\frac{\pi}{15}t=\frac{1}{2}$,又 $0\leqslant t\leqslant30$,则 $t=5$,或 $t=25$(舍去),所以 $t=5$.所以游客甲坐上摩天轮后 5 分钟,距离地面的高度第一次恰好达到 52 米.

(3)由(2)知,经过 t 分钟后游客甲距离地面高度的解析式为 $H_{甲}(t)=-62\cos\frac{\pi}{15}t+83$,乙与甲间隔的时间为$\frac{30}{36}\times6=5$ 分钟,所以乙距离地面高度的解析式为 $H_{乙}(t)=-62\cos\frac{\pi}{15}(t-5)+83$,$5\leqslant t\leqslant30$,所以两人离地面的高度差 $h=|H_{甲}-H_{乙}|=\left|-62\cos\frac{\pi}{15}t+62\cos\frac{\pi}{15}(t-5)\right|=62\left|\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)\right|$,$5\leqslant t\leqslant30$,所以当$\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$,即 $t=10$ 或 25时,h 取最大值为 62.

第26期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.BBAADB　　7~12.ADBCCC

二、填空题

13.$\sqrt[3]{3}$

14.$y=2x$

15.$[-2,0)\cup[1,+\infty)$

16.$(1,2)$

三、解答题

17.**解**:(1)因为$f(-2)=f(2)$,所以$4=2\times2+a$,解得$a=0$.

(2)由(1)知,$f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant0,\\2x,x>0,\end{cases}$且$f(4)=8$,所以不等式$f(x)\geqslant f(4)$可化为$f(x)\geqslant8$,所以$\begin{cases}x\leqslant0,\\x^2\geqslant8,\end{cases}$或$\begin{cases}x>0,\\2x\geqslant8,\end{cases}$解得$x\leqslant-2\sqrt{2}$或$x\geqslant4$,所以不等式的解集为$(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[4,+\infty)$.

18.**解**:因为函数$f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$的图象过点$\left(\frac{1}{4},-2\right)$,故$\log_a\frac{1}{4}=-2$,解得$a=2$,所以$f(x)=\log_2 x$.

(1)函数$g(x)=f(1+x)+f(1-x)=\log_2(1+x)+\log_2(1-x)=\log_2(1-x^2)$的定义域为$(-1,1)$,关于原点对称,且$g(-x)=g(x)$,故$g(x)$为偶函数,又由$1-x^2\in(0,1]$,故$g(x)\in(-\infty,0]$,即$g(x)$的值域为$(-\infty,0]$.

(2)因为关于x的方程$f(x^2-tx+8)=2$在$[1,4]$上有解,所以$x^2-tx+8=4$,即$x^2-tx+4=0$在$[1,4]$上有解,即$t=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}$在$[1,4]$上有解,由对勾函数的图象和性质可得,当$x=2$时,$x+\frac{4}{x}$取最小值4;当$x=1$,或$x=4$时,$x+\frac{4}{x}$取最大值5,故实数$t$的取值范围是$[4,5]$.

19.(1)**证明**:当$a=\mathrm{e}$时,$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}\ln x$,

即证$\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}\ln x\geqslant0$,即$\mathrm{e}^{x-2}\geqslant\ln x$,

先证:$\mathrm{e}^{x-2}\geqslant x-1$,

令$g(x)=\mathrm{e}^{x-2}-x+1$,$g'(x)=\mathrm{e}^{x-2}-1$,

当$x>2$时,$g'(x)>0$;

当$x<2$时,$g'(x)<0$,

所以$g(x)$在$(-\infty,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,

故$[g(x)]_{\min}=g(2)=0$,所以$\mathrm{e}^{x-2}\geqslant x-1$.

再证:$x-1\geqslant\ln x$,

令$h(x)=x-1-\ln x$,$h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

当$0<x<1$时,$h'(x)<0$;

当$x>1$时,$h'(x)>0$,

所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递减,

在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以$[h(x)]_{\min}=h(1)=0$,

所以$x-1\geqslant\ln x$,

所以$\mathrm{e}^{x-2}\geqslant x-1\geqslant\ln x$,

即$\mathrm{e}^{x-2}\geqslant\ln x$,所以$f(x)\geqslant0$.

