第 4 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.DCCABC

7~12.DCAAAC

二、填空题

13.$[4,+\infty)$

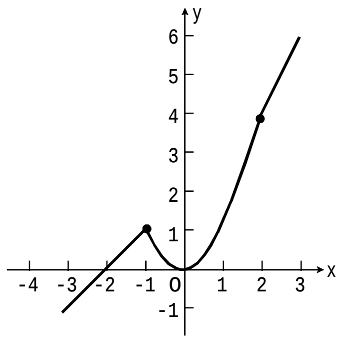
14.x^2+2x

15.2

16.$\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

三、解答题

17.**解**:(1)函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant -1,\\ x^2,-1<x<2,\\ 2x,x\geqslant 2\end{cases}$ 的图象如下图所示:



(第 17 题图)

(2)当 $a\leqslant -1$ 时,$f(a)=a+2=\frac{1}{2}$,

可得 $a=-\frac{3}{2}$;

当 $-1<a<2$ 时,$f(a)=a^2=\frac{1}{2}$,

可得 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;

当 $a\geqslant 2$ 时,$f(a)=2a=\frac{1}{2}$,

可得 $a=\frac{1}{4}$(舍去).

综上所述,实数 a 的取值集合为 $\left\{-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

18.(1)**证明**:$a=1$ 时,$f(x)=\lg(1-x)-\lg(1+x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$,

由 $\frac{1-x}{1+x}>0$,得 $-1<x<1$.

令 $g(x)=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{x+1}$.

设 $-1<x_1<x_2<1$,则

$g(x_1)-g(x_2)=\frac{2}{x_1+1}-\frac{2}{x_2+1}=\frac{2(x_2-x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}$,

因为 $-1<x_1<x_2<1$,

所以 $\frac{2(x_2-x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}>0$,

即 $g(x_1)>g(x_2)$,

所以 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减,

因为 $y=\lg t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

由复合函数的单调性可知,

函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数.

(2)**解**:因为 $f(x)=a\lg(1-x)-\lg(1+x)$.

所以 $f(-x)=a\lg(1+x)-\lg(1-x)$.

当 $a=-1$ 时,$f(-x)=f(x)$,

即 $f(x)$ 为偶函数;

当 $a=1$,$f(-x)=-f(x)$,

即 $f(x)$ 为奇函数;

当 $a\neq\pm 1$ 时,$f(x)$ 为非奇非偶函数.

19.(1)**证明**:设 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2^{x_1}+1}-\frac{1}{2^{x_2}+1}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$,

因为 $x_1<x_2$,所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$,$2^{x_2}-2^{x_1}>0$,

且 $2^{x_1}+1>0$,$2^{x_2}+1>0$,

所以 $\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>0$,

所以 $f(x_1)>f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

(2)$f(x)=\frac{a\cdot 2^x+a+2}{2(2^x+1)}$,

要使 $f(x)$ 为奇函数,

则 $f(-x)=-f(x)$,

所以 $\frac{a\cdot 2^{-x}+a+2}{2(2^{-x}+1)}=-\frac{a\cdot 2^x+a+2}{2(2^x+1)}$,

所以 $\frac{(a+2)\cdot 2^x+a}{2(2^x+1)}=-\frac{a\cdot 2^x+(a+2)}{2(2^x+1)}$,

所以 $(a+2)\cdot 2^x+a=-a\cdot 2^x-(a+2)$,

所以 $a+2=-a$,

解得 $a=-1$,所以存在实数 $a=-1$,

使函数 $f(x)$ 为奇函数.

(3)因为 $a=-1$,由(2)知,$f(x)$ 是奇函数,由(1)知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

所以由 $f(t^2+1)+f(2t-4)\leqslant 0$,

得 $f(t^2+1)\leqslant f(4-2t)$,

所以 $t^2+1\geqslant 4-2t$,

解得 $t\leqslant -3$,或 $t\geqslant 1$,

所以原不等式的解集为 $\{t|t\leqslant -3$,或 $t\geqslant 1\}$.

