第 8 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.CDCDCA

7~12.BACCDD

二、填空题

13.x=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

14.-e

15.6

16.$\left[\frac{2}{3}e\sqrt{e}-\sqrt{e},+\infty\right)$

三、解答题

17.**解**:(1)当 $k=0,a=2$ 时,$f(x)=-\sin 2x+2\sin x$,$f'(x)=-2\cos 2x+2\cos x=-4\cos^2x+2\cos x+2=2(2\cos x+1)(1-\cos x)$,

当 $x\in[0,\pi]$时,令 $f'(x)=0$,

解得 $x=\frac{2\pi}{3}$或 $x=0$,

所以 $f(0)=0,f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2},f(\pi)=0$,

所以 $f(x)_{max}=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2)当 k=4 时,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则 $f'(x)=4-2(\cos^2x-\sin^2x)+a\cos x\geqslant 0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

得 $4\cos^2x-a\cos x-6\leqslant 0$,

设 $t=\cos x\in[-1,1]$,$g(t)=4t^2-at-6$,

则 $g(t)\leqslant 0$ 在$[-1,1]$上恒成立,由二次函数图象,知$\begin{cases}g(-1)\leqslant 0,\\g(1)\leqslant 0,\end{cases}$得$-2\leqslant a\leqslant 2$.所以 a 的取值范围是$[-2,2]$.

18.(1)**解**:因为$f(x)=a\ln x+\frac{2}{\sqrt{x}}(x>1)$,

所以 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{a\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$.

要使 $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上不单调,

则 $f'(x)=0$ 在$(1,+\infty)$上有解,

即 $a=\frac{1}{\sqrt{x}}$在$(1,+\infty)$上有解,

所以 $0<a<1$,

所以实数 a 的取值范围是$(0,1)$.

(2)**证明**:当 $a=1$ 时,要证明 $f(x)<\frac{x^2}{2}-x+3$,即证 $g(x)=\ln x+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}+x-3<0$.

$g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}-(x-1)=\frac{(\sqrt{x}-1)(1-x^2-x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$,

因为 $x>1$,所以$\sqrt{x}-1>0,1-x^2-x\sqrt{x}<0$,所以 $g'(x)<0$,则 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,所以 $g(x)<g(1)=-\frac{1}{2}<0$.

故 $f(x)<\frac{x^2}{2}-x+3$.

19.(1)**解**:当 $m=0$ 时,$f(x)=e^x-ex$,$f'(x)=e^x-e$,又 $f'(x)$是增函数,且 $f'(1)=0$,所以当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x<1$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以当 $x=1$ 时,$f(x)$取得极小值 $f(1)=0$,无极大值.

(2)**证明**:$f'(x)=e^x-2mx+m-e$,令 $g(x)=f'(x)=e^x-2mx+m-e$,则 $g'(x)=e^x-2m$,当 $m<0$ 时,则 $g'(x)>0$,故 $g(x)=f'(x)$在$(0,1)$上单调递增,又 $g(0)=f'(0)=1+m-e<0,g(1)=f'(1)=-m>0$,所以存在 $x_0\in(0,1)$,使得 $g(x_0)=f'(x_0)=0$,且当 $x\in(0,x_0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$是减函数,当 $x\in(x_0,1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$是增函数,又因为 $f(0)=1,f(1)=0$,所以 $f(x)$在$(0,1)$上存在唯一零点.

20.**解**:(1)扇形 EOC 的面积为$\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\times 50^2=\frac{2500\pi}{6}-\frac{2500}{2}\theta$,四边形 $OCBF$ 的面积为 $30\times 50-\frac{1}{2}\times 30\times\frac{30}{\tan\theta}$,

故阴影部分的面积为 $S(\theta)=1500+\frac{2500\pi}{6}-50\left(\frac{9}{\tan\theta}+25\theta\right)$.

当 F 与 B 重合时,∠FOC 最小,设为 θ_0.所以 $\theta\in\left[\theta_0,\frac{\pi}{3}\right]$,$\tan\theta_0=\frac{3}{5}$,

所以 $\tan\theta\in\left[\frac{3}{5},\sqrt{3}\right]$.

