第12期

第2~3版同步周测

一、选择题

1~6.ACCBBC 7~12.CBCADA

二、填空题

13.2 14.2

15.$\frac{8\sqrt3}{5}$ 16.6

三、解答题

17.解:(1)$2a=\sqrt{(6+4)^2+(2\sqrt2)^2}-\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt2)^2}=4\sqrt3$,所以$a^2=12$,又$c=4$,所以$b^2=4^2-12=4$,所以该双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)因为$MF_1\perp F_1F_2$,所以点M的横坐标为-4,当$x=-4$时,$y^2=\frac43$,所以$|MF_1|=\frac{2\sqrt3}{3}$,所以$S_{\triangle MF_1F_2}=\frac12|MF_1||F_1F_2|=\frac12\times\frac{2\sqrt3}{3}\times8=\frac{8\sqrt3}{3}$.

18.(1)解:因为$|PF|=y_P+\frac p2$,

所以$4=3+\frac p2$,解得$p=2$,

所以抛物线C的标准方程为$x^2=4y$.

(2)证明:设切线AN的方程为$y=k(x-a)$,$k\neq0$,

联立方程组$\begin{cases}x^2=4y,\\y=k(x-a),\end{cases}$

消y可得$x^2-4kx+4ka=0$,

由题意可得$\Delta=16k^2-16ka=0$,即$a=k$,

所以切点$N(2a,a^2)$,又$A(a,0)$,$F(0,1)$,

所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AN}=(-a,1)\cdot(a,a^2)=0$.

所以$\angle FAN=90°$.

所以以FN为直径的圆过点A.

19.解:(1)椭圆C的离心率为$e=\frac ca=\frac{\sqrt2}{2}$,短轴的一个端点到焦点的距离为$\sqrt{b^2+c^2}=a=\sqrt2$,

所以$c=1$,所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$,

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设直线l的方程为$y=kx+m$,则直线l与y轴交点的纵坐标为m,

设点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$化简得

$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,

由韦达定理,得$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$,

$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)>0$,

化简得$m^2<2k^2+1$.

由线段AB的中点在直线$x=-\frac12$上,

得$x_1+x_2=-1$,

故$-\frac{4km}{2k^2+1}=-1$,即$4km=2k^2+1$,

所以$m=\frac{2k^2+1}{4k}=\frac k2+\frac1{4k}\geq2\sqrt{\frac k2\cdot\frac1{4k}}=\frac{\sqrt2}{2}$,

当且仅当$\frac k2=\frac1{4k}$,即$k=\frac{\sqrt2}{2}$时取等号,此时$m^2<2k^2+1$,满足$\Delta>0$,

因此,直线l与y轴交点纵坐标的最小值为$\frac{\sqrt2}{2}$.

20.(1)解:由$(x+1)^2+y^2=8$,知$C_2(-1,0)$,半径$R=2\sqrt2$.因为$\triangle C_2AB$的周长为$4+4\sqrt2$,所以$|AB|=4$.又曲线C_1,C_2关于x轴对称,则$AB\perp x$轴,而$C_2(-1,0)$到AB的距离$d=\sqrt{R^2-2^2}=2$,故弦AB的一个端点坐标为(1,2),

将(1,2)代入$y^2=2px(p>0)$,得$p=2$,故曲线C_1的方程为$y^2=4x$.

(2)证明:由(1)知$F(1,0)$,由于直线l不与x轴重合,可设$l:x=my+1$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$消去x整理得$y^2-4my-4=0$,因此$y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$,

由于$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}$

$=\frac{y_1}{my_1+2}+\frac{y_2}{my_2+2}$

$=\frac{2my_1y_2+2(y_1+y_2)}{(my_1+2)(my_2+2)}$

$=\frac{-8m+8m}{(my_1+2)(my_2+2)}=0$,

故k_1+k_2为定值0.

21.解:(1)由题意知,$c=1$,$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$.