(2)**解**:$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{a}{x}$,

因为$f(x)$在$x=1$处取得极小值,

所以$f'(1)=1-a=0$,解得$a=1$.

当$a=1$时,

$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{x}$,$f''(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$,

所以$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

当$0<x<1$时,$f'(x)<f'(1)=0$,

当$x>1$时,$f'(x)>f'(1)=0$,

此时$x=1$是$f(x)$的极小值点.

综上所述,$a=1$.

20.(1)**解法一**:设$h(x)=f(x)-2x-c$,

则$h(x)=2\ln x-2x+1-c$,

其定义域为$(0,+\infty)$,$h'(x)=\frac{2}{x}-2$.

当$0<x<1$时,$h'(x)>0$;

当$x>1$时,$h'(x)<0$.

所以$h(x)$在区间$(0,1)$单调递增,在区间$(1,+\infty)$单调递减,

从而当$x=1$时,$h(x)$取得最大值,最大值为$h(1)=-1-c$,

故当且仅当$-1-c\leqslant0$,

即$c\geqslant-1$时,$f(x)\leqslant2x+c$,

所以c的取值范围为$[-1,+\infty)$.

解法二:因为$f(x)\leqslant2x+c$,

所以$c\geqslant2\ln x-2x+1$.

令$m(x)=2\ln x-2x+1$,则$m'(x)=\frac{2}{x}-2$,

由$m'(x)=\frac{2}{x}-2>0$,得$0<x<1$;

由$m'(x)=\frac{2}{x}-2<0$,得$x>1$.

所以$m(x)$在区间$(0,1)$单调递增,在区间$(1,+\infty)$单调递减,

从而当$x=1$时,$m(x)$取得最大值,最大值为$m(1)=-1$,所以$c\geqslant-1$,

所以c的取值范围为$[-1,+\infty)$.

(2)**解**:$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{2(\ln x-\ln a)}{x-a}$,$x\in(0,a)\cup(a,+\infty)$.

$g'(x)=\frac{2\left(\frac{x-a}{x}+\ln a-\ln x\right)}{(x-a)^2}=\frac{2\left(1-\frac{a}{x}+\ln\frac{a}{x}\right)}{(x-a)^2}$.

取$c=-1$,得$h(x)=2\ln x-2x+2$,$h(1)=0$,

则由(1)知,当$x\neq1$时,$h(x)<0$,

即$1-x+\ln x<0$,令$\frac{a}{x}=t$,$t>0$且$t\neq1$,

则$2\left(1-\frac{a}{x}+\ln\frac{a}{x}\right)=h(t)<0$,

从而$g'(x)<0$.所以$g(x)$在区间$(0,a)$,$(a,+\infty)$单调递减.

21.**解**:(1)因为$f'(x)=\mathrm{e}^x\left(x\ln x+\ln x+\frac{2}{\mathrm{e}}+1\right)$,所以$f'(1)=\mathrm{e}+2$,因为$f(1)=2$,所以所求切线方程为$y-2=(\mathrm{e}+2)(x-1)$,即$(\mathrm{e}+2)x-y-\mathrm{e}=0$.

(2)由$f(1)>g(1)$,得$a<2$,因为$a\in\mathbf{Z}$,所以考虑证明不等式$\mathrm{e}^x\left(x\ln x+\frac{2}{\mathrm{e}}\right)>x$恒成立,即证$x\ln x+\frac{2}{\mathrm{e}}>\frac{x}{\mathrm{e}^x}$恒成立,令$m(x)=x\ln x+\frac{2}{\mathrm{e}}$,$h(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}(x>0)$,因为$m'(x)=\ln x+1$,所以当$0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$m'(x)<0$,$m(x)$单调递减,当$x>\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$m'(x)>0$,$m(x)$单调递增,所以$[m(x)]_{\min}=m\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.因为$h'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$,所以当$0<x<1$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,当$x>1$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,所以$[h(x)]_{\max}=h(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$,所以$m(x)\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}\geqslant h(x)$且等号不同时取得,所以$x\ln x+\frac{2}{\mathrm{e}}>\frac{x}{\mathrm{e}^x}$,即$\mathrm{e}^x\cdot\left(x\ln x+\frac{2}{\mathrm{e}}\right)>x$恒成立.综上,$a$的最大值为1.