(2)设 $h(\theta)=\frac{9}{\tan\theta}+25\theta$,

则$h'(\theta)=\frac{-9\sin^2\theta-9\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+25=\frac{-9}{\sin^2\theta}+25$,

令 $h'(\theta)=0$,得 $\tan\theta=\frac{3}{4}\in\left[\frac{3}{5},\sqrt{3}\right]$,

记其解为 θ_1,并且 $h(\theta)$在$[\theta_0,\theta_1)$上单调递减,在$\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增,

所以 $h(\theta)_{min}=h(\theta_1)$,阴影部分的面积的最大值为 $1500+\frac{2500\pi}{6}-50h(\theta_1)$,

此时 $\tan\theta_1=\frac{3}{4}$,

故监控区域 S 最大时,角 θ 的正切值为$\frac{3}{4}$.

21.**解**:(1)函数 f(x)的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=2x\ln x+x=2x\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{\sqrt{e}}{e}$.

当 $0<x<\frac{\sqrt{e}}{e}$时,$f'(x)<0$,

$f(x)$在$\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$上单调递减;

当 $x>\frac{\sqrt{e}}{e}$时,$f'(x)>0$,

$f(x)$在$\left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$上单调递增.

综上,$f(x)$ 的单调递减区间为$\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$.

(2)因为 $f(x)-ax+1\geqslant 0$ 恒成立,即 $x^2\ln x-ax+1\geqslant 0$ 恒成立等价于 $a\leqslant x\ln x+\frac{1}{x}$ 恒成立.

令 $g(x)=x\ln x+\frac{1}{x}$,$g'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$,

令 $h(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}>0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,所以 $g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,因为 $g'(1)=0$,所以 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,$x>1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,所以 $g(x)_{min}=g(1)=1$,所以 $a\leqslant 1$,即实数 a 的取值范围为$(-\infty,1]$.

22.**解**:(1)由已知得当 $a=1$ 时,$f'(x)=2xe^x+x^2e^x+2x+4=(xe^x+2)(x+2)$,令 $g(x)=xe^x+2$,则 $g'(x)=(x+1)e^x$,当 $x<-1$ 时,$g'(x)<0$,当 $x>-1$ 时,$g'(x)>0$,所以函数 $g(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减,在$(-1,+\infty)$上单调递增,所以 $g(x)_{min}=g(-1)=-\frac{1}{e}+2>0$,故 $g(x)=xe^x+2>0$,所以当 $x<-2$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>-2$ 时,$f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,在$(-2,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)_{min}=f(-2)=4e^{-2}-4$.

(2)$f'(x)=2xe^x+x^2e^x+2ax+4a=(xe^x+2a)(x+2)$,令 $h(x)=xe^x+2a(x>0)$.

①当 $a\geqslant 0$ 时,$h(x)=xe^x+2a>0$,又因为 $x+2>0$,故 $f'(x)=(xe^x+2a)(x+2)>0$,

此时 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$f(x)$无极值;

②当 $a<0$ 时,$h'(x)=(x+1)e^x>0$,$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $h(0)=2a<0$,$h(-2a)=-2a(e^{-2a}-1)>0$,

所以 $h(x)=xe^x+2a$ 在$(0,+\infty)$上存在唯一零点,设为 $x_0(x_0>0)$,所以当 $x\in(0,x_0)$时,$h(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$h(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上存在极值点 x_0.

综上,实数 a 的取值范围为$(-\infty,0)$.

第 5 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.CDBAAB　　7~12.ACACCD

二、填空题

13.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

14.$\left(-\frac{1}{3},1\right)$

15.x^2

16.②④⑤

三、解答题

17.**解**:(1)原式$=\frac{3}{2}-1-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{2}$.

(2)原式$=\log_3 3^{-\frac{1}{4}}+\lg(25\times 4)+2+\log_2 4=-\frac{1}{4}+2+2+2=\frac{23}{4}$.

18.**解**:(1)根据题意,$m\in\mathbf{N}_+$,则 $m^2+m=m(m+1)$为正偶数,所以$\frac{1}{m^2+m}>0$,所以 f(x)的定义域为$[0,+\infty)$,

所以幂函数 $f(x)=x^{\frac{1}{m^2+m}}$的单调递增区间为$[0,+\infty)$,无单调递减区间.

(2)若该函数经过点$(2,\sqrt{2})$,即$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{m^2+m}}$,解得 $m=1$,则 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

若 $f(2-a)>f(a-1)$,则有 $2-a>a-1\geqslant 0$,解得 $1\leqslant a<\frac{3}{2}$,所以实数 a 的取值范围为$\left[1,\frac{3}{2}\right)$.