$2a=|TF_1|+|TF_2|=\sqrt{(-1+1)^2+\left(-\frac32\right)^2}+\sqrt{(-1-1)^2+\left(-\frac32\right)^2}=\frac32+\frac52=4$,

所以$a=2$,所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt3$,

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)若存在点$P(m,0)$,使得以PG,PH为邻边的平行四边形是菱形,

则P为线段GH的中垂线与x轴的交点.

设直线l_1的方程为$y=kx+2$,$G(x_1,y_1)$,$H(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=kx+2,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$,

$\Delta=256k^2-16(3+4k^2)>0$,又$k>0$,

所以$k>\frac12$.

由韦达定理,得$x_1+x_2=-\frac{16k}{3+4k^2}$,

设GH的中点为(x_0,y_0),

则$x_0=-\frac{8k}{3+4k^2}$,$y_0=kx_0+2=\frac{6}{3+4k^2}$,

所以线段GH的中垂线方程为

$y=-\frac1k\left(x+\frac{8k}{3+4k^2}\right)+\frac{6}{3+4k^2}$,

令$y=0$,可得$x=\frac{-2k}{3+4k^2}=-\frac{2}{\frac3k+4k}$,

即$m=-\frac{2}{\frac3k+4k}$.

因为$k>\frac12$,所以$\frac3k+4k\geq2\sqrt{\frac3k\cdot4k}=4\sqrt3$,当且仅当$\frac3k=4k$,即$k=\frac{\sqrt3}{2}$时取等号,

所以$m\geq-\frac{2}{4\sqrt3}=-\frac{\sqrt3}{6}$,且$m<0$.

所以m的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt3}{6},0\right)$.

22.(1)解:抛物线$\Gamma:y^2=8x$的焦点$F(2,0)$,准线方程为$x=-2$,

圆$\Omega:x^2+y^2-4x=0$的圆心为(2,0),半径为2,所以Ω的圆心到Γ的准线的距离为$2-(-2)=4$.

(2)解:四边形TAFB的面积为$S_{TAFB}=S_{\triangle TAF}+S_{\triangle TBF}=2S_{\triangle TAF}$

$=2\cdot\frac12|TA|\cdot|AF|$

$=2|TA|=2\sqrt{|TF|^2-|AF|^2}$

$=2\sqrt{(x-2)^2+y^2-4}$

$=2\sqrt{x^2+y^2-4x}$

$=2\sqrt{x^2+4x}$,

由$f(x)=x^2+4x$在[1,4]上单调递增,可得$f(x)\in[5,32]$,

则$2\sqrt{x^2+4x}\in[2\sqrt5,8\sqrt2]$,

即四边形TAFB的面积的取值范围是$[2\sqrt5,8\sqrt2]$.

(3)证明:当直线l的方程为$x=2$时,联立抛物线$\Gamma:y^2=8x$,可得$y=\pm4$,

可得$|MN|=8$.易知$|PQ|=4$,由抛物线和圆均关于x轴对称,可得$|MP|=|NQ|=2=\frac12|PQ|$成立;

设直线l的方程为$x=my+t$,由$|MP|=|NQ|=\frac12|PQ|$,结合抛物线和圆均关于x轴对称,可得直线l垂直于x轴,即$x=t$,将其分别代入抛物线$\Gamma:y^2=8x$和圆$\Omega:x^2+y^2-4x=0$,

可得$M(t,2\sqrt{2t})$,$N(t,-2\sqrt{2t})$,$P(t,\sqrt{4t-t^2})$,$Q(t,-\sqrt{4t-t^2})$,

由$|MP|=2\sqrt{2t}-\sqrt{4t-t^2}=\frac12\cdot2\sqrt{4t-t^2}$,解得$t=2$或$t=0$(舍去),可得直线l的方程为$x=2$.

综上,“$|MP|=|NQ|=\frac12|PQ|$”的充要条件是“直线l的方程为$x=2$”.