22.**解**:(1)由题意知,$f'(x)=3x^2-k$,

当$k=0$时,$f(x)=x^3$,故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增;

当$k<0$时,$f'(x)>0$恒成立,所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增;

当$k>0$时,令$f'(x)=0$,得$x=\pm\sqrt{\frac{k}{3}}$.

令$f'(x)<0$,得$-\sqrt{\frac{k}{3}}<x<\sqrt{\frac{k}{3}}$;

令$f'(x)>0$,得$x<-\sqrt{\frac{k}{3}}$,或$x>\sqrt{\frac{k}{3}}$.

所以$f(x)$在$\left(-\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$单调递减,在$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$,$\left(\sqrt{\frac{k}{3}},+\infty\right)$单调递增.

(2)由(1)知,

当$k\leqslant0$时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增,$f(x)$不可能有三个零点.

当$k>0$时,$x=-\sqrt{\frac{k}{3}}$为$f(x)$的极大值点,$x=\sqrt{\frac{k}{3}}$为$f(x)$的极小值点.

此时,$-k-1<-\sqrt{\frac{k}{3}}<\sqrt{\frac{k}{3}}<k+1$,

且$f(-k-1)<0$,$f(k+1)>0$,$f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)>0$.

根据$f(x)$的单调性,

当且仅当$f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)<0$,

即$k^2-\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}<0$时,

$f(x)$有三个零点,解得$0<k<\frac{4}{27}$.

综上,k的取值范围为$\left(0,\frac{4}{27}\right)$.

第 27 期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.CDBCDD　　7~12.CBADAC

二、填空题

13.2,9　　14.$x+y-3=0$

15.3　　16.$\left[\frac{2+\ln3}{3},+\infty\right)$

三、解答题

17.**解**:(1)$f'(x)=6x^2+2mx=2x(3x+m)$.当$m<0$时,由$f'(x)>0$,得$x>-\frac{m}{3}$,或$x<0$;由$f'(x)<0$,得$0<x<-\frac{m}{3}$,此时$f(x)$在$(-\infty,0)$,$\left(-\frac{m}{3},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(0,-\frac{m}{3}\right)$上单调递减;当$m=0$时,$f'(x)\geqslant0$,$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增;当$m>0$时,由$f'(x)>0$,得$x<-\frac{m}{3}$,或$x>0$;由$f'(x)<0$,得$-\frac{m}{3}<x<0$,此时$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{m}{3}\right)$,$(0,+\infty)$上单调递增,在$\left(-\frac{m}{3},0\right)$上单调递减.

(2)由(1)可知,$m<0$时,$f(x)$在$\left[0,-\frac{m}{3}\right]$上单调递减,在$\left[-\frac{m}{3},-\frac{m}{2}\right]$上单调递增,所以$[f(x)]_{\min}=f\left(-\frac{m}{3}\right)=\frac{m^3}{27}+m+1$.又$f(0)=m+1$,$f\left(-\frac{m}{2}\right)=m+1$,所以$[f(x)]_{\max}=m+1$.故$m+1-\left(\frac{m^3}{27}+m+1\right)=-\frac{m^3}{27}=1$,则$m=-3$.

18.**解**:(1)当$a=\mathrm{e}$时,$f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x+1$,所以$f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$,所以$f'(1)=\mathrm{e}-1$,因为$f(1)=\mathrm{e}+1$,所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-(\mathrm{e}+1)=(\mathrm{e}-1)(x-1)$.当$x=0$时,$y=2$,当$y=0$时,$x=\frac{-2}{\mathrm{e}-1}$,所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积$S=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2}{\mathrm{e}-1}=\frac{2}{\mathrm{e}-1}$.