20.**解**:(1)$f(x)=(1-a^x)(3+a^x)=-(a^x)^2-2a^x+3$,

设 $t=a^x(t>0)$,可得 $y=-t^2-2t+3=-(t+1)^2+4$,则函数 $y=-(t+1)^2+4$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,可得函数 y 的值域为 $(-\infty,3)$,即函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,3)$.

(2)若 $x\in[-2,1]$ 时,由 $a>1$,可得 $t=a^x\in[a^{-2},a]$,由(1)可得 $y=-t^2-2t+3=-(t+1)^2+4$ 在 $[a^{-2},a]$ 上单调递减,则 $f(x)$ 的最小值为 $-(a+1)^2+4$,

由题意可得 $-(a+1)^2+4=-5$,解得 $a=2$ 或 $a=-4$(舍去),所以 $f(x)$ 的最大值为 $4-(2^{-2}+1)^2=\frac{39}{16}$.

21.**解**:(1)因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)=2^x$.

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$-x\in(0,+\infty)$,

所以 $f(-x)=2^{-x}$,所以 $-f(x)=\frac{1}{2^x}$,

所以 $f(x)=-\frac{1}{2^x}$,

所以 $f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2^{\log_2\frac{1}{3}}}=-3$.

(2)因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)=2^x$.

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f(x)=-\frac{1}{2^x}$;

当 $x=0$ 时,$f(x)=0$.

所以 $f(x)=\begin{cases}2^x,x>0,\\ 0,x=0,\\ -\frac{1}{2^x},x<0.\end{cases}$

(3)因为 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(3a-1)>f(a)$,

当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)=2^x$.

所以 $\begin{cases}3a-1>0,\\ a>0,\\ 2^{3a-1}>2^a,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{1}{2}$,

所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

22.**解**:(1)由题意知 $f(-x)=-f(x)$,

所以 $\log_3\frac{1+ax}{1+x}=\log_3\frac{1-x}{1-ax}$,

所以 $(a^2-1)x^2=0$,

所以 $a=-1$ 或 $a=1$(舍去),

故 $a=-1$.

(2)由(1)得 $f(x)=\log_3\frac{1+x}{1-x}$ $(-1<x<1)$,令 $t=\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{1-x}-1$,在 $x\in(-1,1)$ 上单调递增.

又因为 $y=\log_3 t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.

又设 $u=\frac{1}{2}\sin x$,

因为 $u=\frac{1}{2}\sin x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subseteq(-1,-1)$,

所以 $A=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,

又 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,

所以 $g(x)$ 的值域为 $[-1,1]$.

$v=x^2-\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{2},1\right)\subseteq(-1,1)$,

所以 $B=\left[-\frac{1}{2},1\right)$,又 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,

所以 $h(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$.

因为 $[-1,1]\subseteq[-1,+\infty)$,所以对任意 $x_1\in A$,总存在 $x_2\in B$,使得 $g(x_1)=h(x_2)$,故命题成立.

第 1 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.CDBBBB

7~12.ACCDDB

二、填空题

13.$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

14.$-\frac{3}{2}$

15.真

16.④

三、解答题

17.**解**:(1)全集 $U=\mathbf{R}$,

$A=\left\{x\middle|\frac{1}{2}<2^x<4\right\}=\{x|2^{-1}<2^x<2^2\}=\{x|-1<x<2\}$,

$B=\{x|\log_3 x\leqslant 2\}=\{x|0<x\leqslant 9\}$,

所以 $A\cap B=\{x|0<x<2\}$.

(2)由(1)可知,

$A\cup B=\{x|-1<x\leqslant 9\}$,所以

$\complement_U(A\cup B)=\{x|x>9$,或 $x\leqslant -1\}$.