19.**解**:(1)因为函数 $y=c\left(\frac{1}{2}\right)^{mt}$($c$,$m$ 为常数)经过点$(4,64)$,$(8,32)$,

所以$\begin{cases}64=c\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4m},\\32=c\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{8m},\end{cases}$

解得 $m=\frac{1}{4}$,$c=128$.

(2)由(1)得 $y=128\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}$,

所以 $128\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant\frac{1}{2}$,

解得 $t\geqslant 32$.

故至少排气 32 分钟,这个地下车库中的一氧化碳含量才能达到正常状态.

20.**解**:(1)由题意知,$\begin{cases}ba=8,\\ba^3=32,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2,\\b=4,\end{cases}$

可得 $f(x)=4\cdot 2^x$.

(2)$\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{4}\right)^x+1-2m\geqslant 0$ 在$x\in(-\infty,1]$上恒成立,

等价于$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{4}\right)^x+1\right]\geqslant m$ 在 $x\in(-\infty,1]$上恒成立.令 $t=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,

又 $x\leqslant 1$,可得 $t\geqslant\frac{1}{2}$,$y=\frac{1}{2}(t^2+t+1)$,当 $t=\frac{1}{2}$时,$y_{min}=\frac{7}{8}$,所以 $m\leqslant\frac{7}{8}$,所以实数 m 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{7}{8}\right]$.

21.**解**:(1)若 $m=1$,

则 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-1)$,

要使 f(x)有意义,需 $x^2-x-1>0$,

解得$x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$,

所以若 $m=1$,函数 $f(x)$的定义域为$\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

(2)若函数 $f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$,

则 x^2-mx-m 能取遍一切正实数,

所以 $\Delta=m^2+4m\geqslant 0$,

解得 $m\leqslant -4$,或 $m\geqslant 0$,

所以实数 m 的取值范围为$(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$.

(3)若函数 $f(x)$在区间$(-\infty,1-\sqrt{3})$上是增函数,

则 $y=x^2-mx-m$ 在区间$(-\infty,1-\sqrt{3})$上是减函数,且 $x^2-mx-m>0$ 在区间$(-\infty,1-\sqrt{3})$上恒成立,

所以$\frac{m}{2}\geqslant 1-\sqrt{3}$,

且$(1-\sqrt{3})^2-m(1-\sqrt{3})-m\geqslant 0$,

即 $m\geqslant 2-2\sqrt{3}$ 且 $m\leqslant 2$,

所以实数 m 的取值范围是$[2-2\sqrt{3},2]$.

22.**解**:(1)函数 $f(x)=\log_4(2^{2x}+1)+mx$ 的图象经过点 P$\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{4}+\log_2 3\right)$,

则$-\frac{3}{4}+\log_2 3=\log_4(2^3+1)+\frac{3}{2}m$,

解得 $m=-\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\log_4(2^{2x}+1)-\frac{1}{2}x$,且定义域为 $\mathbf{R}$,

所以 $f(-x)=\log_4(2^{-2x}+1)+\frac{1}{2}x=\log_4\frac{4^x+1}{4^x}+\frac{1}{2}x=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x=f(x)$,

所以 $f(x)$是偶函数.

(2)由 $f(x)=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x=\log_4(4^x+1)-\log_4 2^x=\log_4\frac{4^x+1}{2^x}$,且 $f(x)=g(x)$,

得 $\log_4(2^x+x+a)=\log_4\frac{4^x+1}{2^x}$,得 $2^x+x+a=\frac{4^x+1}{2^x}>0$,化为 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^x-x$,且在 $x\in[-2,2]$上单调递减,所以$\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\leqslant a\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+2$,所以$-\frac{7}{4}\leqslant a\leqslant 6$,所以满足题意的实数 a 的取值范围是$\left[-\frac{7}{4},6\right]$.

第 6 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.DBCABC　　7~12.CBCBBB

二、填空题

13.2　　14.$[2,3]$

15.24　　16.$[e+1,+\infty)$

三、解答题

17.**解**：原方程可化为$(\lg a+\lg x)\cdot(\lg a+2\lg x)=4$，

即 $2(\lg x)^2+3\lg a\cdot\lg x+(\lg a)^2-4=0$.