2020-2021学年

数学·高考版(文)答案页第3期

学习周报® ③

第9期

第2~3版同步周测

一、选择题

1~6.AADDBC 7~12.DCBADB

二、填空题

13.$\frac{2\sqrt5}{5}$

14.$x+y+8=0$或$3x-5y=0$

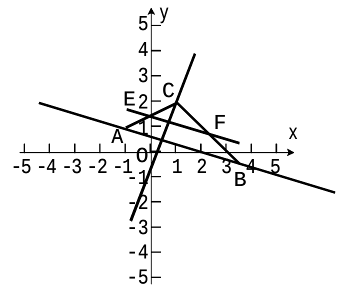
15.6

16.$x^2+\frac{y^2}{3}=1(y\neq0)$.

三、解答题

17.解:(1)因为$k_{AB}=-\frac13$,所以AB边上的高所在直线的斜率为3,又AB边上的高过点C(1,2),所以AB边上的高所在的直线方程为$y-2=3(x-1)$,即$3x-y-1=0$.

(2)易得$A(-1,1)$,$E\left(0,\frac32\right)$,根据中位线定理可得$k_{EF}=-\frac13$,由点斜式,可得直线EF的方程为$y-\frac32=-\frac13(x-0)$,即直线EF的方程为$2x+6y-9=0$.



(第17题图)

18.解:(1)直线$l:(k-1)x-2y+5-3k=0(k\in R)$可化为$(x-3)k-x-2y+5=0$,

令$\begin{cases}x-3=0,\\-x-2y+5=0,\end{cases}$得定点P的坐标为(3,1).

(2)易知圆心在AP的垂直平分线上,设AP垂直平分线上的点为(x,y),则$\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$,化简得$x-y-4=0$,

又因为圆心在直线$x-2y+2=0$上,

所以由$\begin{cases}x-2y+2=0,\\x-y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=10,\\y=6,\end{cases}$

所以圆C的圆心坐标为(10,6),

半径$r=\sqrt{(10-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{74}$,

所以圆C的方程为$(x-10)^2+(y-6)^2=74$.

19.解:(1)根据题意,圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$的圆心为(3,4),半径$r=2$,

分2种情况讨论:

①当直线的斜率不存在时,直线方程为$x=1$,与圆相切,符合题意;

②当直线的斜率存在时,设切线的方程为$y=k(x-1)$,

则有$\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,解得$k=\frac34$,此时切线的方程为$y=\frac34(x-1)$,即$3x-4y-3=0$.

综上,所求的切线方程为$x=1$或$3x-4y-3=0$.

(2)根据题意,设P(m,n),

则$|AP|^2+|BP|^2=(m+1)^2+n^2+(m-1)^2+n^2=2(m^2+n^2)+2$,

又由$OP=\sqrt{m^2+n^2}$(O为坐标原点),则当OP最小时,$|AP|^2+|BP|^2$取得最小值,

又由P在圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$上,

则$|OP|_{min}=5-2=3$,

即(m^2+n^2)的最小值为9,此时$|AP|^2+|BP|^2$取得最小值,且其最小值为$2\times9+2=20$,

此时$m=3\times\frac35=\frac95$,$n=3\times\frac45=\frac{12}{5}$,

即点P的坐标为$\left(\frac95,\frac{12}{5}\right)$.

20.解:(1)根据题意,圆$C:x^2+y^2-6x-10y-6t=0$变形可得$(x-3)^2+(y-5)^2=34+6t$,

故圆心为C(3,5),半径$r=\sqrt{34+6t}$,

则圆心C到直线l的距离为

$d=\frac{|3+15+12|}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$,

又弦长为$2\sqrt{10}$,

则$r^2=(3\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2=100$,

即$34+6t=100$,解得$t=11$.

(2)当$t=1$时,圆C的方程为$x^2+y^2-6x-10y-6=0$,①

变形可得$(x-3)^2+(y-5)^2=40$,

则圆心为C(3,5),半径$r=2\sqrt{10}<3\sqrt{10}$,圆C与直线l相离.