(2)由$f(x)\geqslant1$,可得$a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant1$,即$\mathrm{e}^{x-1+\ln a}-\ln x+\ln a\geqslant1$,即$\mathrm{e}^{x-1+\ln a}+\ln a+x-1\geqslant\ln x+x=\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x$.令$g(t)=\mathrm{e}^t+t$,则$g'(t)=\mathrm{e}^t+1>0$,所以$g(t)$在$\mathbf{R}$上单调递增,因为$g(\ln a+x-1)\geqslant g(\ln x)$,所以$\ln a+x-1\geqslant\ln x$,即$\ln a\geqslant\ln x-x+1$.令$h(x)=\ln x-x+1$,所以$h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,当$0<x<1$时,$h'(x)>0$,函数$h(x)$单调递增,当$x>1$时,$h'(x)<0$,函数$h(x)$单调递减,所以$h(x)\leqslant h(1)=0$,所以$\ln a\geqslant0$,所以$a\geqslant1$,故$a$的取值范围为$[1,+\infty)$.

19.**解**:(1)由函数$f(x)$是偶函数,得$f(-x)=f(x)$,即$m\mathrm{e}^{-x}-(-x)^2+3=m\mathrm{e}^x-x^2+3$对于任意实数$x$都成立,所以$m=0$.此时$h(x)=xf(x)=-x^3+3x$,则$h'(x)=-3x^2+3$,当$h'(x)=-3x^2+3\leqslant0$时,解得$x\leqslant-1$或$x\geqslant1$,所以$h(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1]$,$[1,+\infty)$.

(2)由$f(x)=m\mathrm{e}^x-x^2+3=0$,得$m=\frac{x^2-3}{\mathrm{e}^x}$.所以“$f(x)$在区间$[-3,4]$上有两个零点”等价于“直线$y=m$与曲线$g(x)=\frac{x^2-3}{\mathrm{e}^x}$在$x\in[-3,4]$上有且只有两个公共点”.由$g(x)=\frac{x^2-3}{\mathrm{e}^x}$,得$g'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{\mathrm{e}^x}$.由$g'(x)=0$,解得$x_1=-1$,$x_2=3$.当$x$变化时,$g'(x)$与$g(x)$的变化情况如下表所示:

x	$(-3,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,4)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以$g(x)$在$(-3,-1)$,$(3,4)$上单调递减,在$(-1,3)$上单调递增.又因为$g(-3)=6\mathrm{e}^3$,$g(-1)=-2\mathrm{e}$,$g(3)=\frac{6}{\mathrm{e}^3}<g(-3)$,$g(4)=\frac{13}{\mathrm{e}^4}>g(-1)$,所以当$-2\mathrm{e}<m<\frac{13}{\mathrm{e}^4}$或$m=\frac{6}{\mathrm{e}^3}$时,直线$y=m$与曲线$g(x)=\frac{x^2-3}{\mathrm{e}^x}$在$x\in[-3,4]$上有且只有两个公共点.所以$m$的取值范围为$\left\{m\middle|-2\mathrm{e}<m<\frac{13}{\mathrm{e}^4},\text{或}m=\frac{6}{\mathrm{e}^3}\right\}$.

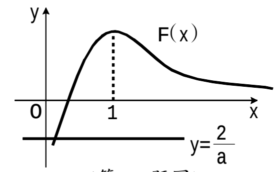
20.(1)**解**:当$k=2$时,$f(x)=2x-x\ln x$,$f'(x)=1-\ln x$,由$f'(x)>0$,解得$0<x<\mathrm{e}$;由$f'(x)<0$,解得$x>\mathrm{e}$,因此函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,\mathrm{e})$,单调递减区间为$(\mathrm{e},+\infty)$.

(2)**解**:$f(x)=kx-x\ln x$,故$f'(x)=k-1-\ln x$.当$k\geqslant1$时,因为$0<x\leqslant1$,所以$k-1\geqslant0\geqslant\ln x$,因此$f'(x)\geqslant0$恒成立,即$f(x)$在$(0,1]$上单调递增,所以$f(x)\leqslant f(1)=k$恒成立.当$k<1$时,令$f'(x)=0$,解得$x=\mathrm{e}^{k-1}\in(0,1)$,当$x\in(0,\mathrm{e}^{k-1})$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当$x\in(\mathrm{e}^{k-1},1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,于是$f(\mathrm{e}^{k-1})>f(1)=k$,与$f(x)\leqslant k$恒成立相矛盾.

综上,k的取值范围为$[1,+\infty)$.