18.**解**:(1)依题意 $A=\{x|1<x<4\}$,$B=\{x|0<x<\pi\}$,所以 $A\cup B=\{x|0<x<4\}$.

(2)因为 $A\cap C=C$,

所以 $C\subseteq A$.

①当 $C=\varnothing$ 时,$a\leqslant 1$,满足题意;

②当 $C\neq\varnothing$ 时,$a>1$,

因为 $C\subseteq A$,所以 $a\leqslant 4$,

所以 $1<a\leqslant 4$.

综上,a 的取值范围是 $\{a|a\leqslant 4\}$.

19.**解**:(1)因为命题 p:$\frac{x^2}{m-1}+\frac{y^2}{m-4}=1$ 表示双曲线为真命题,则

由 $(m-1)(m-4)<0$,解得 $1<m<4$.

所以实数 m 的取值范围是 $(1,4)$.

(2)因为命题 q:$\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{4-m}=1$ 表示椭圆为真命题,

所以 $\begin{cases}m-2>0,\\ 4-m>0,\\ m-2\neq 4-m.\end{cases}$

所以 $2<m<3$,或 $3<m<4$,

因为 $\{m|1<m<4\}\supsetneqq\{m|2<m<3$,或 $3<m<4\}$,

所以"命题p为真命题"是"命题q为真命题"的必要不充分条件.

20.**解**:(1)当 $m>0$ 时,不等式显然有解;

当 $m=0$ 时,$2x-1>0$ 有解;

当 $m<0$ 时,若 $mx^2+2x-1>0$ 有解,

则 $\Delta=4+4m>0$,所以 $-1<m<0$.

综上,当 q 为真命题时,实数 m 的取值范围为 $(-1,+\infty)$.

(2)因为"$p\wedge q$"为假命题,"$p\vee q$"为真命题,所以 p 与 q 必然一真一假.

若命题 p 为真命题,将方程 $mx^2+2y^2=2m$ 化为 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{m}=1$,表示焦点在 x 轴上的椭圆,则 $0<m<2$.

由(1)知,若 q 为真,则 $m>-1$.当 p 真 q 假时,有 $0<m<2$ 且 $m\leqslant -1$,

此时 $m\in\varnothing$;

当 p 假 q 真时,有 $m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 2$ 且 $m>-1$,所以 $-1<m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 2$.

故实数 m 的取值范围为 $(-1,0]\cup[2,+\infty)$.

21.**解**:(1)p 真时,则 $f'(x)=x^2+3(3-a)x+9\geqslant 0$ 恒成立,所以 $\Delta=9(3-a)^2-36\leqslant 0$,得 $1\leqslant a\leqslant 5$.

所以实数 a 的取值范围是 $[1,5]$.

(2)q 真:$k-1<x<k$,设集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$,集合 $B=\{x|k-1<x<k\}$,因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,所以 q 是 p 的充分不必要条件,即 $B\subsetneqq A$,则有 $\begin{cases}k-1\geqslant 1,\\ k<5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k-1>1,\\ k\leqslant 5,\end{cases}$ 所以实数 k 的取值范围是 $[2,5]$.

22.(1)**证明**:

因为 $f(x+2)+f(x)$

$=\cos\frac{\pi(x+2)}{3}+\cos\frac{\pi x}{3}$

$=\cos\left[\frac{\pi(x+1)}{3}+\frac{\pi}{3}\right]+\cos\left[\frac{\pi(x+1)}{3}-\frac{\pi}{3}\right]$

$=2\cos\frac{\pi(x+1)}{3}\cos\frac{\pi}{3}$

$=\cos\frac{\pi(x+1)}{3}$

$=f(x+1)$,

所以 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$,

所以 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{3}\in A$.

(2)命题①正确,集合 A 中的元素都是周期函数.

证明:若 $f(x)\in A$,

则 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$,

可得 $f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$,

所以 $f(x+3)=-f(x)$,

从而 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$,

所以 $f(x)$ 为周期函数,

所以命题①正确.