令 $\lg x=t$，因为 $x>1$，所以 $t>0$，

则有 $2t^2+3\lg a\cdot t+(\lg a)^2-4=0$ 的解都是正数.

设 $f(t)=2t^2+3\lg a\cdot t+(\lg a)^2-4$，

则$\begin{cases}\Delta=(3\lg a)^2-8[(\lg a)^2-4]\geqslant 0,\\ -\dfrac{3\lg a}{4}>0,\\ f(0)=(\lg a)^2-4>0,\end{cases}$

解得 $\lg a<-2$，所以 $0<a<\dfrac{1}{100}$，

所以实数 a 的取值范围是$\left(0,\dfrac{1}{100}\right)$.

18.**解**：(1)求 $g(x)=f(x)-x(x\geqslant 0)$的零点，即求方程 $f(x)=x(x\geqslant 0)$的解.由题意得，$2x-\dfrac{2}{x+1}=x$，整理，得 $x^2+x-2=0$，又 $x\geqslant 0$，解得 $x=1$，所以 $g(x)=f(x)-x(x\geqslant 0)$的零点为 1.

(2)若 $f(x)$为偶函数，设 $x<0$，则$-x>0$，由题意得，$f(-x)=2(-x)-\dfrac{2}{-x+1}=-2x+\dfrac{2}{x-1}$，因为 $f(x)$为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)=-2x+\dfrac{2}{x-1}$，$x<0$.由 $x<0$，$f(x)<-4x-3$，得$-2x+\dfrac{2}{x-1}<-4x-3$，整理，得 $2x^2+x-1>0$，解得 $x<-1$，所以不等式的解集为$(-\infty,-1)$.

19.**解**：(1)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，

则 $f(0)=c=1$.

由 $f(x+1)-f(x)=2x$.

得 $a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2x$，

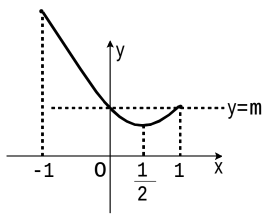
整理，得 $2ax+a+b=2x$，

所以 $a=1,b=-1,c=1$，

所以 $f(x)=x^2-x+1$.

(2)由在区间$[-1,1]$上，$y=f(x)-m$ 有两个零点，可知 $y=m$ 与 $y=f(x)$有 2 个交点，由于 $f(-1)=3$，$f(1)=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$，

结合函数的图象，可知$\dfrac{3}{4}<m\leqslant 1$.所以实数 m 的取值范围是$\left(\dfrac{3}{4},1\right]$.



（第 19 题图）

20.**解**：(1)因为当 $b=12$ 时，

$f(3)=\dfrac{3}{4}<\dfrac{3}{2}$，

所以当 $b=12$ 时不满足条件②.

(2)由条件①可知，$f(x)=\dfrac{x}{4}-\dfrac{b}{x}+4$ 在$[3,6]$上单调递增，

所以当 $b\geqslant 0$ 时，满足条件；

当 $b<0$ 时，得 $2\sqrt{-b}\leqslant 3\Leftrightarrow -\dfrac{9}{4}\leqslant b<0$.

所以 $b\geqslant -\dfrac{9}{4}$.

由条件②可知，$f(x)\geqslant\dfrac{x}{2}$，

即不等式$\dfrac{x}{4}+\dfrac{b}{x}\leqslant 4$，在$[3,6]$上恒成立，所以$\begin{cases}\dfrac{3}{4}+\dfrac{b}{3}\leqslant 4,\\ \dfrac{6}{4}+\dfrac{b}{6}\leqslant 4,\end{cases}$得 $b\leqslant\dfrac{39}{4}$.

综上，b 的取值范围是$\left[-\dfrac{9}{4},\dfrac{39}{4}\right]$.

21.**解**：(1)当 $m=0$ 时，

$f(x)=\begin{cases}2^{|x|},x\leqslant 0,\\ |\lg x|+1,x>0.\end{cases}$

令 $y=f(x)-2=0$，得 $f(x)=2$，

则$|\lg x|+1=2$ 或 $2^{|x|}=2$，

解$|\lg x|+1=2$，得 $x=10$ 或 $x=\dfrac{1}{10}$；

解 $2^{|x|}=2$，得 $x=-1$ 或 $x=1$(舍去).