假设在直线AB上存在一个定点满足条件,设动点P(m,n).

由已知得$PA\perp AC$,$PB\perp BC$,

则A,B在以CP为直径的圆$(x-3)\cdot(x-m)+(y-5)(y-n)=0$上,

该圆的方程可化为$x^2+y^2-(3+m)x-(5+n)y+3m+5n=0$.②

由①-②得,直线AB的方程为$(m-3)x+(n-5)y-3m-5n-6=0$.③

又点P(m,n)在直线l上,则$m+3n+12=0$,即$m=-3n-12$,代入③式得

$(-3n-15)x+(n-5)y+4n+30=0$,

即直线AB的方程为$15x+5y-30+n\cdot(3x-y-4)=0$.

因为上式对任意n都成立,

故$\begin{cases}3x-y-4=0,\\15x+5y-30=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac53,\\y=1,\end{cases}$

故直线AB恒过一个定点,定点坐标为$\left(\frac53,1\right)$.

21.解:(1)过点$B(4,0)$与$C(8,-4)$的直线方程为$x+y-4=0$.

依题意,知A,B两球碰撞时,球A的球心在直线$x+y-4=0$上,且在第一象限,

此时$|AB|=2$,设A,B两球碰撞时球A的球心坐标为(a,b),

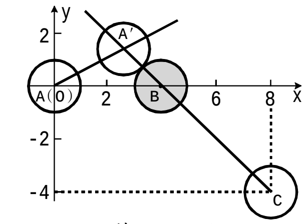
则$\begin{cases}a+b-4=0,\\\sqrt{(a-4)^2+b^2}=2,\\a>0,b>0,\end{cases}$

解得$a=4-\sqrt2$,$b=\sqrt2$,

即A,B两球碰撞时球A的球心坐标为$A'(4-\sqrt2,\sqrt2)$,

所以母球A球心运动的直线方程为

$y=\frac{\sqrt2}{4-\sqrt2}x=\frac{2\sqrt2+1}{7}x$.



(第21题图)

(2)$A(0,-2)$,$A'(4-\sqrt2,\sqrt2)$,因为$\overrightarrow{AA'}=(4-\sqrt2,2+\sqrt2)$,$\overrightarrow{CA'}=(-4-\sqrt2,\sqrt2+4)$,所以$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{CA'}=6\sqrt2-4>0$,所以$\angle AA'C$为锐角,故B在直线$AA'$上的射影在线段$AA'$上,该点到B的距离小于2,故球A经过该点之前就会与球B碰撞,故不可能让母球A击打目标球B球后,使目标球B向C(8,-4)运动.

22.解:(1)设点$A\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)$,

则$S_{\triangle OAF}=\frac12\cdot2y_0\cdot\frac{y_0^2}{4}=2$,

解得$y_0=2$,所以$A(1,2)$,

故$r^2=1^2+2^2=5$.

所以圆O的方程是$x^2+y^2=5$.

(2)由$\begin{cases}y=k(x-1),\\x^2+y^2=5,\end{cases}$

得$(1+k^2)x^2-2k^2x+k^2-5=0$,且$k<0$.

设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=\frac{2k^2}{1+k^2}$,$x_1x_2=\frac{k^2-5}{1+k^2}$,

所以$\frac{k_1k_2}{k}=\frac{y_1y_2}{k(x_1-3)(x_2-3)}$

$=\frac{k^2(x_1-1)(x_2-1)}{k(x_1-3)(x_2-3)}$

$=k\cdot\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+9}$

$=k\cdot\frac{\frac{k^2-5}{1+k^2}-\frac{2k^2}{1+k^2}+1}{\frac{k^2-5}{1+k^2}-3\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)+9}$

$=k\cdot\frac{k^2-5-2k^2+1+k^2}{k^2-5-6k^2+9(1+k^2)}=\frac{-k}{1+k^2}$,

又$k<0$,

所以$\frac{-k}{1+k^2}=\frac{1}{-\frac1k-k}\leq\frac12$,

当且仅当$k=-1$时,等号成立,

所以$\frac{k_1k_2}{k}$的最大值为$\frac12$,

此时直线l的方程为$y=-x+1$.