命题②不正确,

如 $h(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ 不是偶函数,但满足 $h(x)\in A$,

这是因为 $h(x+2)+h(x)$

$=\cos\left[\left(\frac{(x+1)\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$

$+\cos\left[\left(\frac{(x+1)\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right]$

$=\cos\left(\frac{(x+1)\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=h(x+1)$,

所以 $h(x+2)=h(x+1)-h(x)$,

所以 $h(x)\in A$.

①

第 2 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.CABBDA

7~12.DACDCA

二、填空题

13.$-a<-a^2<a^2<a$

14.$\left\{x\left|\frac{3}{2}\leqslant x<5\right.\right\}$

15.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

16.-2

三、解答题

17.证明：当 $x\geqslant4$ 时，要证 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$，只需证 $(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2})^2>(\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1})^2$，

需证 $x-3+2\sqrt{(x-3)(x-2)}+x-2>x-4+2\sqrt{(x-4)(x-1)}+x-1$，即证 $\sqrt{(x-3)(x-2)}>\sqrt{(x-4)(x-1)}$，只需证 $x^2-5x+6>x^2-5x+4$，即证 $6>4$，显然上式成立，所以原不等式成立，即 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$.

18.解：(1)因为 $f(x)=a^x-1(a>0$，且 $a\neq1)$，

所以 $f(1)-f(2)=(a-1)-(a^2-1)=a-a^2$.

由 $a-a^2=\frac{1}{4}$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

(2)不等式 $f(x)>0$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x-1>0$，

所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>1$，解得 $x<0$，

所以不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,0)$.

19.解：(1) $f(x)=|x|-2|x-1|\geqslant-1$，

所以 $\begin{cases}x\leqslant0,\\x-2\geqslant-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<1,\\3x-2\geqslant-1,\end{cases}$

或 $\begin{cases}x\geqslant1,\\-x+2\geqslant-1,\end{cases}$

解得 $x\in\varnothing$ 或 $\frac{1}{3}\leqslant x<1$ 或 $1\leqslant x\leqslant3$.

综上，不等式的解集为 $\left[\frac{1}{3},3\right]$.

(2)由 $f(x)=\begin{cases}x-2a,x\leqslant0,\\3x-2a,0<x<a,\\-x+2a,x\geqslant a,\end{cases}$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，

在 $(a,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x=a$ 时，$f(x)$ 取最大值 a，

若 $f(x)\leqslant1$，则 $0<a\leqslant1$，

故实数 a 的取值范围为 $(0,1]$.

20.证明：(1)由 $f(x)=g(x)$，

得 $ax^2+2bx+c=0$，

所以 $\Delta=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$.

因为 $a>b>c$，$a+b+c=0$，

所以 $a>0,c<0$，所以 $\Delta>0$，

所以 $ax^2+2bx+c=0$ 有两个不等的实根，

所以 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象一定有两个交点.

(2)假设 $\frac{c}{a}\leqslant-2$ 或 $\frac{c}{a}\geqslant-\frac{1}{2}$ 成立.

由 $\frac{c}{a}\leqslant-2$，结合(1) $a>0$，得 $c\leqslant-2a$，

即 $a+c\leqslant-a$，所以 $-b\leqslant-a$，

所以 $a\leqslant b$，

这与条件中的 $a>b$ 矛盾.

由 $\frac{c}{a}\geqslant-\frac{1}{2}$，得 $2c\geqslant-a$，

即 $c\geqslant-(a+c)=b$，

所以 $b\leqslant c$，这与 $b>c$ 矛盾，

故假设不成立.故原不等式成立.

21.解：(1)由 $f(x)>0$，

得 $(ax-1)(x-1)>0$.

当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\left(\frac{1}{a},1\right)$；

当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,1)$；

当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为

$(-\infty,1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$；

当 $a=1$ 时，不等式的解集为

$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

当 $a>1$ 时，不等式的解集为

$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$.