所以当 $m=0$ 时，函数 $y=f(x)-2$ 的零点为-1，$\dfrac{1}{10}$，10，共 3 个.

(2)令$[f(x)]^2-3f(x)=0$，

得 $f(x)=0$ 或 $f(x)=3$，

由题意知 $f(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)=3$ 必须有 3 个实根，

即$|\lg x|+1=3$ 和 $2^{|x|}=3$ 共有 3 个根，

①解 $2^{|x|}=3$，得 $x=-\log_2 3$ 或 $x=\log_2 3>1$(舍去)，故有 1 个根；

②解$|\lg x|+1=3$，得 $x=100$ 或 $x=\dfrac{1}{100}$.

要使得两根都满足题意，则有 $m<\dfrac{1}{100}$，又 $0\leqslant m<1$，所以 $0\leqslant m<\dfrac{1}{100}$，所以实数 m 的取值范围为$\left[0,\dfrac{1}{100}\right)$.

22.**解**：(1)当 $m=1$ 时，

$f(x)=\sin x+\cos x-\sin x\cos x+1$，

令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，且 $t^2=1+2\sin x\cos x$，

所以 $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$，

则 $f(t)=t-\dfrac{t^2-1}{2}+1=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+2$.

因为 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

所以当 $t=1$ 时，函数 $f(x)$取最大值为 2，此时$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，

解得 $x=2k\pi$ 或 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

(2)因为 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$，所以 $x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}\right]$，则 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，则 $f(t)=t-m\cdot\dfrac{t^2-1}{2}+1$，令 $f(t)=0$，则 $t+1=m\cdot\dfrac{t^2-1}{2}$，

易知 $t=-1$ 是方程 $f(t)=0$ 的一个解，且$-1=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$在 $x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}\right]$有三个 x 与之对应；

当 $t\neq -1$ 时，由 $t+1=m\cdot\dfrac{t^2-1}{2}$，得 $t=\dfrac{2}{m}+1$，故 $t=\dfrac{2}{m}+1=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$在 $x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}\right]$也需有三个 x 与之对应，故$\dfrac{2}{m}+1\in(-1,1]$，解得 $m<-1$，

所以实数 m 的取值范围为$(-\infty,-1)$.

第 7 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.CABAAD　　7~12.ABDCBA

二、填空题

13.$(-2,9)$

14.$y=x+\dfrac{5}{27}$或 $y=x-1$

15.$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

16.$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$

三、解答题

17.**解**：(1)化简，得 $f(x)=\dfrac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x)=\left(\dfrac{2e^x}{1-x}\right)'$

$=\dfrac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}$

$=\dfrac{2(2-x)e^x}{(1-x)^2}$，所以 $f'(2)=0$.

(2)因为 $f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'$

$=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\dfrac{1}{x}$，所以 $f'(1)=-\dfrac{3}{2}$.

18.**解**：$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$g'(x)=\dfrac{a}{x}(x>0)$.

由已知，得$\begin{cases}\sqrt{x}=a\ln x,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{a}{x},\end{cases}$

解得$a=\dfrac{e}{2}$，$x=e^2$. 所以两条曲线的交点坐标为 (e^2,e)，切线的斜率 $k=f'(e^2)=\dfrac{1}{2e}$，所以切线的方程为 $y-e=\dfrac{1}{2e}(x-e^2)$，

即$\dfrac{x}{2e}-y+\dfrac{e}{2}=0$.

19.(1)**解**：函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=ae^x\ln x+\dfrac{a}{x}e^x-\dfrac{b}{x^2}e^{x-1}+\dfrac{b}{x}e^{x-1}$，

由题意可得 $f(1)=2$，$f'(1)=e$，

则$\begin{cases}b=2,\\ ae-b+b=e,\end{cases}$解得 $a=1,b=2$.

(2)**证明**：由(1)，知 $f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2}{x}e^{x-1}$，

从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$.

设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$，

所以当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$；

当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$上单调递减，

在$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，

从而 $g(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为$g\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$，

则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x\in(0,1)$时，$h'(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，

故 $h(x)$在$(0,1)$上单调递增，

在$(1,+\infty)$上单调递减，

从而 $h(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值为$h(1)=-\dfrac{1}{e}$.