第 10 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.DCDCBC　　7~12.ACDACA

二、填空题

13.$\frac{1}{4}$　　14.$\frac{2}{3}$

15.$2\sqrt{3+2\sqrt{3}}$　　16.$\frac{3}{4}$

三、解答题

17.**解:**因为椭圆中心在原点,焦点在坐标轴上,且经过两点 $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$,$Q\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,

所以设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$,

则$\begin{cases}\frac{1}{9}m+\frac{1}{9}n=1,\\ \frac{1}{4}n=1,\end{cases}$解得 $m=5,n=4$,

所以椭圆方程为 $5x^2+4y^2=1$,

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{5}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

18.**解:**(1)根据题意,椭圆$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$中,$a=2\sqrt{5}$,$b=4$,则 $c=\sqrt{20-16}=2$,则 $A(0,4)$,$F(2,0)$.易知直线 BC 斜率存在,设为 k,再设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,BC 的中点 $D(x_0,y_0)$,则有$\begin{cases}\frac{x_1^2}{20}+\frac{y_1^2}{16}=1,\\ \frac{x_2^2}{20}+\frac{y_2^2}{16}=1,\end{cases}$两式相减,得$\frac{x_0}{5}+\frac{y_0k}{4}=0$,①

又由 $F(2,0)$ 为△ABC 的重心,得$\frac{x_1+x_2+0}{3}=\frac{2x_0}{3}=2$,$\frac{y_1+y_2+4}{3}=\frac{2y_0+4}{3}=0$,

解得 $x_0=3,y_0=-2$,代入①得 $k=\frac{6}{5}$,则直线 BC 的方程为 $6x-5y-28=0$.

(2)根据题意,由(1)的结论,$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1-4)$,$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2-4)$,因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,

所以 $x_1x_2+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16=0$,②

易知直线 BC 斜率存在,设 BC 的方程为 $y=kx+b$,代入 $4x^2+5y^2=80$,可得$(4+5k^2)x^2+10bkx+5b^2-80=0$.

所以 $x_1+x_2=\frac{-10bk}{4+5k^2}$,$x_1\cdot x_2=\frac{5b^2-80}{4+5k^2}$,

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=\frac{8b}{4+5k^2}$,

$y_1\cdot y_2=k^2x_1x_2+bk(x_1+x_2)+b^2=\frac{4b^2-80k^2}{4+5k^2}$,

代入②得 $b=-\frac{4}{9}$,或 $b=4$(舍去).

所以直线 BC 过定点 $E\left(0,-\frac{4}{9}\right)$,设 $D(x,y)$,则$\frac{y+\frac{4}{9}}{x}\cdot\frac{y-4}{x}=-1$,即 $9x^2+9y^2-32y-16=0$,所以所求点 D 的轨迹方程是 $x^2+\left(y-\frac{16}{9}\right)^2=\left(\frac{20}{9}\right)^2(y\neq4)$.

19.**解:**(1)根据题意,直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$恰有一个公共点 P,即相切,由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$得$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$,则 $\Delta=(2a^2km)^2-4(a^2k^2+b^2)a^2(m^2-b^2)=0$,化简,得 $m^2=a^2k^2+b^2$.

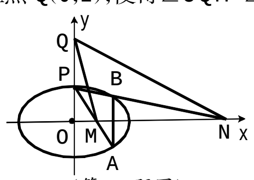
(2)因点 Q 与点 P 关于坐标原点 O 对称,故△QAB 的面积是△OAB 的面积的两倍.所以当 $k=-\frac{1}{2}$时,△OAB 的面积取到最大值$\frac{a^2}{2}$,此时 $OA\perp OB$,从而原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{a}{\sqrt{2}}$,又 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$,

故$\frac{m^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$.再由(1),得$\frac{a^2k^2+b^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$,则 $k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}$.又 $k=-\frac{1}{2}$,故 $k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{8}$,从而 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{8}$,即 $e=\frac{\sqrt{10}}{4}$.所以椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{10}}{4}$.