(2)由 $f(x)+x+a-b\geqslant0$，

得 $a(x^2-x+1)+1-b\geqslant0$，

由 $x\in(0,1)$，得 $\frac{3}{4}\leqslant x^2-x+1<1$，

故 $a\geqslant\frac{b-1}{x^2-x+1}$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，

故存在实数 $b\in[2,3]$，

使得不等式 $a\geqslant\frac{4(b-1)}{3}$ 成立，

所以 $a\geqslant\frac{4\times(2-1)}{3}=\frac{4}{3}$，

所以 a 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

22.解：(1) $f(x)=|x+1|+|x-1|-2|x-2|=\begin{cases}-4,x\leqslant-1,\\2x-2,-1<x\leqslant1,\\4x-4,1<x<2,\\4,x\geqslant2,\end{cases}$

所以 $f(x)$ 的值域为 $[-4,4]$，

因为关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant a$ 有解，

所以 $a\geqslant-4$，

所以实数 a 的取值范围是 $[-4,+\infty)$.

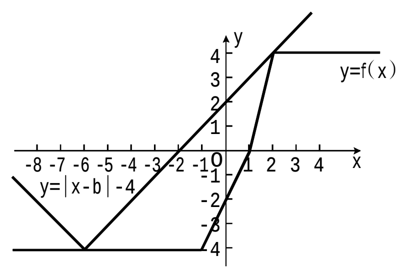
(2) $y=f(x)$ 与 $y=|x-b|-4$ 对应的图象如图所示.

由图象知，要使 $f(x)\leqslant|x-b|-4$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

只需要 $f(2)\leqslant|2-b|-4$，且 $b<0$，

解得 $b\leqslant-6$，

故实数 b 的取值范围为 $(-\infty,-6]$.



(第 22 题图)

第 3 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.ADADBC　7~12.CBDCCB

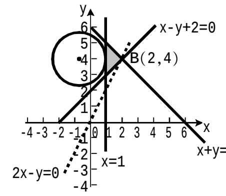
二、填空题

13.1　14.9

15.2　16.$\frac{1}{8}$

三、解答题

17.解：(1)变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\leqslant0,\\x+y-6\leqslant0,\\x-1\geqslant0,\end{cases}$ 的可行域如图阴影部分所示.



(第 17 题图)

(2)由 $\begin{cases}x-y+2=0,\\x+y-6=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$ 所以点 B 的坐标为 $(2,4)$.直线 $z=2x-y$ 经过点 B，即当 $x=2,y=4$ 时 z 取得最大值，最大值为 $z=2\times2-4=0$.

(3)由可行域可知，$z=(x+1)^2+(y-4)^2$ 的几何意义是可行域内的点与 $(-1,4)$ 的距离的平方，由图可知，$(-1,4)$ 到可行域的距离的最小值为 2，所以 $z=(x+1)^2+(y-4)^2$ 的最小值为 4.

18.解：(1)因为 $(a+b)\sqrt{ab}=1$，所以 $a+b=\frac{1}{\sqrt{ab}}$，因为 $a>0,b>0$，所以 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，所以 $\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant2\sqrt{ab}$，所以 $ab\leqslant\frac{1}{2}$.

所以 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^3}}=\frac{2}{ab\sqrt{ab}}\geqslant4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，所以 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

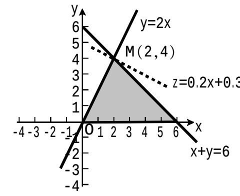
(2)因为 $a>0,b>0$，所以 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{3b}}=\frac{2}{\sqrt{6ab}}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 a=b 时取等号.因为 $\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以不存在 a,b，使得 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}$ 的值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

19.解：(1)由频率分布直方图，得本地养鱼场的年平均利润率约为 $[-0.3\times0.5+(-0.1)\times0.5+0.1\times1+0.3\times2+0.5\times1]\times0.2=0.2$.