(3)**证明**:由(2)知,当$0<x\leqslant1$时,$x-x\ln x\leqslant1$.令$x=\frac{1}{n^2}(n\in\mathbf{N}_+)$,则$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\ln\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}\ln n\leqslant1$,即$2\ln n\leqslant n^2-1$,因此$\frac{\ln n}{n+1}\leqslant\frac{n-1}{2}$,所以$\frac{\ln1}{2}+\frac{\ln2}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}\leqslant\frac{0}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{n-1}{2}=\frac{n(n-1)}{4}$.

21.(1)**解**:因为$f(x)=x^2-ax\ln x(x>0)$,所以$f'(x)=2x-a(\ln x+1)$,因为函数$f(x)$恰有一个极值点,所以方程$2x-a(\ln x+1)=0$在$(0,+\infty)$上恰有一个变号实根.所以$\frac{2}{a}=\frac{\ln x+1}{x}$在$(0,+\infty)$上恰有一个变号实根.令$F(x)=\frac{\ln x+1}{x}$,则$F'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$.可得$x\in(0,1)$时,$F'(x)>0$,函数$F(x)$单调递增;$x\in(1,+\infty)$时,$F'(x)<0$,函数$F(x)$单调递减.画出函数$F(x)$的大致图象,可得$\frac{2}{a}<0$,所以$a<0$.所以实数$a$的取值范围为$(-\infty,0)$.



(第 21 题图)

(2)**证明**:要证明:$\frac{f(x)}{x}\leqslant g(x)\Leftrightarrow$证明$x-a\ln x\leqslant\left(1-\frac{a}{\mathrm{e}}\right)x\Leftrightarrow$证明$a\ln x\geqslant\frac{a}{\mathrm{e}}x$,即证明$\ln x\leqslant\frac{x}{\mathrm{e}}$.令$h(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}$,则$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}x}$,$x\in(0,\mathrm{e})$时,$h'(x)>0$,函数$h(x)$单调递增;$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减.所以$h(x)\leqslant h(\mathrm{e})=0$,即原不等式成立.要证明$g(x)<\frac{\mathrm{e}^x}{x}$,即证明$\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}>1-\frac{a}{\mathrm{e}}$.因为$a\in(-1,0)$,所以$1-\frac{a}{\mathrm{e}}<1+\frac{1}{\mathrm{e}}$.故只需证明$\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\geqslant1+\frac{1}{\mathrm{e}}$即可.令$G(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$,则$G'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-2)}{x^3}$.$x\in(0,2)$时,$G'(x)<0$,函数$G(x)$单调递减;$x\in(2,+\infty)$时,$G'(x)>0$,函数$G(x)$单调递增.所以$\frac{\mathrm{e}^2}{x^2}\geqslant\frac{\mathrm{e}^2}{4}$,则$\frac{\mathrm{e}^2}{4}>1+\frac{1}{\mathrm{e}}$,故原不等式成立.

综上,$\frac{f(x)}{x}\leqslant g(x)<\frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

22.**解**:(1)当$a=1$时,$f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x$,$f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$,显然$f'(x)$为增函数,又$f'(0)=0$,所以当$x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$;当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$.所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,0)$.

(2)由$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$,得$\mathrm{e}^x+ax^2-x\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$.①当$x=0$时,不等式显然成立;②当$x>0$时,分离参数$a$得,$a\geqslant-\frac{\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$.

记$g(x)=-\frac{\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$,

$g'(x)=-\frac{(x-2)\left(\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)}{x^3}$.

令$h(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1(x\geqslant0)$,则$h'(x)=\mathrm{e}^x-x-1$,$h''(x)=\mathrm{e}^x-1\geqslant0$,故$h'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,$h'(x)\geqslant h'(0)=0$,故函数$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$h(x)\geqslant h(0)=0$.由$h(x)\geqslant0$,得$\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\geqslant0$恒成立,故当$x\in(0,2)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$x\in(2,+\infty)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.

因此,$[g(x)]_{\max}=g(2)=\frac{7-\mathrm{e}^2}{4}$.

综上可得,实数a的取值范围是$\left[\frac{7-\mathrm{e}^2}{4},+\infty\right)$.