20.**解:**(1)设椭圆的焦距为 2c,由题意可得,$b=1$,$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a^2=b^2+c^2$,解得 $a=2$.

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $B(m,n)$,$M(x_M,0)$,$N(x_N,0)$,直线 BP 的方程为 $y-1=\frac{n-1}{m}x$,令 $y=0$,可得 $x_N=\frac{m}{1-n}$,所以 $N\left(\frac{m}{1-n},0\right)$.由点 A,B 关于 x 轴对称,所以 $A(m,-n)$.同理,$M\left(\frac{m}{1+n},0\right)$.假设在 y 轴的正半轴上存在点 $Q(0,t)(t>0)$,使得∠OQM=∠ONQ.由 tan∠OQM=tan∠ONQ,可得$\frac{|x_M|}{|t|}=\frac{|t|}{|x_N|}$,即 $t^2=|x_Mx_N|$,所以 $t^2=\frac{m^2}{1-n^2}$,又点 B 在椭圆 C 上,所以$\frac{m^2}{4}+n^2=1$,所以 $t^2=4$,又 $t>0$,解得 $t=2$.经过验证:$t=2$ 时,∠OQM=∠ONQ.所以在 y 轴的正半轴上存在点 $Q(0,2)$,使得∠OQM=∠ONQ.



(第 20 题图)

21.(1)**解:**椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得 $a=\sqrt{2}c$,$b=c$,所以椭圆 C 的方程为 $x^2+2y^2=2c^2$,

由$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1,\\ x^2+2y^2=2c^2,\end{cases}$得 $5y^2+2\sqrt{2}y+2-4c^2=0$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$,$y_1y_2=\frac{2-4c^2}{5}$.由 $OM\perp ON$,得

$x_1x_2+y_1y_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+1\right)+y_1y_2=\frac{3}{2}y_1y_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)+1=\frac{3}{2}\cdot\frac{2-4c^2}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{5}+1=0$,

解得 $c=1$,则 $a=\sqrt{2}$,$b=1$,所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明:**$N(x_2,y_2)$,关于 x 轴的对称点为 $Q(x_2,-y_2)$,

由$\begin{cases}x=my+1,\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$得$(2+m^2)y^2+2my-1=0$,

又 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{2+m^2}$,$y_1y_2=-\frac{1}{2+m^2}$,则 $k_{PM}=\frac{y_1}{x_1-2}$,$k_{QM}=\frac{y_2+y_1}{x_1-x_2}$,

$$k_{PM}-k_{MQ}=\frac{x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2-x_1y_1+2y_2+2y_1}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$$

$$=\frac{-y_1(my_2+1)-(my_1+1)y_2+2y_1+2y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$$

$$=\frac{y_1+y_2-2my_1y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$$

$$=\frac{-\frac{2m}{2+m^2}+\frac{2m}{2+m^2}}{(x_1-2)(x_1-x_2)}=0,$$

即 $k_{PM}=k_{MQ}$,则 P、M、Q 三点共线.

22.(1)**解:**在圆 E 中,令 $y=0$,得 $x=\pm\sqrt{3}$,所以由题意可得 $c=\sqrt{3}$.

圆 E 的方程可化为 $x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$,

所以圆 E 的半径为$\frac{7}{4}$,

所以$|PF_1|=\frac{7}{2}$.