(2)根据题意得，x,y 满足的条件为 $\begin{cases}x+y\leqslant6,\\x\geqslant\frac{1}{2}y,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0.\end{cases}$ ①

所以明年两个项目的利润之和为 $z=0.2x+0.3y$.作出不等式组①所表示的平面区域如图所示，即可行域.

当直线 $z=0.2x+0.3y$ 经过可行域上的点 $M(2,4)$ 时，截距最大，即 z 最大.$z=0.2\times2+0.3\times4=1.6$ 千万元.即公司投资本地养鱼场和远洋捕捞队的资金应分别为 2 千万元、4 千万元时，明年两个项目的利润之和最大，最大值为 1.6 千万元.



(第 19 题图)

20.解：(1)不等式 $|x-1|+|x+1|<m$ 的解集不是空集的充要条件是 $m>(|x-1|+|x+1|)_{\min}$，

因为 $|x-1|+|x+1|\geqslant|x-1-x-1|=2$，

所以 $m>2$，

故实数 m 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

(2)由(1)得 $m-2>0$，则 $f(m)=m+\frac{1}{(m-2)^2}=\frac{1}{2}(m-2)+\frac{1}{2}(m-2)+\frac{1}{(m-2)^2}+2$，

所以

$f(m)\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{2}(m-2)\cdot\frac{1}{2}(m-2)\cdot\frac{1}{(m-2)^2}}+2=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+2$，

当且仅当 $\frac{1}{2}(m-2)=\frac{1}{(m-2)^2}$，

即 $m=\sqrt[3]{2}+2>2$ 时，等号成立，

所以函数 $f(m)=m+\frac{1}{(m-2)^2}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+2$.

21.解：(1)由题意可知，$PE=4$，$PF=3$，因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{3xy}{8}$，

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APE}+S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}x\times4+\frac{1}{2}y\times3=\frac{1}{2}(4x+3y)$，所以 $\frac{3xy}{8}=\frac{1}{2}(4x+3y)$，

所以 $4x+3y=\frac{3xy}{4}$.

(2)因为 $4x+3y\geqslant2\sqrt{4x\cdot3y}$，

所以 $xy\geqslant\frac{256}{3}$，当且仅当 $4x=3y$，

即 $x=8,y=\frac{32}{3}$ 时取等号，

所以 $(S_{\triangle ABC})_{\min}=\frac{3xy}{8}=32$，

故当 $AB=8$km 时，该公园的面积最小为 32km².

22.(1)证明：$\frac{f(q)}{p}=\frac{q^2-pq+q}{p}=\frac{q^2+q}{p}-q$，$\frac{f(p)}{q}=\frac{p^2-p^2+q}{q}=1$，

所以 $\frac{f(q)}{p}-\frac{f(p)}{q}=\frac{q^2+q}{p}-q-1=\frac{(q+1)(q-p)}{p}$，

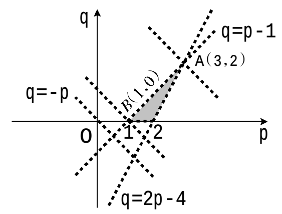
因为 $p>q>0$，所以 $\frac{(q+1)(q-p)}{p}<0$，

即 $\frac{f(q)}{p}-\frac{f(p)}{q}<0$，所以 $\frac{f(q)}{p}<\frac{f(p)}{q}$.

(2)解：由题意得 $\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)<0,\\f(2)>0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}q>0,\\1-p+q<0,\\4-2p+q>0,\end{cases}$

又 $p>0$，作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，由线性规划的知识可知，$p+q$ 在 $A(3,2)$ 处取得最大值 5，在 $B(1,0)$ 处取得最小值 1，因为点 A，点 B，不在可行域内，所以 $p+q$ 取不到最大值与最小值，可得 $1<p+q<5$.所以 p+q 的取值范围是 $(1,5)$.



(第 22 题图)