综上，当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

20.**解**：(1)$f'(x)=e^x-2ex+a$，由 $f(x)$在$(0,1)$上单调，知在$(0,1)$上 $f'(x)\geqslant 0$ 或 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立.令 $g(x)=e^x-2ex+a$，则 $g'(x)=e^x-2e$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\ln(2e)$，当 $0<x<1<\ln(2e)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以由题意得，$g(1)\geqslant 0$ 或 $g(0)\leqslant 0$，解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant e$，所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,-1]\cup[e,+\infty)$.

(2)$y=e^x-ex^2+ax+ex\ln x$ 的图象恒在 x 轴上方，即当 $x\in(0,+\infty)$时，$y>0$ 恒成立，亦即 $a>ex-\dfrac{e^x}{x}-e\ln x$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.令 $h(x)=ex-\dfrac{e^x}{x}-e\ln x$，

则 $h'(x)=\dfrac{ex^2-ex-e^x(x-1)}{x^2}$

$=\dfrac{(ex-e^x)(x-1)}{x^2}$，

令 $h'(x)>0$，解得 $0<x<1$；

令 $h'(x)<0$，解得 $x>1$，所以函数 $h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $h(x)$在 $x=1$ 处取得最大值，最大值为 $h(1)=0$，所以 $a>0$，所以实数 a 的取值范围为$(0,+\infty)$.

21.**解**：(1)设 $AC=c$.在$\triangle ABM$ 中，

$\tan\angle BMA=\dfrac{a}{\frac{c}{2}}=\dfrac{2a}{c}$.

在$\triangle CDM$ 中，

$\tan\angle DMC=\dfrac{b}{\frac{c}{2}}=\dfrac{2b}{c}$.

因为$\angle BMD=90°$，所以$\angle BMA+\angle DMC=90°$，所以$\tan\angle BMA\cdot\tan\angle DMC=1$，

即 $c^2=4ab$，所以 $c=2\sqrt{ab}$，所以 $AC=2\sqrt{ab}$.

(2)$\lambda=\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}=\dfrac{2k}{1+k^2}=\dfrac{2}{k+\frac{1}{k}}$.

在$\triangle CBD$ 中，过点 B 作 CD 的垂线，垂足为 E，

所以 $\tan\angle CBE=\dfrac{a}{c}$，

$\tan\angle DBE=\dfrac{b-a}{c}$，

所以 $\tan\angle CBD=\tan(\angle CBE+\angle DBE)=\dfrac{\tan\angle CBE+\tan\angle DBE}{1-\tan\angle CBE\cdot\tan\angle DBE}=$

$\dfrac{\dfrac{a}{2\sqrt{ab}}+\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}}{1-\dfrac{a}{2\sqrt{ab}}\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}}=\dfrac{\dfrac{b}{2\sqrt{ab}}}{1-\dfrac{b-a}{4b}}=1$，

所以$\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{2b}$，

因为 $k=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$，所以 $k=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2k^2}$，

即 $2k^3-3k^2-1=0$，

设 $f(x)=2x^3-3x^2-1$，$x>1$，

所以 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)>0$，

所以函数 $f(x)$单调递增.

若 $\lambda\in(0.8,1)$，则 $2<k+\dfrac{1}{k}<\dfrac{5}{2}$，

即 $1<k<2$，

因为 $f(1)=-2<0$，$f(2)=3>0$，

所以 $1<k<2$ 成立，所以 $\lambda\in(0.8,1)$成立，所以能满足委托单位的设计要求.

22.(1)**证明**：当$a=1$时，$f(x)\geqslant 1$，

则$e^x-x^2\geqslant 1$，即$e^x\geqslant 1+x^2$，

两边同除e^x可知，

原式等价于$(x^2+1)\cdot e^{-x}-1\leqslant 0$.

设函数$g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，

则$g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.

当$x\neq 1$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

而$g(0)=0$，故当$x\geqslant 0$时，$g(x)\leqslant 0$，

即$f(x)\geqslant 1$.

(2)由$f(x)=0$，得$a=\dfrac{e^x}{x^2}$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点，等价于方程$a=\dfrac{e^x}{x^2}$只有一个实根.

令$g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，

则$g'(x)=\dfrac{e^xx^2-2e^xx}{(x^2)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$，

所以当$x\in(0,2)$时，$g(x)$单调递减，

当$x\in(2,+\infty)$时，$g(x)$单调递增，

而$g(2)=\dfrac{e^2}{4}$，所以当且仅当$a=\dfrac{e^2}{4}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点.