连接 PF_2,因为 F_2 在圆上,

所以 $PF_2\perp F_1F_2$,

又$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}$,

则$|PF_2|=\sqrt{|PF_1|^2-|F_1F_2|^2}=\sqrt{\frac{49}{4}-12}=\frac{1}{2}$,

由椭圆的定义,得 $2a=|PF_1|+|PF_2|=4$,

所以 $a=2$,$b^2=a^2-c^2=1$,

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)**证明:**当直线 l 的斜率存在时,设 l 的斜率为 k,则 l 的方程为 $y=kx+\sqrt{\frac{3}{5}}$,

代入椭圆 C 的方程得 $x^2+4\left(kx+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=4$,即$(1+4k^2)x^2+8\sqrt{\frac{3}{5}}kx-\frac{8}{5}=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{8k}{1+4k^2}$,$x_1x_2=-\frac{8}{5(1+4k^2)}$,

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\left(kx_1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(kx_2+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=(1+k^2)x_1x_2+\sqrt{\frac{3}{5}}k\cdot(x_1+x_2)+\frac{3}{5}=-\frac{8(1+k^2)}{5(1+4k^2)}-\frac{24k^2}{5(1+4k^2)}+\frac{3}{5}=-\frac{8(1+4k^2)}{5(1+4k^2)}+\frac{3}{5}=-1$;

当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 与 y 轴重合,此时点 $A(0,-1)$,$B(0,1)$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$.

综上,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$ 为定值.

第 11 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.DACACC　　7~12.CCBABA

二、填空题

13.$-\frac{1}{4}$　　14.$\frac{1}{4}$

15.6　　16.6π

三、解答题

17.**解:**由题意知,这两条直线不能是 x 轴和 y 轴,因为它们都只和抛物线有 1 个交点.

设一条直线方程为 $y=kx$,

则另一条直线方程为 $y=-\frac{x}{k}$,

分别联立方程组$\begin{cases}y=kx,\\ y^2=6x,\end{cases}$$\begin{cases}y=-\frac{x}{k},\\ y^2=6x,\end{cases}$

解得两个交点分别为$\left(\frac{6}{k^2},\frac{6}{k}\right)$,$(6k^2,-6k)$,

它们的中点为$\left(\frac{3}{k^2}+3k^2,\frac{3}{k}-3k\right)$,

由 $x=\frac{3}{k^2}+3k^2$,$y=\frac{3}{k}-3k$,消去 k,得 $y^2=3x-18$,所以线段 AB 中点的轨迹方程为 $y^2=3x-18$.

18.**解:**(1)抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为(1,0),直线的斜率为-1,

则该直线方程为 $y=-(x-1)$,

即 $x+y-1=0$.

(2)设点 A、B 的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2),由$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=-x+1,\end{cases}$消去 y 可得 $x^2-6x+1=0$,

根据韦达定理,得 $x_1+x_2=6$,$x_1x_2=1$,所以$|AB|=\sqrt{1+(-1)^2}\times\sqrt{6^2-4}=8$,

点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

19.**解:**(1)双曲线 C 的焦点在坐标轴上,其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,

则可设双曲线C的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$,将点 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$代入双曲线 C 的方程,可得 $\lambda=1$,所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)假设存在被点 B(1,1)平分的弦.

设 B(1,1)是弦 MN 的中点,且 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=2$,$y_1+y_2=2$.

因为点 M,N 在双曲线 C 上,所以$\begin{cases}2x_1^2-y_1^2=2,\\ 2x_2^2-y_2^2=2,\end{cases}$所以 $2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)=0$,

所以 $4(x_1-x_2)=2(y_1-y_2)$,

所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$,

所以直线 MN 的方程为 $y-1=2(x-1)$,即 $2x-y-1=0$,由$\begin{cases}2x^2-y^2=2,\\ 2x-y-1=0,\end{cases}$得 $2x^2-4x+3=0$,

因为 $\Delta=16-4\times3\times2=-8<0$,所以直线 MN 与双曲线 C 无交点,所以不存在被点 B(1,1)平分的弦.

20.**解:**(1)因为(-2,0)是双曲线的一个焦点,所以双曲线的焦点在 x 轴上.

设双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,焦距为 $2c$,

则$\begin{cases}c=2,\\ \frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=1,\end{cases}$

所以双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)设 $P(x,y)$,则 $Q(-x,-y)$,

所以$\overrightarrow{NP}=(x-1,y-1)$,$\overrightarrow{MQ}=(-x,-y-1)$,

所以$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-x^2+x+1-y^2=-x^2+x+1-\left(\frac{x^2}{3}-1\right)=-\frac{4}{3}x^2+x+2=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{35}{16}$,因为 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $x\geqslant\sqrt{3}$,所以当 $x=\sqrt{3}$ 时,$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$取得最大值$\sqrt{3}-2$.所以$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$的取值范围是$(-\infty,\sqrt{3}-2]$.

21.(1)**解:**由抛物线的定义,得$|MF|=\frac{p}{2}-(-2)=\frac{5}{2}$,所以 $p=1$,所以抛物线的方程为 $y^2=-2x$.

(2)**证明:**由(1)可知,点 M 的坐标为(-2,2).

设直线 l 的方程为 $x=ky+b$.

因为点 M 不在直线 l 上,

所以 $b+2+2k\neq0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将直线 l 与抛物线联立得$\begin{cases}x=ky+b,\\ y^2=-2x,\end{cases}$化简得 $y^2+2ky+2b=0$,所以 $y_1+y_2=-2k$,$y_1y_2=2b$,①

又 $k_1+k_2=\frac{y_1-2}{x_1+2}+\frac{y_2-2}{x_2+2}=-2$,

即$(y_1-2)(ky_2+b+2)+(y_2-2)(ky_1+b+2)=-2(ky_1+b+2)(ky_2+b+2)$,化简得$(2k+2k^2)y_1y_2+(b+2+2k+2kb)\cdot(y_1+y_2)+2b^2+4b=0$,

将①代入得,$kb-2k-2k^2+b^2+2b=0$,即$(b-k)(b+2+2k)=0$,得 $b=k$.

当 $b=k$ 时,直线 l 的方程为 $x=k(y+1)$,此时直线 l 恒过点(0,-1).

22.**解:**(1)抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,准线与 x 轴的交点为 $E\left(-\frac{p}{2},0\right)$.

当 $AB\perp x$ 轴时,A 的横坐标为$\frac{p}{2}$,所以 $y_A^2=2px_A=p^2$,所以$|EA|=\sqrt{\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\right)^2+y_A^2}=\sqrt{2p^2}=2$,解得 $p=\sqrt{2}$,所以抛物线的方程为 $y^2=2\sqrt{2}x$.

(2)设直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{\sqrt{2}}{2}$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}x=my+\frac{\sqrt{2}}{2},\\ y^2=2\sqrt{2}x,\end{cases}$

消去 x,得 $y^2-2\sqrt{2}my-2=0$,

则 $y_1+y_2=2\sqrt{2}m$,$y_1y_2=-2$,

直线 AE 的斜率为 $k_{AE}=\frac{y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

则 AE 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

令 $x=0$,可得 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

即 $M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$.

同理可得 $N\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{y_2}{x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$,

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|EA|\cdot|EB|}{\frac{1}{2}|EM|\cdot|EN|}$$

$$=\frac{|y_1|\cdot|y_2|}{|y_M|\cdot|y_N|}$$

$$=\frac{|y_1y_2|}{\frac{\frac{1}{2}|y_1y_2|}{\left(x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$$

$$=2\left(x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=2\left[x_1x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\right]$$

$$=2x_1x_2+\sqrt{2}(x_1+x_2)+1$$

$$=\frac{y_1^2y_2^2}{4}+\sqrt{2}\left(\frac{y_1^2}{2\sqrt{2}}+\frac{y_2^2}{2\sqrt{2}}\right)+1$$

$$=1+\frac{1}{2}[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2]+1$$

$$=\frac{1}{2}(y_1+y_2)^2+4$$

$$=4m^2+4\geqslant4.$$

当 $m=0$ 时,取等号.

即$\frac{S_1}{S_2}$的取值范围为$[4,+\infty)$.